高等学校教材

工程电磁场

杨宪章 主编

中国电力出版社
www.cepp.com.cn

高等学校教材

工程电磁场

杨宪章 主编

中国电力出版社
www.cepp.com.cn

内 容 提 要

本书是按照“面向21世纪电气信息类专业改革”的要求，采用深入浅出，从特殊到一般的教学方法编写的。全书共分七章，叙述了静电场、恒定电场、恒定磁场、边值问题、时变电磁场和平面电磁波。每章章末有小结，各章都选配了适量的例题、习题、思考题和测验题，习题均附有参考答案。

本书可作为高等学校电气、信息类专业的教学用书；也可作为高等教育函授、自学考试教学用书，并可供相关专业的教师、工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

工程电磁场/杨宪章编著．-北京：中国电力出版社，2002.4

ISBN 7-5083-0998-7

Ⅰ.工…　Ⅱ.杨…　Ⅲ.电磁场-理论　Ⅳ.O441.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第017178号

中国电力出版社出版、发行

（北京三里河路6号　100044　http：//www.cepp.com.cn）

北京通天印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

*

2002年7月第一版　2002年7月北京第一次印刷

787毫米×1092毫米　16开本　15.25印张　342千字

印数　0001—3000册　　定价 **20.00** 元

序

电磁场是一门技术基础课，在学生的培养计划中起到很重要的作用。但由于电磁现象的抽象性和工程电磁场问题的复杂性，所以定性分析与定量计算都不易为学生所掌握，因此，往往会造成学生的畏难情绪，缺乏兴趣，学习被动。

为克服学生的上述问题，教材能起很大作用。如果教材的编排符合下列要求，则将是我心目中的好教材。

1. 教材能在学生已有的理论基础上由浅入深，及时总结提高，让学生感到经过努力，可以掌握所学内容。从而增加学生的学习信心。

2. 教材能从各个不同角度反复强调基本理论和计算公式的适用条件，帮助学生建立清晰的物理概念和培养学生良好的科学习惯。避免学生盲目套用公式。

3. 教材能处处以基本理论为指导，对现象和问题进行定性分析和定量计算，则能培养学生正确的思维方法和分析问题的方法。提高学生运用理论解决实际问题的能力。

4. 教材能紧密联系实际，让学生能够学以致用。从而重视课程内容，提高学生的学习兴趣。

5. 教材能帮助学生掌握“类比”这一科学的分析方法。既能使学生复习和巩固已学的知识内容，又可缩短新内容的学习过程。

6. 教材内容的安排，既有从特殊到一般的归纳方法，又有从一般到特殊的演绎方法，则既能使学生易于接受新内容，又能培养学生抽象思维能力。

7. 教材注重吐故纳新，及时调整教学内容，使教材紧跟时代的步伐，使学生看到科学技术的不断发展，产生努力学习的紧迫感。

8. 教材能安排多种环节的配合，使学生完成一定深度的认知过程，避免学生“考试完毕，知识归师”的走过场的现象。

纵观本书内容，总体符合上述各项要求。因此，我认为本书是一本好教材。预计能收到积极的教学效果和良好的社会效益。

下面从书中具体的内容来阐明我的结论：

1. 在静电场的编排中，从电场强度的基本定义出发，利用学生已有的电场力作功的物理概念和线积分、面积分的数学概念，结合介绍电介质极化的物理过程，在很自然的情况下得出了静电场的两个基本规律。又从梯度、散度和旋度的基本定义出发推导出了它们在直角坐标系下的数学表达式，化解了矢量分析中的难点，使学生较为容易地接受难以理解的上述定义，又在很自然的条件下获得了静电场中两个基本规律的微分形式。

2. 唯一性定理是解题正确与否的唯一根据。本书抓住唯一性定理这一主线，贯彻于适定电磁场问题数学模型的建立中，几种简洁求解方法的引入以及静电屏蔽现象的应用等方面都作了十分深刻和细致的阐明，不仅帮助学生掌握这一重要定理，而又培养了学生分

