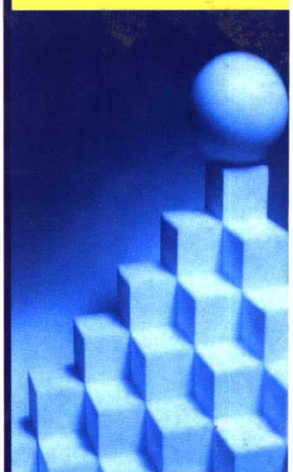
21世纪 自学·复习·考研系列丛书

高等数学试题精选与答题技巧

新大纲
新题型
新思路



GAODENG SHUXUE SHITI JINGXUAN
YU DATI JIQIAO

杨克劭 主编

哈尔滨工业大学出版社

21 世纪自学·复习·考研系列丛书

高等数学试题精选与答题技巧

杨克劭 主编

哈尔滨工业大学出版社
哈尔滨

内 容 提 要

本书包括工学、经济学、管理学门类各学科专业报考硕士研究生数学考试内容中《高等数学》部分的全部内容，其中有函数、极限、连续；一元函数微分学；一元函数积分学；向量代数和空间解析几何；多元函数微分学；多元函数积分学；无穷级数；常微分方程等。本书是对考研和学习《高等数学》课的大学生有较大指导意义的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学试题精选与答题技巧/杨克劭主编.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2001.7

ISBN 7-5603-1635-2

Ⅰ.高... Ⅱ.杨... Ⅲ.高等数学-高等学校-解题 Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 045498 号

出版发行	哈尔滨工业大学出版社
社　　址	哈尔滨市南岗区教化街 21 号　邮编 150006
传　　真	0451—6414749
印　　刷	地矿部黑龙江测绘印刷中心印刷厂
开　　本	787×1092　1/16　印张 21.25　字数 516 千字
版　　次	2001 年 7 月第 1 版　2001 年 7 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 7-5603-1635-2/O·121
印　　数	1~5 000
定　　价	26.00 元

出版者的话

亲爱的读者，您一定想知道《高等数学试题精选与答题技巧》一书的写作背景和它的作者吧！我们尽力让您如意。以使您在名师名作的指点下，树立信心，理清思路，拔高过关，实现理想。

杨克劭：1934 年生于四川省，1956 年毕业于兰州大学数学系，同年分配到哈尔滨工业大学任教。1978 年晋升为副教授，并被评为黑龙江省优秀教师，1980 年再度评为黑龙江省高等学校优秀教师。1988 年晋升为教授，1989 年获黑龙江省优秀教学成果二等奖，1997 年获哈尔滨工业大学海王奖，评为首届基础教学带头人，并被聘为哈尔滨工业大学第一届本科教学委员会委员。杨克劭教授教学严谨、成绩卓著，是深受广大学生欢迎的优秀教师，2000 年被哈工大学生评为“我们心目中的优秀教师”第一名。尤其要指出的是，杨克劭教授每年都担任哈尔滨工业大学高等数学考研辅导班的教学任务，对高等数学考研辅导有非常丰富的经验。

杨克劭教授深入开展教学研究，他编写的《高等数学》和《矩阵分析》(研究生用)等教材，在教学过程中收到了良好的效果，此次特邀杨克劭教授编写的《高等数学试题精选与答题技巧》一书，是他几十年讲授《高等数学》课程的经验总结和升华，深信在考研辅导和学生复习中将起到画龙点睛、抛砖引玉之作用。

祝您扬起理想的风帆，在高等数学的海洋中，乘风破浪，驶向目标港。

乘风破浪会有时，直挂云帆济沧海！

哈尔滨工业大学出版社

2001 年 7 月

ΛΚ34102

前　言

《高等数学》是多数高等学校和科研院所招收硕士研究生的重要考试科目，亦是大学一年级学生所学课程中难度较大的基础理论课。考研之时，已在学完《高等数学》3 年之后，而且要求达到更高的水平，其难度可想而知。作者汇集了多年从事《高等数学》教学、考研辅导和评阅考研试卷的经验，编写了这本考研复习用书。本书既可作为《高等数学》考研教材，也可作为大学生学习《高等数学》的参考书。本书的特点是：

1. 每章开头均介绍了考试内容与考试要求，由此可以了解《高等数学》中，哪些内容要求，哪些内容不要求，哪部分考试要求高，哪部分考试要求相对低一些，以便学生复习时做到心中有数。

