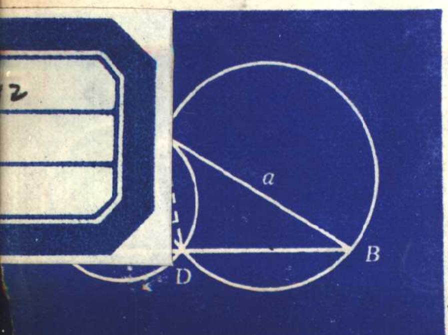
中学数学极值问题求解的方法

郭赫山编



知识出版社

中学数学极值问题求解的方法

郭 赫 山编

知 识 出 版 社

1982·12·上海

内 容 提 要

中学数学内极值问题的求解，不但是运算技巧的练习，而且具有实际应用的意义。如有关工农业生产及各行各业的实际工作中，都有提高效率、节约用材的极大、极小问题。作者归纳了各项求解的方法，并列举许多具体实例，对于极值的运算技巧，有一定的启发和帮助，可作为中学生和中学教师的参考用书。

中学数学极值问题求解的方法

郭 赫 山编

知 识 出 版 社 出 版

（上 海 古 北 路 650 号）

新华书店上海发行所发行　上海海峰印刷厂印刷

开本 787×1092 毫米 1/32 印张 2.625 字数 55,000

1982 年 12 月第 1 版 1982 年 12 月第 1 次印刷

印数：1—27,500

书号：13214·1004　　定价：0.23元

前　　言

在生产实践和科学实验中，经常遇到在一定的条件下，怎样才能做到用料最省、质量最好、成本最低、效率最高等一类问题。这一类问题，在数学上就是所谓极大值、极小值问题。

关于极值问题的求法，中学数学教材中零星地、分散地讲了一些，并不系统。下面我们在中学数学知识范围内，介绍极值问题的一般求法，并选择了104个例题进行了归类。

郭赫山　于长沙第20中学

目　录

方法一　利用二次函数的极值求极值

二次函数 $y=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$，

1）当 $a>0$，$x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，$y_{极小值}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$；

2）当 $a<0$，$x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，$y_{极大值}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$。

二次函数 $y=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$ 定义在某一闭区间 $[\alpha,\beta]$ 上时，它同时存在最大值和最小值。

【例 1】 求函数 $y=(x-1)^2+(x-2)^2+(x-3)^2+\cdots\cdots+(x-n)^2$ 的极值。

【解】

$$\begin{aligned}y&=x^2-2x+1+x^2-4x+4+x^2-6x+9+\cdots\cdots\\&\quad+x^2-2nx+n^2\\&=nx^2-2(1+2+3+\cdots\cdots+n)x\\&\quad+(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots n^2),\end{aligned}$$

$\because \quad n>0$，$\therefore \quad y$ 有极小值。

当 $x=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{[-2(1+2+3+\cdots\cdots+n)]}{2n}$

$$=\frac{1+2+3+\cdots\cdots+n}{n}=\frac{n+1}{2}\text{ 时，}$$

$$y_{极小值}=\frac{4ac-b^2}{4a}=c-\frac{b^2}{4a}$$

$$=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$$

$$\frac{[-2(1+2+3+\cdots\cdots+n)]^2}{4n}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{(1+n)^2n}{4}$$

$$=\frac{2n(n+1)(2n+1)-3(1+n)^2n}{12}$$

$$=\frac{n(n+1)(n-1)}{12}=\frac{n(n^2-1)}{12}=\frac{n^3-n}{12}.$$

【例 2】 求函数 $y=2-\dfrac{5}{\sqrt{x^2-2x+6}}$ 的极值。

【解】 当 $x=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-2}{2}=1$ 时，$\sqrt{x^2-2x+6}$ 有最小值：$\sqrt{\dfrac{4\times6-(-2)^2}{4}}=\sqrt{5}$，此时 $\dfrac{5}{\sqrt{x^2-2x+6}}$ 有最大值：$\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$，于是函数 $y_{最小值}=2-\sqrt{5}$。因为 $\sqrt{x^2-2x+6}$ 无最大值，所以 y 无最大值。

【例 3】 $ABCD$ 为单位正方形，在正方形内，$\odot O$ 与 $\odot O'$ 互相外切，且 $\odot O$ 与 AB、AD 两边相切，$\odot O'$ 与 CB、CD 两边相切。试问当这两圆半径各多长时，两圆面积之和取最大值或最小值。