析问题和解决问题的能力。

3. 编排静电场的指导思想同样贯彻在恒定电场和恒定磁场的编写中。在编写恒定电场时应用了类比这一科学方法，它不仅在理论推导中得到了应用，还在测量和计算中指出了它的应用所在。类比法在平面电磁波一章中得到了更为精彩的应用。相对于恒定场来说，平面电磁波一章中有很多新的概念和很多新的表达式。本书作者将平面电磁波和均匀传输线相类比，不仅便于学生接受新概念，而且表达式的推导也获得了大量的简化，作者也指出了类比双方的重要区别。

4. 本书在介绍基本规律的微分形式时，在恒定场中从梯度、散度和旋度的基本定义出发，虽然花了较多的篇幅，但使学生便于接受。而在时变场中却利用了几个数学恒等式，方便地获得了基本规律的微分形式。后者培养了学生的数学推理能力。这体现出本书作者的精心安排。

5. 在全书的各章中，在介绍理论以后，引入了很多实例，不但帮助学生消化理论，而又培养了学生的计算能力。此外，又将一些基本理论计算的结果引入到实际应用中，如涉及到架空地线的屏蔽效应、电缆绝缘、一相工作电容、开头熄弧、击穿电压、接地电阻和跨步电压等概念，又如时变场中的集肤效应、邻近效应以及电磁波沿传输线传输时的正确认识等。因而本书名为《工程电磁场》甚为恰当。

6. 本书作者紧跟时代的要求，给定量计算以足够的重视，僻专章讨论。除了精选传统的计算方法以外，又增加了两种数值计算方法。

7. 本书给学生提供了较多的反复巩固的条件。如在每章末除了要点、思考题外又增加了测验作业，便于学生自我检查。

总结以上所述，本书是工科院校电气、电子信息类专业学生，学习电磁场课程的一本好教材。

盛剑霓

2002.5.20

前　　言

随着科学技术水平的飞速发展，电磁场理论已在工业、农业、国防与科学技术各个领域得到广泛应用。对于高等学校电气信息类专业的学生而言，《电磁场》是一门很重要的技术基础课程。因为无论是强电专业或是弱电专业，大量问题都涉及到电磁场理论。实际上很多问题只有通过电磁场理论才能揭示出问题的本质。因此通过本课程的学习要求学生掌握电磁场的基本理论与分析计算的基本方法以及初步的实验技能，为解决工程实际问题和进一步研究电工、信息问题准备必要的理论基础，为学习自动化通信、控制信息后续的专业课打下基础。

然而《电磁场》同样也是一门较为难学的课程。这主要是由于其抽象性。因为电磁场是一种非实体存在形式的物质（运动形态），它不象客观存在的实体那样易于为人们所感觉所接受。

为了克服学习上所存在的困难，编者在引入有关教学内容时，采用深入浅出，从特殊到一般的叙述方法，为读者创造一个易于学习与掌握的环境；为加深读者对场的规律的认识，本书采用类比的方法，多次提及研究场问题时的共同途径与思想方法，以期触类旁通；为了使读者能正确理解并使用书中所介绍的定理与公式，本书反复强调所得定理、公式的前提条件及公式的等效形式；为了适应近代计算技术的要求，本书突出边值问题的求解，以及边界条件的重要性；本书在较多章节，提及书中理论在工程实际问题中的应用，以培养读者解决实际问题的能力，并增加读者学习电磁场理论的兴趣。另外，本书每章之后，均附有“本章要点”，其目的是起一个提纲挈领的作用，以帮助读者进一步了解本章的重点内容及主要公式。

武汉大学电气工程学院杨宪章教授编写了本书的第一、二、三、四、五章，武汉理工大学刘岚副教授编写了本书的第六、七章。全书由杨宪章教授主编。

我国著名电磁场理论及数值计算专家、西安交通大学博士生导师盛剑霓教授审阅了全书并提出了不少精僻意见，对此编者表示万分的感谢。在本书的编写过程中，武汉大学电气工程学院张莲梅讲师进行了大量的校对及改稿工作，在此亦甚表感谢。