2. 根据每章内容的特点及考试要求，均归纳为几个专题阐述，帮助考生总结。

3. 在叙述基本概念、基本理论和基本计算方法的同时，指出了应注意的问题（我们认为“三基”内容是重要的，特殊技巧是次要的），以帮助考生掌握要点，达到基本要求。

4. 本书结合考试内容与考试要求，精选了 500 多个例题和 400 多个习题，例题均有详细解答过程，习题均附有可供参考的提示或答案。另外，这些例题和习题还有以下特点：包含了 1987 ~ 2001 年考研试题中综合性强、新颖性好的试题；为了开阔思路，有的例题还给出了多种解法；对某些涉及面较宽的内容，帮助考生归纳出解题的主要步骤，应试时见到这类题不用再思考即知第一步该做什么，第二步该做什么，……极具参考价值，是不可多得的指导性参考书。

参加本书编写的有杨克劭、白红、王维生、包革军等，全书由杨克劭主编。由于编者们的水平所限及完稿时间仓促（为了赶上 2002 年考研同学使用），疏漏之处在所难免，欢迎批评指正。

编　者

2001 年 7 月于哈尔滨工业大学

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

第一章　函数 极限 连续

考试内容

函数的概念及表示法　函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性　复合函数、反函数、分段函数和隐函数　基本初等函数的性质及其图形　初等函数　简单应用问题函数关系的建立　数列极限与函数极限的定义以及它们的性质　函数的左极限与右极限　无穷小和无穷大的概念及其关系　无穷小的性质及无穷小的比较　极限的四则运算　极限存在的两个准则:单调有界准则和夹逼准则　两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

函数连续的概念　函数间断点的类型　初等函数的连续性　闭区间上连续函数的性质(最大值、最小值定理和介值定理)

考试要求

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示方法,并会建立简单应用问题中的函数关系式。
2. 了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性。
3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念。
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形。
5. 理解极限的概念,理解函数左极限与右极限的概念以及极限存在与左、右极限之间的关系。
6. 掌握极限的性质及四则运算法则。
7. 掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限,掌握利用两个重要极限求极限的方法。
8. 理解无穷小、无穷大的概念,掌握无穷小的比较方法,会用等价无穷小求极限。
9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型。
10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,了解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值、最小值定理和介值定理),并会应用这些性质。

〈注〉　这一部分的考试内容,对数学一、二、三、四四种试卷基本上是相同的。而考试要求中的5、6、7、8项,数学三、四两种试卷都降低了一个层次,请选择这两种试卷的考生注意。

一 函 数

函数是高等数学的研究对象，因此，可以说有关函数的基本知识在每个试题中几乎都要用到，但在以往的考研试题中，专门考查函数基本知识的试题不多，当然不能就此来判断函数的基本知识是否重要。

以下的函数基本知识必须掌握：

1. 如不特别声明，高等数学只在实数范围内讨论问题。

2. 两个变量之间有了确定的值的对应关系才能称为函数关系，而且高等数学只讨论单值函数。

3. 在高等数学中，常见的函数的表示形式有以下六种：显函数（含分段函数）；隐函数；参数方程表示的函数；用极限形式表示的函数；用带有可变上限的定积分表示的函数；用函数项级数表示的函数等。我们对这些不同形式表示的函数要“一视同仁”，同等对待。

4. 要研究函数，必须首先知道它的定义域。求函数的定义域有以下规则：零不能作除数；负数不能开平方；正数才能取对数；若函数的表达式由几项组成，则其定义域应是各项自变量取值集合的交集；若函数有明确的几何意义或物理意义，求定义域时必须考虑。

5. 若函数 $y=f(x)(x\in I)$ 的函数值既有上界，也有下界，则称 $f(x)$ 是有界函数，可表示为

$$|f(x)|\leqslant M \qquad (M>0)$$

或

$$m_1\leqslant f(x)\leqslant m_2$$

其中 M、m_1、m_2 为常数。在“有界”意义下，这两种表示法是等价的。

只有上（下）界的函数，不能称为有界函数，只能称为有上（下）界的函数。

有上（下）界的函数，就有无穷多个上（下）界，但最小（大）的上（下）界只有一个，且这个最小（大）的上（下）界，也可能属于这个函数的值域，也可能不属于这个函数的值域。

