薛秀谦　范宝德　李永琪　编

运筹学

系统模型·原理·方法

中国矿业大学出版社

运 筹 学

系统模型·原理·方法

薛秀谦 范宝德 李永琪 编

中国矿业大学出版社

内容简介

本书系统讨论了运筹学中线性问题的模型、原理和方法，内容有线性规划、目标规划、整数规划、网络规划，并简要介绍了动态规划、对策论以及算法复杂性分析。

本书在讨论运筹学原理和方法的基础上，突出了数学建模、算法设计与算法复杂性分析的思想。既注重了问题模型的实际背景、原理的直观说明，又有一定的深度和广度。各章后附有一定量的思考题和习题，便于自学。

本书既可作为高等院校大学生的教科书和研究生的课程教材，又可作为广大管理工作者、科研人员和工程技术人员的参考读物。

运 筹 学

系统模型·原理·方法

薛秀谦　范宝德　李永琪　编

责任编辑　姜志方

中国矿业大学出版社出版发行

新华书店经销　中国矿业大学印刷厂印刷

开本 850×1168　1/32　印张 9.625　字数 240 千字

1998 年 6 月第一版　1998 年 6 月第一次印刷

印数：1～2100 册

ISBN 7-81040-835-6

O·63　　定价：15.00 元

前　言

运筹学是近几十年来发展起来的一门新兴学科，是实现管理现代化和决策科学化的有力工具，在财政、经济、管理、工程技术以及军事和社会科学中都得到了广泛应用。

运筹学是一门交叉学科，它既是现代应用数学的重要内容，又是现代管理科学、数量经济学、系统工程等学科的重要基础。同时，运筹学又存在许多分支学科。本书主要讨论了运筹学中线性系统的模型、原理和方法，突出了数学模型与算法分析的思想。当今社会发展中，人们越来越多地会提出像“有限资源的合理利用”以及“资源可持续发展利用”等问题，在解决这类问题时，运筹学中的方法大有用武之地，而建立适当的数学模型并确定一个有效算法，正是定量分析并解决实际问题的关键所在。本书试图为从事运筹学、管理科学的工作者和工程技术人员提供一本参考读物，也试图为大学本科生和研究生提供一本“运筹学”课程教材。

全书共有 10 章，其中带“ * ”号的内容是供读者选学的材料。第一章讨论了线性规划问题及其数学模型；第二章讨论了线性规划的单纯形理论、单纯形方法并介绍了算法复杂性分析的基本概念；第三章讨论了线性规划的对偶理论、对偶单纯形法，分析了对偶问题的经济学含义与资源的影子价格；第四章讨论了一类特殊的线性规划，运输问题与表上作业法；第五章讨论了目标规划的数学模型与算法；第六章介绍了整数规划与资源分配问题；第七章讨论了图论与网络规划；第八章介绍了网络计划与 PERT 方法；第九章介绍了多阶段决策问题与动态规划；第十章介绍了二元对策论。在各章末附有一定数量的习题，书后附有参考答案。

本书由薛秀谦(第1,2,3,7章),范宝德(第8,9,10章),李永琪(第4,5,6章)编写,并由薛秀谦完成全部书稿的统稿工作。在编写过程中,朱开永给予了热情的帮助,并提出了宝贵的修改意见。中国矿业大学出版社责任编辑姜志方对全部手稿完成了繁重、细致的编辑、排版工作。在此,我们表示深切的谢意。

由于我们水平有限,查阅的文献资料不够全面,书中肯定会有诸多缺点错误,敬请广大读者批评指正。

编　者

1998年3月10日

目　录

绪 论

看到“运筹学”，人们往往会想到中国古代的一句名言“运筹帷幄之中，决胜于千里之外”。的确，运筹与决策是人类互相关联的两个行为，运筹是决策前的行为过程，而决策是运筹的结果。大智大略是伟大的政治家、军事家所运筹帷幄的结果，这种运筹与本书所讨论的运筹学是不同的。