【解】 如图 3-1，用 r、r' 分别表示 $\odot O$ 及 $\odot O'$ 的半径，$OO'=r+r'=2-\sqrt{2}$。

记 $a=2-\sqrt{2}$，则 $r'=a-r$，于是两圆面积之和

$$S=f(r)=\pi(r^2+r'^2)=\pi[r^2+(a-r)^2]$$

$$=\pi(2r^2-2ar+a^2)。$$

$\because\quad a-\frac{1}{2}\leqslant r\leqslant\frac{1}{2}$ 或 $\frac{3}{2}-\sqrt{2}\leqslant r\leqslant\frac{1}{2}$。

当 $r=-\frac{-2a}{2\times 2}=\frac{a}{2}$，$r'=a-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}$时，亦即

$r=r'=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$时，$S$ 取最小值(图 3-2)。

当 $r=\frac{1}{2}$，$r'=\frac{3}{2}-\sqrt{2}$ 或 $r=\frac{3}{2}-\sqrt{2}$，$r'=\frac{1}{2}$时，S 取最大值(图 3-3)。

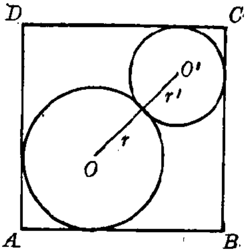


图 3-1

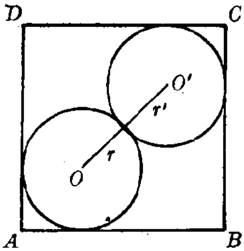


图 3-2

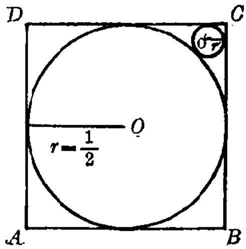


图 3-3

【例 4】 已知 $ABCD$ 为半径是 R 的圆 O 的内接梯形，且 AD 为直径，求此梯形周长的最大值。

【解】 如图 4，引 $CE\perp AD$（E 为垂足）。

设 $CD=x, CB=2y$，

则 $CF=y$，$DE=R-y$。

由射影定理可知

$$DE\cdot 2R=CD^2,$$

即 $(R-y)\cdot 2R=x^2$，

$$R-y=\frac{x^2}{2R},$$

$$\therefore\quad y=-\frac{x^2}{2R}+R。$$

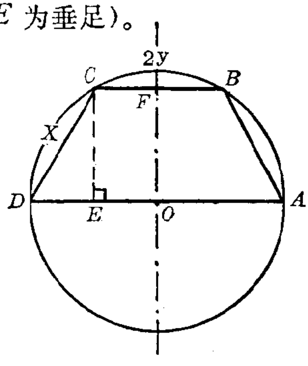


图 4

而 $x+y=-\frac{x^2}{2R}+x+R=-\frac{1}{2R}(x^2-2Rx)+R$

$$=-\frac{1}{2R}(x-R)^2+\frac{3}{2}R。$$

于是当 $x=R$ 时，$x+y$ 有最大值 $\frac{3}{2}R$，此时梯形 $ABCD$ 的最大周长 $=2(x+y)+2R=5R$。

【例 5】 $\triangle ABC$ 中，已知两边之和为 20cm，其夹角为 θ，且方程 $10x^2+10\cos\theta x+3\cos\theta+4=0$ 有等根。

求 $S_{\triangle ABC}$ 的最大值。

【解】 $\because$ $10x^2+10\cos\theta x+3\cos\theta+4=0$ 有等根，

$\therefore$ $\triangle=100\cos^2\theta-40(3\cos\theta+4)=0$，

即 $5\cos^2\theta-6\cos\theta-8=0$，

解得 $\cos\theta=2$（弃之），$\cos\theta=-\frac{4}{5}$。

$\because$ $0<\theta<\pi$，

$\therefore$ $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$。

又设三角形一边长为 x，另一边为 $20-x$。

$$\therefore\quad S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot(20-x)\cdot x\cdot\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(20-x)\cdot x\cdot\frac{3}{5}$$

$$=-\frac{3}{10}x^2+6x,$$

当 $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{6}{2\left(-\frac{3}{10}\right)}=10$时，

$$S_{\triangle ABC}\text{的最大值}=\frac{4ac-b^2}{4a}$$

$$=\frac{4\cdot\left(-\frac{3}{10}\right)\cdot 0-36}{4\cdot\left(-\frac{3}{10}\right)}=30(\text{cm}^2)。$$