6. 单调增加函数与单调减少函数统称为单调函数。

单调增加（减少）函数的反函数也是单调增加（减少）函数。

非单调函数也可能存在单值的反函数。

非单调的连续函数存在单调区间。

非单调的函数也可能不存在单调区间。

7. 只有定义在与原点对称的数集上的函数才有可能讨论其奇偶性，但它不一定就具有奇偶性，不过它总可以表示为一个偶函数与一个奇函数的和，即

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

等式右端的第一项是偶函数，第二项是奇函数，且可以证明这种表示是惟一的。

两个偶（奇）函数的和仍是偶（奇）函数。

两个偶（奇）函数的积是偶函数。

一个偶函数与一个奇函数的积是奇函数。

8. 凡是能使等式

$$f(x+T)=f(x) \quad (T>0\text{为常数})$$

对所有 x 恒成立的函数 $f(x)$ 称为周期函数。

周期函数不一定有最小正周期。

9. 函数 $y=f(u)$、$u=g(x)$ 要能构成复合函数 $y=f(g(x))$，要求 $f(u)$ 的定义域与 $g(x)$ 的值域的交集不是空集。

10. 幂函数、三角函数、反三角函数、指数函数、对数函数等五类函数统称为基本初等函数，对它们的各种性质必须熟练掌握。

11. 基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合组成的函数称为初等函数。

12. 要求能熟练且准确地运用函数记号 $f(\quad)$ 处理问题。

【例 1】　函数

$$D(x)=\begin{cases}1 & x\text{为无理数}\\ 0 & x\text{为有理数}\end{cases}$$

是有界函数，不单调，且无单调区间，是偶函数，是没有最小正周期的周期函数，因为当 T 是有理数时，有

$$D(x)=D(x+T)$$

而正有理数无最小值。

【例 2】　(1988(一)5 分)　已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f(\varphi(x))=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$，并写出它的定义域。

【解】　由 $f(\varphi(x))=e^{\varphi^2(x)}=1-x$ 有，$\varphi^2(x)=\ln(1-x)$。又因 $\varphi(x)\geqslant 0$，故 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，所以 $\varphi(x)$ 的定义域为 $x\leqslant 0$。

【例 3】　(1990(一)3 分)　设

$$f(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$$

则 $f(f(x))=$ __1__。(因为 $|f(x)|\leqslant 1$)

(2001(二)3 分)　设

$$f(x)=\left\{\begin{matrix}1 & |x|\leqslant 1\\ 0 & |x|>1\end{matrix}\right\}$$

则 $f(f(f(x)))$ 等于　[B]

A. 0　　B. 1　　C. $\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$　　D. $\begin{cases}0 & |x|\leqslant 1\\ 1 & |x|>1\end{cases}$

【例 4】　(1992(三)3 分)　设

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x\leqslant 0\\ x^2+x & x>0\end{cases}$$

则　[D]

A. $f(-x)=\begin{cases}-x^2 & x\leqslant 0\\ -(x^2+x) & x>0\end{cases}$ B. $f(-x)=\begin{cases}-(x^2+x) & x<0\\ -x^2 & x\geqslant 0\end{cases}$

C. $f(-x)=\begin{cases}x^2 & x\leqslant 0\\ x^2-x & x>0\end{cases}$ D. $f(-x)=\begin{cases}x^2-x & x<0\\ x^2 & x\geqslant 0\end{cases}$

【例 5】 (1997(二)3 分) 设

$$g(x)=\begin{cases}2-x & x\leqslant 0\\ x+2 & x>0\end{cases}\qquad f(x)=\begin{cases}x^2 & x>0\\ -x & x\geqslant 0\end{cases}$$

则 $g[f(x)]=$ [D]

A. $\begin{cases}2+x^2 & x<0\\ 2-x & x\geqslant 0\end{cases}$ B. $\begin{cases}2-x^2 & x<0\\ 2+x & x\geqslant 0\end{cases}$

C. $\begin{cases}2-x^2 & x<0\\ 2-x & x\geqslant 0\end{cases}$ D. $\begin{cases}2+x^2 & x<0\\ 2+x & x\geqslant 0\end{cases}$

【例 6】 证明 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})(x\in(-\infty,+\infty))$ 是奇函数。