一、什么是运筹学

运筹学是 20 世纪 40 年代发展起来的一门学科，其英文名称是“operational research”，往往简记为“O. R.”。汉语直译为“(军事)行动研究”。目前，人们对运筹学说法不一。莫斯(P. M. Morse)和金博尔(G. E. Kimball)曾说：运筹学是为决策机构在对其控制下的业务活动进行决策时，提供的以数量化为基础的科学方法。这里所强调的运筹学是决策的科学方法，是以定量化为基础的。因而，运筹学应属于应用数学，是为决策、管理服务的数学。事实上，西方现代管理科学的主要内容是运筹学。但是，由于一般的决策过程往往涉及到事物的定性与定量两个方面的影响，因此，运筹学又不同于决策科学或管理科学。还有人认为：运筹学是一门应用科学，它广泛应用现有的科学技术知识和数学方法，来解决实际中提出的专门问题，并为决策者选择最优决策提供定量依据。这里强调运筹学的多学科交叉和最优决策。最优的含义是指在多种可行方案中选取最能满足我们目标要求的方案，如“以少的投人得到多的产出”、“花费省”等。但在实际生活中，由于人们决策的目标是多样的，要使每个目标都达到最好往往不可能做到，比如“多、快、

好、省”四个目标都得到满足是不大现实的，因此，人们往往用满意来代替最优。再一种说法是：运筹学是确定有限资源的合理利用的科学。

20 世纪 50 年代，钱学森、许国志等教授将运筹学引入我国。当时，有人曾将其译为“运用学”，不久才定名为“运筹学”。后来，许国志教授在谈起运筹学时，曾提出了“事理学”一词，来概括运筹学的各个分支。因为相对于研究物体运动变化规律的“物理学”，研究事物存在形态、数量及最佳事物的“事理学”，正是运筹决策的实质。“事理学”一词对于我们分析问题、理解问题和说明问题有一定帮助。

二、运筹学发展简史

一般说运筹学起源于第二次世界大战，发展于五、六十年代。但是原苏联康托洛维奇的《生产组织与管理中的数学方法》一书（规划论）出版于 1939 年，冯·诺伊曼等所著《对策论和经济行为》一书（对策论的创始作）中的许多结论于 1928 年开始刊出。确实，“运筹学”一词是在二战期间出现的，最早是在英国皇家空军战斗指挥部管辖下的名为“（军事）行动研究”小组于 1938 年提出的，其英文是“operational research”。这个小组以它对英国当时空防的一些战术或战略所作的研究和建议而出名；之后，美国、加拿大等国也组成同名小组，进行战术评价、战术改进、作战计划、战略选择等方面的研究，同时也研究如何改进后勤调度和训练计划。这些研究，由于综合地运用了科学方法和技术，纠正了人们一些直观想象的错误，解决了当时战争中提出的一些新问题，从而取得了人们对这种研究的重视，也为运筹学争得了荣誉。

战后，运筹学得到蓬勃发展，出现了应用研究和理论研究相互促进的局面。从应用方面来说，在工商业管理中的应用尤为突出。从理论方面来说，形成了运筹学的许多分支：数学规划（线性规划、非线性规划、整数规划、动态规划、目标规划、随机规划等）、图论与

网络、排队论(随机服务系统理论)、存贮论、对策论、系统可靠性分析与质量管理等,还有组合分析、搜索论、价值论、决策论、投入产出论等。

三、运筹学的特点

运筹学是一门研究如何有效地组织和管理人机系统的科学。在一个复杂的人机系统中,涉及到大量人才和其它资源的统筹组织安排,运筹学应用分析的、经验的和数量的方法,通过系统的概念模型和数学模型,对各种可供选择的方案进行比较评价,为制订最优的管理决策提供数量上的依据。

从运筹学的发展历程中,可以看出运筹学具有下列特点:

① 数学研究方法渗入社会科学。生产与管理的规模日益庞大,其间的数量关系也越来越复杂,从其间的数量关系来研究问题是运筹学的一大特点。例如,当研究物资如何调运才能使总运费最省,或者研究桥梁结构如何设计才能既满足工程的设计要求又能使所用钢材最省时,可以建立相应的数学规划模型。又比如,对于一个大型工程,研究如何组织管理才能早日完工时,就提出了统筹方法,或 PERT/CPM 法。