【例 6】 若方程 $5x^2-10\cos\alpha x+\tau\cos\alpha+6=0$ 的两根相等,试求两邻边之和为 6,且夹角为 α 的平行四边形的最大面积。

【解】 $\because$ $5x^2-10\cos\alpha x+\tau\cos\alpha+6=0$的两根相等,

$\therefore$ $\triangle=100\cos^2\alpha-4\times5\times(\tau\cos\alpha+6)=0$,

解得 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$, $\cos\alpha=2$(弃去)。

$\because$ $0<\alpha<\pi$,

$\therefore$ $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$。

设平行四边形的两邻边为 x 及 $6-x$,则

$$S_{\square}=2\times\frac{1}{2}x(6-x)\sin\alpha$$

$$=\frac{4}{5}(6x-x^2)$$

$$=-\frac{4}{5}x^2+\frac{24}{5}x,$$

$$\therefore\text{当 } x=-\frac{b}{2a}=-\frac{\frac{24}{5}}{2\times\left(-\frac{4}{5}\right)}=3(\text{即 }6-x=3)\text{时},$$

S 有极大值。

这个平行四边形的最大面积 $=\frac{4}{5}\times3\times3=7\frac{1}{5}$。

【例 7】 证明 m 为任何实数时，方程

$$\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}(m^2-m+1)=0$$

总有两个实数根；又问 m 为何值时，两根之差的绝对值最小？此最小值为多少？

证明：$\triangle=(-1)^2-4\cdot\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}(m^2-m+1)\right]$

$$=m^2-m+2=\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0,$$

∴ m 为任何实数时此方程有实数根。

又设两根为 α、β。则

$$|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}。$$

由韦达定理知， $\alpha+\beta=2$， $\alpha\beta=-(m^2-m+1)$，

$$\therefore\quad |\alpha-\beta|=\sqrt{4+4(m^2-m+1)}$$

$$=2\sqrt{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}。$$

当 $m=\frac{1}{2}$ 时，$|\alpha-\beta|$ 达到最小，此时最小值为

$$2\sqrt{\frac{7}{4}}=\sqrt{7}。$$

【例 8】 求函数 $y=\frac{x^4+x^2+5}{(x^2+1)^2}$ 的最小值。

【解】 $y=\frac{(x^2+1)^2-(x^2+1)+5}{(x^2+1)^2}$

$$=1-\frac{1}{x^2+1}+\frac{5}{(x^2+1)^2},$$

令 $u=\frac{1}{x^2+1}$，则 $y=1-u+5u^2$。

于是，当 $u=\frac{1}{10}$ 时，y 的最小值 $=\frac{9}{20}$。

由 $u=\frac{1}{10}$，即 $\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{10}$，$x^2=9$，$\therefore\ x=\pm 3$。

故当 $x=\pm 3$ 时，$y=\frac{x^4+x^2+5}{(x^2+1)^2}$ 的最小值是 $\frac{9}{20}$。

【例 9】 如图 9。$ABCD$ 是四面体，平面 α 与一双对棱 AB 和 CD 分别平行，平面 α 与其他四条棱分别交于 E、F、G、H。

求证：$EFGH$ 是平行四边形。

问：这平行四边形在什么位置时面积最大？

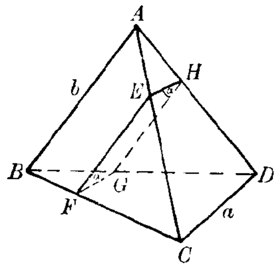


图 9

证明：$\because$ 平面 $\alpha \parallel CD$，

$\therefore$ $FG\parallel CD, EH\parallel CD$，

因此 $FG\parallel EH$；

同理可证 $EF\parallel GH$。

$\therefore$ $EFGH$ 为平行四边形。

设 $CD=a$，$AB=b$，$\angle EFG=\theta$，$\frac{AE}{AC}=t$，

则 $EH=at$，$EF=b(1-t)$，

$\therefore$ $S_{\square EFGH}=EF\cdot EH\sin\theta=abt(1-t)\sin\theta$，

即 $S_{\square EFGH}=-ab\,t^2\sin\theta+ab\,t\sin\theta$。

当平形四边形位置移动时，a、b、θ 都不变，只有 t 随之而变，所以，S 是 t 的二次函数。

由于 t 的二次项系数 $-ab\sin\theta<0$，可知当

$$t=-\frac{ab\sin\theta}{-2ab\sin\theta}=\frac{1}{2}$$

时，S 有最大值。即 E、F、G、H 分别为四条棱的中点时，这平

行四边形面积最大。

【例 10】 三角形二边之和为 4cm，它们的夹角为 60°。求这个三角形的周长的最小值及面积的最大值。

【解】 (1)设 $\triangle ABC$ 中 $\angle B=60°$，$AB=x$ cm，则

$$BC=(4-x)\text{cm}。$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}x\cdot(4-x)\cdot\sin 60°=-\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+\sqrt{3}x$$