【证】 $f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=\ln\dfrac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}+x}=$

$$\ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x)$$

故 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 是奇函数。

【例 7】 设 $f(x)$ 是奇函数,且

$$F(x)=f(x)\left(\frac{1}{a^x+1}-\frac{1}{2}\right)$$

其中 a 为不等于 1 的正常数,则函数 $F(x)$ 是 [A]

A. 偶函数 B. 奇函数

C. 非奇、非偶的函数 D. 奇偶性与 a 有关的函数

事实上

$$F(-x)=f(-x)\left(\frac{1}{a^{-x}+1}-\frac{1}{2}\right)=-f(x)\left(\frac{a^x}{1+a^x}-\frac{1}{2}\right)=$$

$$-f(x)\left(1-\frac{1}{1+a^x}-\frac{1}{2}\right)=f(x)\left(\frac{1}{1+a^x}-\frac{1}{2}\right)=F(x)$$

【例 8】 $\sin\dfrac{1}{x}$、$\sin\sqrt{x}$、$\sin x^2$ 等不是周期函数。

【例 9】 设 $y=f(x)$ 的图形与直线 $x=a$、$x=b$ 均对称,求证 $y=f(x)$ 是周期函数。

【证】 由 $y=f(x)$ 的图形与直线 $x=a$、$x=b$ 均对称,于是有 $f(a+x)=f(a-x)$、$f(b+x)=f(b-x)$。为确定起见,且不失一般性,设 $b>a$,于是有

$$f(x)=f[a+(x-a)]=f[a-(x-a)]=f(2a-x)=$$

$$f[b+(2a-x-b)]=f[b-(2a-x-b)]=f[x+2(b-a)]$$

因 $2(b-a)$ 是一正常数,故 $y=f(x)$ 是周期函数。

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

【例 10】　求 $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$ 的反函数,并求其定义域。

【解】　$y^3=x+\sqrt{1+x^2}+3(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{2}{3}}(x-\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{3}}+$

$3(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{3}}(x-\sqrt{1+x^2})^{\frac{2}{3}}+x-\sqrt{1+x^2}=$

$2x+3(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{3}}(x-\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{3}}[(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{3}}+$

$(x-\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{3}}]=2x+3(-1)^{\frac{1}{3}}y=2x-3y$

得

$$x=\frac{1}{2}(y^3+3y)$$

即所求反函数为

$$y=\frac{1}{2}(x^3+3x)$$

其定义域为 $x\in(-\infty,+\infty)$。

【例 11】　非单调函数 $f(x)=\begin{cases}-x & -1\leqslant x\leqslant 0\\ x+1 & 0<x\leqslant 1\end{cases}$ 存在单值的反函数。

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}-x & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x-1 & 1<x\leqslant 2\end{cases}$$

【例 12】　已知 $f(x+\frac{1}{x})=\frac{x^3+x}{x^4+4x^2+1}$,则 $f(x)=\underline{\frac{x}{x^2+2}}$。

事实上

$$f(x+\frac{1}{x})=\frac{x^3+x}{x^4+4x^2+1}=\frac{x+\frac{1}{x}}{x^2+4+\frac{1}{x^2}}=\frac{x+\frac{1}{x}}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2}$$

所以

$$f(x)=\frac{x}{x^2+2}$$

【例 13】　设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有定义,且 $a>0,b>0$,若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调减少,证明

$$f(a)+f(b)\geqslant f(a+b)$$

【证】　由 $\frac{f(x)}{x}$ 单调减少,有

$$\frac{f(a)}{a}\geqslant\frac{f(a+b)}{a+b}\qquad\frac{f(b)}{b}\geqslant\frac{f(a+b)}{a+b}$$

即

$$(a+b)f(a)\geqslant af(a+b)\qquad(a+b)f(b)\geqslant bf(a+b)$$

相加,得

$$(a+b)[f(a)+f(b)]\geqslant(a+b)f(a+b)$$

消去 $a+b$,即得

$$f(a)+f(b)\geqslant f(a+b)$$

【例 14】 设函数 $f(x)$、$g(x)$ 均在$[0,1]$上有定义，证明：存在 $x_1,x_2\in[0,1]$，使得

$$|x_1x_2-f(x_1)-g(x_2)|\geqslant\frac{1}{4}$$

【证】 反证：设 $\forall x_1,x_2\in[0,1]$ 都有

$$|x_1x_2-f(x_1)-g(x_2)|<\frac{1}{4}$$

则应有

$$|f(1)+g(0)|<\frac{1}{4}\qquad|f(0)+g(1)|<\frac{1}{4}\qquad|f(0)+g(0)|<\frac{1}{4}$$