② 着重实际应用。运筹学中的理论或问题模型往往是从实际问题中得出的,有着明显的实际背景。如网络最大流理论与方法可以用于处理像货流、资金流等问题。但在实际应用中,由于现实问题情况多样,理论上的最优解往往不能满足实际需要,这就需要全面考察实际情况得出有成效的满意解。

③ 理论与应用的发展相互促进。如线性规划问题是在研究生产的组织和计划中出现的,后来才发展成一套较完整的理论和方法,如单纯形理论和方法,进而又开拓了线性规划的应用范围。

④ 跨学科性。运筹学综合应用多种学科的知识来解决实际问题,这也是运筹学存在多种不同学科分支的特点。在实际应用中,对于某些确定性问题,人们首先探讨能否用有严密理论和较成熟

算法的数学规划去求解;对于非确定性问题,则考虑用对策论或决策论;而对于无现成方法可用的问题,人们往往求助于计算机模拟技术。

总之,运筹学是一门新兴学科,它在工业、商业、交通运输、工程技术、行政管理等领域有着广泛的应用。它已成为管理科学的重要内容,成为各行各业管理人员所需的工具。随着电子计算机的日益普及,运筹学中所提供的模型和方法会有更多应用。

第一章　线性规划

线性规划(linear programming)是运筹学的一个重要分支。线性规划问题是康托洛维奇在解决工业生产组织和计划问题时(1939年)提出的。1947年,丹捷格(G. B. Dantzig)提出了线性规划的单纯形理论与单纯形方法。之后,线性规划得到了广泛应用。所谓线性规划问题是指一类特殊的最优化,它在一组线性约束条件下寻求线性目标的最大值或最小值。本章讨论线性规划问题的数学模型和基本概念,以及基可行解的特征与几何意义。

§1.1　线性规划问题

线性规划问题是针对一类有限资源的合理利用而提出的,其中所谓的资源包括人力、物力、资金、时间、里程等等。为了更好地理解线性规划问题的实际意义和应用背景,我们先讨论几个具体的例子。

例 1　(生产计划问题)

某企业要在规定的计划期内安排生产甲、乙两种产品,这个企业现有的生产资料是:设备 18 台时,原材料 A 4 吨,原材料 B 12 吨;已知生产单位产品所需消耗的设备台时及原材料 A、B 的数量由表 1-1 给出,并且单位产品的利润也给出。问企业领导应如何确定生产计划使企业获利最多。

表 1-1

	甲	乙	现有生产资料
设　备 / 台时	3	2	18
原材料 A/ 吨	1	0	4
原材料 B/ 吨	0	2	12
单位利润 / 万元	3	5	

分析　确定生产计划实质上就是确定甲、乙两种产品的生产量。为了定量分析解决这个问题，首先应建立其数学模型。设 x_1、x_2 分别表示在计划期内甲、乙两种产品的产量。首先分析 x_1、x_2 应满足什么条件，才能使生产正常进行。由于现有的生产资料总量是有限的，因此，正常生产过程中生产资料消耗不能超过现有量，因此，x_1、x_2 应同时满足下列条件：

设备台时限制　$3x_1 + 2x_2 \leqslant 18$

原材料 A 限制　$1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 \leqslant 4$

原材料 B 限制　$0 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leqslant 12$

同时，由于产品产量不能是负的，因而又有非负限制：$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$。该生产计划的总利润为　$z = 3x_1 + 5x_2$。

现在的问题是找出 x_1、x_2，在上述各种条件限制下，使 z 达到最大值。

综上所述，该生产计划问题的数学模型应是：

$$\max z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leqslant 18 \\ x_1 \leqslant 4 \\ 2x_2 \leqslant 12 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