当 $x=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)}=2$ 时，

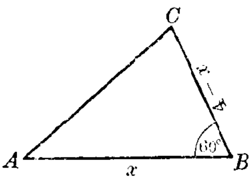


图 10

$$S_{\triangle ABC}\text{最大值}=\frac{4ac-b^2}{4a}$$

$$=\frac{4\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)\cdot 0-3}{4\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)}=\sqrt{3}(\text{cm}^2)。$$

(2) 令 $AC=y$，则三角形 ABC 的周长 $P=y+4$(cm)。若 y 有最小值时，P 有最小值。

由余弦定理有

$$y^2=x^2+(4-x)^2-2x(4-x)\cos 60°=3x^2-12x+16。$$

当 $x=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-12}{2\times 3}=2$ 时，

$$y^2\text{ 的最小值}=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\times 3\times 16-(-12)^2}{4\times 3}=4。$$

此处 y 取正数，所以 y 的最小值为 2，从而最小周长

$$P=y+4=2+4=6(\text{cm})。$$

【例 11】 某玻璃工厂要制造一批两面均为球面的凸面镜，规定其厚度为 S，镜片的直径为 d，如要使所费材料最少，则两个球面的半径应如何？

【解】 如图 11，凸面镜的断面为 $CEDFC$，已知

$EF=S,\quad CD=d$。

若 $\overset{\frown}{CED}$ 之圆心为 B，$\overset{\frown}{CFD}$ 之圆心为 A，设

$OF=x$．则 $OE=S-x$。

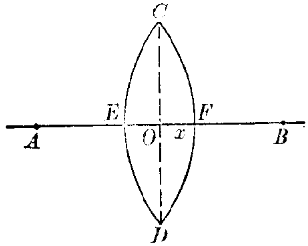


图 11

截球带 $CFDOC$ 的体积

$$V_1=\frac{\pi}{6}x\left[x^2+3\left(\frac{d}{2}\right)^2\right],$$

截球带 $CEDOC$ 的体积

$$V_2=\frac{\pi}{6}(S-x)\left[(S-x)^2+3\left(\frac{d}{2}\right)^2\right]。$$

凸面镜 $CEDFC$ 的体积

$$\begin{aligned}V&=V_1+V_2=\frac{\pi}{6}x\left[x^2+3\left(\frac{d}{2}\right)^2\right]\\&\quad+\frac{\pi}{6}(S-x)\left[(S-x)^2+3\left(\frac{d}{2}\right)^2\right]\\&=\frac{\pi}{6}\left(x^3+\frac{3d^2}{4}x+S^3-3S^2x+3Sx^2-x^3\right.\\&\quad\left.+\frac{3Sd^2}{4}-\frac{3d^2}{4}x\right)\\&=\frac{\pi}{6}\left(3Sx^2-3S^2x+S^3+\frac{3Sd^2}{4}\right)。\end{aligned}$$

即 $$V=\frac{\pi S}{2}x^2-\frac{\pi S^2}{2}x+\frac{\pi S}{6}\left(S^2+\frac{3d^2}{4}\right)。$$

此时 $$a=\frac{\pi S}{2},\quad b=-\frac{\pi S^2}{2},\quad c=\frac{\pi S}{6}\left(S^2+\frac{3d^2}{4}\right)。$$

故当 $x=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-\dfrac{\pi S^2}{2}}{2\cdot\dfrac{\pi S}{2}}=\dfrac{S}{2}$ 时，V 有最小值。