于是由

$$|1-f(1)-g(1)|\geqslant 1-|f(1)+g(1)|\geqslant 1-|f(1)+g(0)|-$$
$$|-g(0)-f(0)|-|f(0)+g(1)|>\frac{1}{4}$$

与假设矛盾，故所要证的结论成立。

习　题　1.1

1. $f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}(-\infty<x<+\infty)$ 是____。

A. 有界函数　　B. 单调函数

C. 周期函数　　D. 偶函数

答　D

2. 设函数 $f(x)=x\tan xe^{\sin x}$，则 $f(x)$ 是____。

A. 偶函数　　B. 无界函数

C. 周期函数　　D. 单调函数

答　B

3. 已知 $f(x)=\sin x$，$f(\varphi(x))=1-x^2$，则 $\varphi(x)=$ ____________的定义域为____________。

答　$\varphi(x)=\arcsin(1-x^2)$，定义域为$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

4. 下列函数是否相等？为什么？

(1) $y=\frac{x^2}{x}$ 与 $y=x$　　(2) $y=x$ 与 $y=(\sqrt{x})^2$

(3) $y=2\ln x$ 与 $y=\ln x^2$　　(4) $y=x^2+1$ 与 $u=t^2+1$

答　(1)、(2)、(3) 不是；(4) 是

5. 设 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上是奇函数，$f(1)=a$，且对于任何 x 值均有 $f(x+2)=f(x)+f(2)$。

(1) 试用 a 表示 $f(2)$ 与 $f(5)$。

(2) 问 a 取什么值时，$f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数。

答　(1) $f(2)=2a$，$f(5)=5a$　　(2) $a=0$

6. 设 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 是有相同定义域的单调增加函数，且 $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$。证明

$$f(f(x)) \leqslant g(g(x)) \leqslant h(h(x))$$

7. 函数 $y = \log_4 2 + \log_4 \sqrt{x}$ 的反函数是____________。

答　$y = 4^{2x-1}$

二　极　限

函数的变化是由自变量的变化引起的，而极限正是研究在自变量给定的变化情形下函数的变化趋势。高等数学中的连续性、导数、定积分、级数的收敛与发散等基本概念都是用极限来定义的。极限的理论是高等数学理论的基础，极限的运算规则是高等数学中很多计算方法的依据，特别是极限这种处理问题的思想方法所体现的辩证思想给我们以启迪。当我们要求某个存在的量(常量)时，如果初等数学方法已不能奏效，我们可以构造一个变量，让它在变化过程中去无限接近我们要求的那个量，以致最终将它求出来。由此可见，极限在高等数学中的地位与作用是多么重要。

以下的基本知识必须掌握：

1. 理解极限定义的"ε, N"、"ε, δ"、"ε, X"语言

以数列极限定义为例：

"对任给 $\varepsilon > 0$，存在序号 N，当 $n > N$ 时，恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$ 成立"，则称常数 a 为数列 $\{x_n\}$ 在 $n \to +\infty$ 时的极限，记为

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = a$$

这里任给 $\varepsilon > 0$，当然可以理解为无论多么小，只要 $n > N$，即 n 充分大时，x_n 与 a 的接近程度比 ε 还要小，可见极限关键在于 $n > N$ 后的变化趋势，而 $n < N$ 时，x_n 与 a 可能相差甚远。

【例 1】 (1999(二)3 分) "对任意的 $\varepsilon \in (0,1)$，总存在正整数 N，当 $n \geqslant N$ 时，恒有 $|x_n - a| \leqslant 2\varepsilon$"是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的。 [C]