限于编者的水平和经验，书中错误和不妥之处，在所难免，敬请广大同仁及读者批评指正。

编　者

二〇〇二年元月于武汉

目　　录

第一章　静　电　场（一）

本章所研究的对象是静电场。所谓静电场是指对于研究者（所采用的坐标系）而言，电场与激发电场的电荷的分布都是相对静止、不随时间而改变的。显然，引入本章的各物理量，都必须遵循这一规定。

本章主要研究静电场的基本规律以及这些规律的简单应用。读者应该较好地理解这些规律的实质内容，并学会运用这些规律去求解一些简单的静电场问题。

§1－1　电场与电场强度

电场的物质性与电场强度　摩擦生电（或接触起电）这一现象的最古老的发现者是我们的祖先和古希腊人。在我国古代的书籍中，曾有“玳瑁拾芥”的记载。事实上，这就是对电场力现象的描述。

由于近代物理学的发展，人们在近数十年内已正确地认识到：在带电体周围的空间，存在着一种特殊运动形态的物质——电场。当电荷（或带电体）进入电场时，电荷将受到电场给予的力。这种力，人们通常称之为电场力。电场能对电荷施力作功，说明电场具有能量，这是电场物质性的重要表现。两点电荷间（或两带电体间）的力，正是通过电场而进行传递的，因此十分清楚：电荷（或带电体）周围存在着一种特殊运动形态的物质——电场。这里，我们称之为“特殊”，是因为电场与一般“实体”的存在形式不同，而人们对于“实体”的存在易于感觉，又易于理解。

静电场是一种特殊运动形态的物质，它的基本特征表现在能对静止电荷施力。为此，将微小正点电荷在电场中任一点所受电场力与此微小正点电荷电量之比的极限定义为该点的电场强度。通常以 $\boldsymbol{E}$ 表示。其数学表达式为

$$\boldsymbol{E} = \lim_{\Delta q \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta q} \tag{1-1}$$

式中：Δq 为正的试验点电荷的电量，在国际单位制（SI）中，电量的单位为库仑（C）；$\Delta \boldsymbol{F}$ 为正的试验点电荷所受的电场力，单位为牛顿（N）。因而电场强度的单位为牛顿每库仑（N/C），在国际单位制（SI）中场强的单位为伏特每米（V/m），1V/m = 1N/C。

点电荷的电场强度　前面写出了电场强度的普遍定义式，它能反映我们研究对象的特征，然而从研究问题的方法来说，应该从这一普遍定义式出发，去研究某些具体的电场，看看从它们具体的场强表达式中，能给我们什么样的启示，然后，再回到问题的普遍性上来，研究它们所具有的规律。

在物理学中，根据库伦定律，导出了点电荷电场强度的普遍表达式

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \boldsymbol{R}^0 \qquad (1\text{-}2)$$

式中：$\boldsymbol{R}^0$ 为从点电荷 q 指向场中任意被研究点 A 的单位矢量。

应该指出的是，与库仑定律一样，这一表达式只适用于点电荷的情况。然而我们没有必要拘泥于数学上关于点的概念。在数学中的“点”没有大小而仅有几何位置。在实际问题中，只要判定带电体的几何尺寸远小于带电体至被研究点的距离时，不管带电体的形状如何，均可认为式（1-2）成立。亦即物理意义下的“点”是相对而言的。事实上，库仑定律就是这样建立起来的。

§1-2 电场的叠加原理

电场的叠加原理 从上节中得到了最简单的点电荷电场的场强计算公式。我们的目的，并不仅仅为了去解决点电荷场强的计算问题，而在于能将它引伸，去解决场源电荷作任意分布情况下的场强计算问题，并由此引伸出更有意义的结论来。

在物理学中已经明确指出过，“力”服从叠加原理。电场强度是单位正点电荷所受的电场力。显然，在媒质电容率与场强无关的情况下（称这种媒质为线性的），电场强度亦服从叠加原理。因而在由若干个点电荷共同激发的电场中，任一点的电场强度，等于每一个点电荷单独存在时，该点所具有的电场强度的矢量和（矢量叠加）。这一结论称之为场的叠加原理。