此时 $$S-x=S-\frac{S}{2}=\frac{S}{2}。$$

由此可知，两个球面的半径应该相等。

现再设两个球面的半径 $AC=BC=R$，则

$$R^2=\left(\frac{d}{2}\right)^2+\left(R-\frac{S}{2}\right)^2。$$

即 $$R^2=\frac{d^2}{4}+R^2-SR+\frac{S^2}{4},$$

$$SR=\frac{S^2+d^2}{4},$$

$$R=\frac{S^2+d^2}{4S}。$$

所以要使凸面镜所费材料最少，两个球面的半径应为

$$\frac{S^2+d^2}{4S}。$$

【例 12】 用定长 L 条形的材料，截成七段做一个窗框，如图 12 所示。问长阔要怎样尺寸，才最通空气？

【解】 设窗框的长高分别为 x 和 y，就有 $3x+4y=L$，则

$$y=\frac{L-3x}{4}。$$

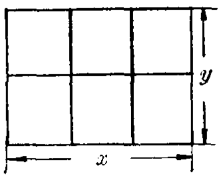


图 12

那么，面积 $S=xy=x\cdot\frac{L-3x}{4}$

$$=\frac{1}{4}x(L-x)=-\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}Lx。$$

∴ 当 $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{\frac{1}{4}L}{2\left(-\frac{3}{4}\right)}=\frac{L}{6}$时，$S$ 有极大值。此时 $y=\frac{L}{8}$，所以 $x:y=4:3$。

故当这窗户长阔之比为 4:3 时，才最通气。

【例13】 在一个球形器材中嵌进一个圆柱形的零件，为了使零件不易脱落，必须使它与球有最大接触面积，问此时圆柱零件的尺寸应该怎样?

【解】 如图 13，设球半径为 R，圆柱体底面直径为$2r$，则圆柱体的高 h 和侧面积 S 分别为

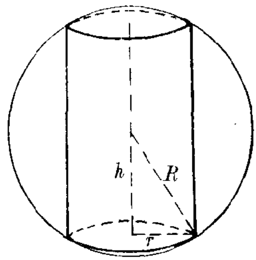


图 13

$$h=2\sqrt{R^2-r^2},\quad S=2\pi rh$$

所以，$S=2\pi r\cdot 2\sqrt{R^2-r^2}$

$$=4\pi r\sqrt{R^2-r^2},$$

两边平方，得

$$S^2=16\pi^2r^2(R^2-r^2)$$

$$=-16\pi^2(r^2)^2+16\pi^2R^2(r^2),$$

把 r^2 看为变量，则 S^2 是 r^2 的二次函数。

$\because\quad a=-16\pi^2,\ b=16\pi^2R^2,\ c=0$。

$\therefore$ 当 $r^2=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{16\pi^2R^2}{2(-16\pi^2)}=\dfrac{R^2}{2}$

时，S^2 有极大值，同时 S 也有极大值，由此知，

当 $$r=\frac{R}{\sqrt{2}}$$

即 $2r=\sqrt{2}R\approx 1.4R$ 时，S 有极大值，这时

$$h=2\sqrt{R^2-\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{2}R=2r。$$

所以若圆柱体底面直径为球半径的 1.4 倍时，它们之间有最大接触面积。

【例14】 求 $y=a^{x^2-4x+5}$ 的极值。

【解】 $\because$ 当 $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2\times1}=2$ 时，

$$x^2-4x+5=1$$

是极小值。

$\therefore$ 当 $a>1$ 时， $y=a^{x^2-4x+5}$。

当 $x=2$ 时，有极小值 $y=a$；又当

$0<a<1$ 时， $y=a^{x^2-4x+5}$。

当 $x=2$ 时，有极大值 $y=a$。

【例 15】 求 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+35$ 在区间 $[-4,-1]$ 上的极大值和极小值，且求出取极值时的 x。

【解】 令 $x^2+5x+5=y$，于是

$$\begin{aligned}&(x+2)(x+3)(x+1)(x+4)+35\\=&(x^2+5x+6)(x^2+5x+4)+35\\=&(y+1)(y-1)+35=y^2+34。\end{aligned}$$

由于 $y^2\geqslant0$，所以当 $y=0$ 时取得极小值。现求 $y=0$ 时的 x。

根据原设有 $x^2+5x+5=0$，解得 $x=\frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$。

且 $\frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$ 在区间 $[-4,-1]$ 中，故这时取得极小值为 34；又当 x 在区间 $[-4,-1]$ 时，抛物线 $y_1=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$ 的极小值，当 $x=-\frac{5}{2}$ 取得，为 $-\frac{5}{4}$，这样 $|y_1|$ 的极大值为 $\frac{5}{4}$，所以 y^2 的极大值为 $\frac{25}{16}$，函数的极大值为 $35\frac{9}{16}$。

【例 16】 矩形 $ABCD$ 中，$AB=a$，$BC=b$，在 AB、BC、CD、DA 上分别取 E、F、G、H 点，使 $AE=AH=CG=CF=$