例 1 中的问题实质上是合理利用生产资源问题。一般的资源利用问题可表述为：

设某企业利用 m 种不同的资源来生产 n 种产品，已知该企业拥有的第 i 种资源的数量是 $b_i(i=1,2,\cdots,m)$，生产一个单位第 j 种产品所消耗的第 i 种资源的数量为 a_{ij}，第 j 种产品的单位利润是 $c_j(j=1,2,\cdots,n)$。现欲作一个能够充分利用现有资源的生产计划，使每种产品的生产消耗在不超过现有资源的条件下，总利润最大。

我们用 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$ 表示第 j 种产品的生产数量。可以建立资源利用问题的数学模型为：

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant b_m \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases}$$

例 2 （物资运输问题）

某公司要运销一种物资。该物资有甲、乙两个产地，产量分别是 2000 吨、1000 吨；另有 A、B、C 三个销地，销量分别是 1700 吨、1100 吨、200 吨。已知该物资的单位运价如表 1-2。问公司领导应如何确定调运方案，才能使在产销平衡的条件下，总运费最低？

表 1-2

单位运价 \ 销地 / 产地	A	B	C	产量
甲	21	25	7	2000
乙	51	51	37	1000
销量	1700	1100	200	

分析　确定调运方案就是确定从不同产地到各个销地的运

输量。设 x_{ij} 表示这些要找的运量。即 x_{11}、x_{12}、x_{13} 分别表示从甲地调往 A、B、C 三地的运量，x_{21}、x_{22}、x_{23} 分别表示从乙地调往 A、B、C 三地的运量。由于要求产销平衡，从甲、乙两地分别调往 A、B、C 三地的物资的数量应该分别等于甲、乙两地的产量，所以 x_{ij} 应满足：

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 2000 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1000 \end{cases}$$

同时，运到 A、B、C 三地的物资数量应分别等于 A、B、C 三地的销量，所以 x_{ij} 还应该满足：

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} = 1700 \\ x_{12} + x_{22} = 1100 \\ x_{13} + x_{23} = 200 \end{cases}$$

由于 x_{ij} 是运量，不能是负数，所以还应满足：

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad (i = 1,2;j = 1,2,3)$$

由于假定运费与运量成正比，利用给出的单位运价，得出调运方案的总运费为：

$$z = 21x_{11} + 25x_{12} + 7x_{13} + 51x_{21} + 51x_{22} + 37x_{23}$$

综上所述，建立产销平衡下运费最省的调运问题的数学模型：

$$\min z = 21x_{11} + 25x_{12} + 7x_{13} + 51x_{21} + 51x_{22} + 37x_{23}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} = 1700 \\ x_{12} + x_{22} = 1100 \\ x_{13} + x_{23} = 200 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} = 2000 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1000 \\ x_{ij} \geqslant 0 \quad (i = 1,2;j = 1,2,3) \end{cases}$$

运输问题的一般提法是：某种物资有 m 个产地，A_1、A_2、…、A_m，产量分别是 a_1、a_2、…、a_m 个单位，另有 n 个销地 B_1、B_2、…、B_n，销量分别是 b_1、b_2、…、b_n 个单位。假设产销是平衡的，即总产量等于

总销量。已知由产地 A_i 向销地 B_j 运输一个单位物资的运价 c_{ij}，问应该怎样调运物资才能使总运费最省。

令 x_{ij} 表示由产地 A_i 向销地 B_j 的运量，则运输问题的数学模型为：

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1,2,\cdots,m) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1,2,\cdots,n) \\ x_{ij} \geqslant 0 \end{cases}$$

上述两个例子，虽然有不同的实际内容，但是它们都是要求一组变量的值，这组值满足一定的约束条件，如资源限制、供求关系等。这种约束条件都可以用一组线性不等式或线性方程来表示，同时使某个线性函数指标达到最大或最小。像具有这些特征的问题，称为线性规划问题。

§1.2 图解法

对于只有两个变量的线性规划问题：

$$\max(\min)\ z = c_1x_1 + c_2x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leqslant b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leqslant b_m \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

可以用图解法来解。图解法简单直观，有助于了解线性规划问题求解的基本原理和思想。