电荷作任意分布时电场强度的计算 静电场中的叠加原理，看上去似乎只是重复地叙述了力的矢量叠加原理。但是如果细心地去考察各种复杂的电场，我们将发现：从理论上讲，电荷作任意分布的复杂电场都可以运用叠加原理加以解决。例如：真空中，电荷沿空间某一曲线作线分布或电荷沿空间某一曲面作面分布，或电荷沿空间某一体积作体积分布时，可以将此任意分布的电荷进行无限的分割，分割后的每一无限小电荷元则可视为点电荷元。这样我们就可认为场是无限多个连续分布的点电荷元所共同激发的。利用场的叠加原理，即可求得场中每点的电场强度。

当电荷作线状分布时，为了分析方便，引入电荷线密度的概念，电荷线密度的定义为

$$\tau = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}l} \qquad (1\text{-}3)$$

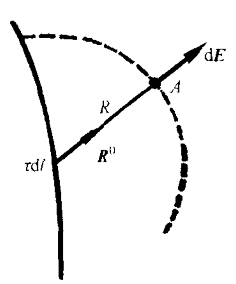

图 1-1 分布电荷的线电荷元在空间点 A 产生的场强

式中：$\mathrm{d}q$ 为线元 $\mathrm{d}l$ 上所具有的电量。因而 τ 的单位为库仑每米（C/m）。

当电荷沿空间曲线 l 连续分布时（见图 1-1），如求空间任一点的场强表达式，只需沿曲线 l 进行积分，即

$$\boldsymbol{E} = \int_l \frac{\tau \mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \boldsymbol{R}^0 \qquad (1\text{-}4)$$

式中：R 为线元 $\mathrm{d}l$ 至被研究点的距离；$\boldsymbol{R}^0$ 为线元

$\mathrm{d}l$ 指向被研究点方向上的单位矢量。

当电荷沿空间曲面作面分布时，引入电荷面密度的概念，电荷面密度 σ 的定义为

$$\sigma = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}S} \tag{1-5}$$

式中：$\mathrm{d}q$ 为面元 $\mathrm{d}S$ 上所具有的电荷量。因而，σ 的单位为库仑每平方米（$\mathrm{C/m^2}$）。当电荷沿空间曲面 S 连续分布时（见图 1-2），仿前得空间任一点的电场强度表达式为

$$\boldsymbol{E} = \int_S \frac{\sigma \mathrm{d}S}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \boldsymbol{R}^0 \tag{1-6}$$

式中：R 为面元 $\mathrm{d}S$ 至研究点的距离；$\boldsymbol{R}^0$ 为面元 $\mathrm{d}S$ 指向研究点方向上的单位矢量。

与前述的处理方法相同，当电荷在空间作体积分布时，引入电荷体密度 ρ 的定义式为

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V} \tag{1-7}$$

式中：ρ 的单位为库伦每立方米（$\mathrm{C/m^3}$）。当电荷在空间作体积分布时（见图 1-3），空间任一点的电场强度表达式为

$$\boldsymbol{E} = \int_V \frac{\rho \mathrm{d}V}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \boldsymbol{R}^0 \tag{1-8}$$

式中：R 为体积元 $\mathrm{d}V$ 至研究点的距离；$\boldsymbol{R}^0$ 为体积元 $\mathrm{d}V$ 指向研究点方向上之单位矢量。

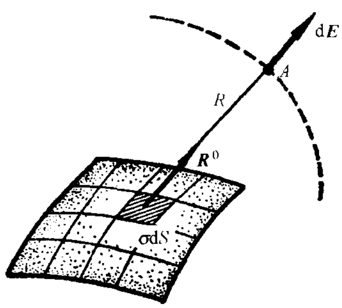

图 1-2　面分布电荷的面电荷元在空间点 A 产生的场强

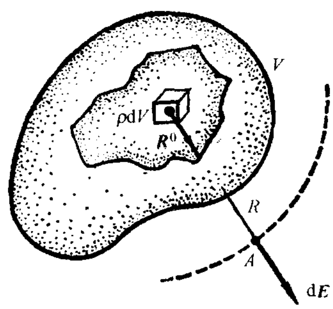

图 1-3　体分布电荷的体电荷元在空间点 A 产生的场强

这里应该明确一个问题，上面所指的“密度”，乃是平均意义下的密度概念。也就是说，电荷线密度、电荷面密度、电荷体密度的概念是假定电荷连续分布为前提的，只有如此，电荷密度的定义式才有意义。大家知道，基本电荷粒子本身所占有的体积尺度，总是远小于基本电荷粒子间距离的几何尺度，从微观上讲电荷不可能实现连续分布，因此这里引入的是平均意义下的密度概念，是从宏观的观点来研究宏观电现象的有效方法。就象天空的云彩一样，它是由彼此相隔一定距离的许多悬浮水珠组合而成，然而从大的方面来看，我们却可以认为它是连续分布的。

应该指出，式（1-4）、（1-6）、（1-8）它们在形式上似乎是简单的，然而在解决实际

问题时，往往受到客观条件的种种限制。例如我们通常很难知道实际问题中电荷的分布状态以及进行积分时会遇到数学上的困难（在许多情况下，我们虽能列出积分表达式，却无法得出积分结果）。因而从实际的观点来说它们能解决的问题是有限的。

例 1-1 真空中长度为 $2L$ 的均匀带电直线，它所带的电荷量为 q，试确定直线外任一点处的电场强度。

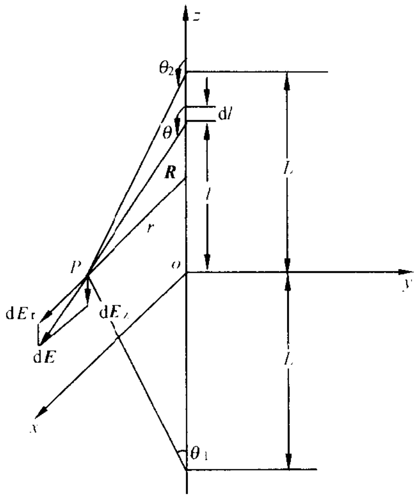

图 1-4 例 1-1 图

解 建立一直角坐标系，令 z 轴通过带电直线，坐标原点 o 重合于带电直线的中点，如图 1-4 所示。由于电场对带电直线作轴对称分布，因此研究坐标平面 xoz 上的电场分布具有普遍性。取圆柱坐标系 $\alpha=0$ 的半平面上任一点 P，令其圆柱坐标为 $(r, 0, z)$，此点即在平面 xoz 上。下面将研究场点 P 处的电场强度。

带电直线的电荷量 q 在长度 $2L$ 上均匀分布，因此直线上的线电荷密度 τ 为

$$\tau = \frac{q}{2L}$$

必须注意到各线电荷元 $\mathrm{d}q = \tau \mathrm{d}l$ 在场点 P 处场强 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 的方向是不同的。因此，一般总是先求出每一矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 在各坐标轴上的分量，把矢量之和转化为各坐标分量的代数和，或是把矢量积分转化为标量积分。

设场强 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 的 z 轴分量为 $\mathrm{d}E_z$，径向分量为 $\mathrm{d}E_r$，则有

$$\mathrm{d}E_z = \mathrm{d}E\cos\theta = \frac{\tau \mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta$$

$$\mathrm{d}E_r = \mathrm{d}E\sin\theta = \frac{\tau \mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\sin\theta$$

式中的 l、R、θ 对于不同的线电荷元都是变量，但它们是有联系的，可统一用一个变量 θ 来表示

$$R = r\csc\theta$$

$$l = z - r\mathrm{ctg}\theta$$

$$\mathrm{d}l = r\csc^2\theta \mathrm{d}\theta$$

因而点 P 处场强 $\boldsymbol{E}$ 的 z 轴分量 E_z 为

$$E_z = \int_{-L}^{L}\mathrm{d}E_z = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\tau r\csc^2\theta}{4\pi\varepsilon_0(r\csc\theta)^2}\cos\theta \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 r}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \tag{1-9}$$

场强 $\boldsymbol{E}$ 的径向分量 E_r 为

$$E_r = \int_{-L}^{L} \mathrm{d}E_r = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\tau r \csc^2\theta}{4\pi\varepsilon_0 (r\csc\theta)^2} \sin\theta \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 r}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \tag{1-10}$$

式中：r 为场点到带电直线的距离；θ_1 和 θ_2 分别是带电直线的两端点到场点的矢径方向与正 z 轴方向之间的夹角。

可以进一步看到，当 $L\to\infty$，即带电直线为无限长直线时，有 $\theta_1\to 0$，$\theta_2\to\pi$。这时，由式（1-9）和式（1-10）可得到

$$E_z = 0$$

$$E_r = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

即电场强度只有径向分量。

若保持线电荷密度 τ 不变，当 $L\to\infty$，则 $q = 2L\tau\to\infty$，因此无限长的带电直线实际上是不存在的。但是，这并不等于说，在理论上研究无限长带电直线的电场是没有实际意义的。

经过计算，当场点到带电直线的距离较之到直线两端的距离小得多时（$r\ll L$，$|Z|\ll L$)，运用无限长带电直线的场强计算公式求解该点场强，可以获得足够精确的结果。同样，经过计算，在远离长度为 $2L$ 的带电直线处（$L/r\ll 1$，$L/|Z|\ll 1$）的电场强度，相当于全部电荷量 q 集中在直线中点处的点电荷所产生的电场强度。

可以看到诸如“无限长带电直线”“点电荷”这些理想化的模型都是工程技术中常常遇到的实际问题在一定条件下抽象出来的。至于实际问题如何抽象为理想化模型，必须依据具体情况进行分析。

§1-3 电场的图示

电力线 在研究电场本身的规律或者解决实际工程问题时，都希望能够作出整个电场的电场强度分布图形。这些图形应该清楚地表示出场中各点电场强度的大小和方向。描绘电场图形的方法并非一种，其中最好的方案是法拉第所提出的以所谓电力线或场强线来描绘场的图形。电力线的作法在物理学中已作过较为详细的介绍。归纳起来有两点：

一、电力线是空间有向曲线。曲线上每点的切线方向，应该代表该点处的电场强度方向。可见电力线在空间是不能彼此相交的。因为在交点处场强方向将无法确定。由点电荷的场强公式可知，电力线只能起自正电荷而止于负电荷，它不能中断于无电荷处，也不能自行闭合。

二、通过垂直于力线的微小面元单位面积上的力线数等于该面元上的电场强度的数值。这样各点电场强度的大小，就能以电力线分布的疏密程度来表示。

必须说明，引用电力线所作的任何电场的分布图形，仅仅是一种人为的虚拟，一种借

以使电场分布形象化的假想工具，它不具有任何真实性。

我们有时还引用法拉第所提出的“力线管”的概念，这在物理学中也已提及过。

电场的形象化 引入电力线后，场的图形能帮助我们去了解和观察场所具有的规律。我们回忆物理学中观察到的电场分布图形，至少能够获得两点较为明显的印象：其一，电力线（场强矢量 $\boldsymbol{E}$ 线）是有源头的，电荷就是它的源头，确切地说正电荷是其正源头，负电荷是其负源头，因此，静电场（即电场强度矢量 $\boldsymbol{E}$ 场）为有源场；其二，电力线（场强矢量 $\boldsymbol{E}$ 线）不能自行闭合，它不是旋涡矢量线，因而静电场中既没有旋涡线，也没有旋涡点，静电场为无旋涡场，或者是无旋场。

为什么要在这里强调这些初看起来似乎比较抽象的概念呢？这是因为它是静电场自身所具有的区别于其它场（例如磁场、流速场等等）的特点。以后可以看到，正是因为静电场的这种自身特有规律，才能引出（更正确的说法是存在）另一个重要物理量——电位标量函数，而电位的引入将使静电场的研究与计算大为简化。

§1-4 真空中的高斯通量定理

电场强度通量 前面从场的分布图形谈到了静电场的特点，为了能用数学语言来精确描述它，我们将先向读者介绍有关电场强度矢量 $\boldsymbol{E}$ 的通量的概念。

凡是矢量场，均有通量可言。将电场强度 $\boldsymbol{E}$（矢量）沿任一有向曲面 S[1] 的曲面积分（见图1-5），定义为通过该曲面 S 的正向场强通量。以 Ψ_E 表之，其数学表达式为

$$\Psi_E = \int_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1-11}$$

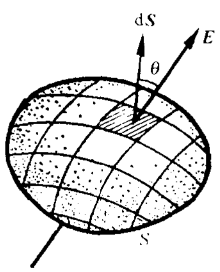

图1-5 曲面法线与场强方向夹角

场强通量的单位为伏特米（V·m）。从表达式可以看出，$\boldsymbol{E}\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 为通过面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的电力线数，因而通过曲面 S 的场强通量，即为通过曲面 S 上每一面元 $\mathrm{d}S$ 的电力线的代数和。

当曲面 S 为一闭合曲面时（见图1-5），通过此闭合曲面 S 的场强通量的表达式为

$$\Psi_E = \oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1-12}$$

可以看出电场强度为一矢量，而其通过某一曲面 S 的通量则为一标量，它是各面元通量的代数和。

真空中的高斯通量定理 有了电场强度通量的概念之后，就可以从一个大的空间范围来研究静电场的性质。

大学物理学中曾导出所谓真空中的高斯通量定理：静电场中，当媒质为真空时，通过

[1] 一般规定曲面法向矢量 $\boldsymbol{n}$ 的指向面的为正向（正侧），这种规定了正向的曲面称之为有向曲面。有向曲线所界定的曲面，亦为有向曲面。此时曲面的正向与有向曲线的绕行方向，遵循右螺旋法则。对于封闭曲面，通常规定面的外侧为正侧。沿某一有向曲面的曲面积分，即沿该曲面正向作曲面积分。

任一闭合曲面 S 的电场强度通量，等于该曲面所包含的电荷量的代数和与真空电容率 ε_0 之比。而与曲面形状及电荷在面内的分布状态无关。

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{\Sigma q}{\varepsilon_0} \tag{1-13}$$

式中：$\boldsymbol{E}$ 为相应面元 $\mathrm{d}S$ 上的电场强度，它由空间所有电荷所共同激发；Σq 为闭合曲面 S 内电荷量的代数和。

高斯通量定理用数学语言定量揭示了穿过任意闭合曲面的场强通量与曲面内电荷（源）的关系。在大的空间范围内描述了静电场的性质。它说明静电场是一个有源场。真空中的高斯通量定理又简称为真空中的高斯定理❶。

高斯通量定理除了描述静电场的特性外，在求解电场问题时，还是一个有力的工具。

例 1-2 真空中同心球面内均匀分布着体积电荷，电荷体密度为 ρ，同心球面内外半径分别为 R_1 和 R_2。试求球层内外的电场强度。

解 电荷分布为球对称，对于区域 $R < R_1$，电场强度显然为零，即 $E_1 = 0$。

对于区域 $R_1 < R < R_2$，任意作半径为 R 的同心球面 S，在面 S 上各点处电场强度 $\boldsymbol{E}_2$ 的大小相等，方向沿径向，由高斯定理有

$$\oint_S \boldsymbol{E}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = E_2 \oint_S \mathrm{d}S = 4\pi R^2 E_2 = \frac{q_r}{\varepsilon_0}$$

面 S 所包围电荷量 $q_r = \frac{4\pi}{3}(R^3 - R_1^3)\rho$。因此得

$$E_2 = \frac{\frac{4\pi}{3}\rho(R^3 - R_1^3)}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

场强方向沿径向。同理，在区域 $R > R_2$ 即球层以外，有 $E_3 = \frac{q_r}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$，这时 $q_r = \frac{4\pi}{3}(R_2^3 - R_1^3)\rho = q$，$q$ 为球层中全部电荷量。因此得

$$E_3 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

可以看出球层以外的电场分布，同全部电荷量 q 集中于球心的点电荷的情形一样。

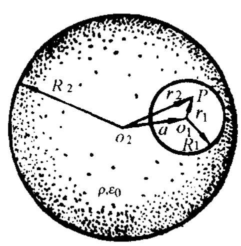

图 1-6 例 1-3 图

例 1-3 真空中有一球形体积分布的电荷，球的半径为 R_2，电荷体密度为常数 ρ，球内存在一个半径为 R_1 的球形空腔，两球心距离为 a，且 $a + R_1 < R_2$。试证明球形空腔内的电场是均匀的。

证 由于电荷的分布不对称，初看起来难以直接运用高斯定理，但若将球形空腔填满体电荷 ρ，则变成上例中的情况，可得出

❶ 有的书上称高斯定律。类似情况，本书后面讨论的安倍环路定理、全电流定理，常称安倍环路定律，全电流定律。

半径为 R_2 的球体内各点的场强

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho \boldsymbol{r}_2}{3\varepsilon_0}$$

$\boldsymbol{r}_2$ 为球心 o_2 至场点 P 的矢径。

要保证电荷分布的实际情况不变的话，可以单独在半径为 R_1 的球体内再填充体密度为 $-\rho$ 的体积电荷，两种电荷分布的叠加显然使得该球体内不带电荷。

单独考虑填充了 $-\rho$ 的 R_1 球体内，显然有

$$\boldsymbol{E}_1 = \frac{-\rho \boldsymbol{r}_1}{3\varepsilon_0}$$

$\boldsymbol{r}_1$ 为球心 o_1 至半径为 R_1 的球体内场点 P 的矢径。

因此，取球形空腔内任一点 P，它的场强为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 = \frac{-\rho \boldsymbol{r}_1}{3\varepsilon_0} + \frac{\rho \boldsymbol{r}_2}{3\varepsilon_0} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)$$

若记 o_2 至 o_1 的矢径为 $\boldsymbol{a}$，其大小为 a，则有 $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{a}$。因此球形空腔内任一点处的电场强度 $E_1 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{a}$，其大小、方向均相同。

当 $a + R_1 > R_2$ 时，就不能运用高斯定理计算。

§1-5 电介质中的高斯通量定理

上节得到的是真空中静电场的高斯定理，但在一般情况下，电场并不总是处在真空中，而是可能存在于各种不同媒质中。因此，应该研究这一更为普遍的情况，看看静电场是否仍然具有上述性质。我们可以预先指出，静电场是有源场这一特性不会改变，只是当外界媒质条件改变时，高斯定理应作量方面的修改。

电介质边缘束缚电荷对电场的影响 若在电容率为 ε_0 的真空媒质中，放入其它电介质，在电场的作用下，电介质将受到极化，其分子的正、负电荷等效中心将受到电场力的影响而产生一微小位移，亦即形成电偶极子。在均匀介质内部，由于任一分子的束缚正电荷移动一微小距离后，另一相邻分子的束缚正电荷，也同样移动一微小距离至前一分子原束缚正电荷的位置(即对前一分子正电荷的等效中心进行填补)[见图 1-7(b)]，因而在均匀介质内部仍然呈现中性，但在不同介质的左、右两侧边缘处，则附着了过剩的或正或负的束缚电荷❶。

在此可以看到，当电场中有均匀介质存在时，在介质的边缘处，将出现束缚电荷。这种束缚电荷的出现，将影响到原来电场的大小和分布。也就是说，不同介质交界边缘处的过剩束缚电荷，也将产生电场（称为附加电场），它叠加到原来的电场上，使原来的电场

---

❶ 象物理学中曾经读过的那样，这里的所谓正、负电荷，都运用了电介质中分子正、负电荷等效中心的概念。以下同。