A. 充分条件，但非必要条件　　B. 必要条件，但非充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既非充分条件，又非必要条件

这里的叙述与数列极限定义比较，对任意的 $\varepsilon \in (0,1)$ 与对任给 $\varepsilon > 0$ 是相当的，而 $n \geqslant N$ 比定义中多了一个等号，显然，由于 N 不是惟一的，若取 $N_0 = N - 1, n > N_0$，即有 $n \geqslant N$，至于 $|x_n - a| \leqslant 2\varepsilon$，这里既多了个等号，且 ε 还乘了 2，由于 $\varepsilon > 0$ 是任给的，若给 $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{3}$，则

$$|x_n - a| \leqslant 2\varepsilon = \frac{2}{3}\varepsilon_0 < \varepsilon_0$$

显然 ε_0 也是任给的正数，这与定义中 $|x_n - a| < \varepsilon$ 相当，所以它是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的充要条件。

【例 2】 已知 $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$，求证 $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = a$。

【证】 由 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ 可知,对任给 $\varepsilon > 0$,存在序号 N_1,当 $n > N_1$ 时,恒有 $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ 成立。又

$$\left|\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} - a\right| \leqslant \frac{|(x_1 - a) + \cdots + (x_{N_1} - a)|}{n} + \frac{|x_{N_1+1} - a| + \cdots + |x_n - a|}{n} < \frac{|(x_1 - a) + \cdots + (x_{N_1} - a)|}{n} + \left(1 - \frac{N_1}{n}\right)\frac{\varepsilon}{2}$$

取 $N_2 = \left[\frac{2}{\varepsilon}|(x_1 - a) + \cdots + (x_{N_1} - a)|\right]$,$N = \max(N_1, N_2)$,则当 $n > N$ 时,恒有

$$\left|\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

故有

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = a \tag{1}$$

【注】 ① $a = +\infty$ 结论亦成立;② 命题的逆命题不成立,例如 $x_n = (-1)^n$。

【例 3】 若 $x_n > 0$,且 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$,则

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = a \tag{2}$$

【证】

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln(x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln x_1 + \ln x_2 + \cdots + \ln x_n}{n}} = e^{\ln a} = a$$

【例 4】 若 $a_n > 0$,且 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = a$,则

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} \tag{3}$$

但逆命题不成立。

【证】 在式(2) 中,令 $x_1 = a_1, x_2 = \frac{a_2}{a_1}, \cdots, x_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$,于是 $\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = \sqrt[n]{a_n}$,又 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = a$,所以式(3) 成立。

逆命题不成立,例如

$$a_n = \begin{cases} 1 & n \text{ 为奇数} \\ 2 & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$,但 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$ 不存在。

【例 5】 在式(3) 中,令 $a_n = \frac{n!}{n^n}$,则有

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e} \tag{4}$$

事实上,由于此时

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{n^n}\cdot\frac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!}=\lim_{n\to+\infty}(\frac{n-1}{n})^{n-1}=$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(1-\frac{1}{n})^n}{1-\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}[(1-\frac{1}{n})^{-n}]^{-1}=\frac{1}{\mathrm{e}}$$

又$\sqrt[n]{a_n}=\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$,所以式(4)成立。

2. 极限定义的等价命题

$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$ 等价于 $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n-a)=0$ 等价于 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_{2n-1}=\lim\limits_{n\to+\infty}x_{2n}(=a)$;
$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 等价于 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-A]=0$ 等价于 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)(=A)$;
$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 等价于 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-A]=0$ 等价于 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)(=A)$。

极限定义等价形式的多样性为解题提供了方便,若 $x=x_0$是分段函数 $y=f(x)$的分段点,要求$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$只能分别求出左极限$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$与右极限$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$,才知道$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$是否存在。对于区间$(a,b)$的端点 a 只能讨论右极限、端点 b 只能讨论左极限。

【例 6】 求证 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$。

【证】 只需证 $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[n]{n}-1)=0$,为此令$\sqrt[n]{n}-1=\alpha_n>0$,于是

$$n=(1+\alpha_n)^n=1+n\alpha_n+\frac{n(n-1)}{2!}\alpha_n^2+\cdots+\alpha_n^n>\frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2$$

由此可得

$$0<\alpha_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

所以$\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[n]{n}-1)=0$,即$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$。

由此及式(1)可得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=1$$

【例 7】 (1991(五)3 分) 设数列的通项为

$$x_n=\begin{cases}\dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n} & 若\ n\ 为奇数\\[2ex] \dfrac{1}{n} & 若\ n\ 为偶数\end{cases}$$

则当 $n\to+\infty$ 时,x_n 是　[D]

A. 无穷大量　　B. 无穷小量
C. 有界变量　　D. 无界变量

事实上,由于$\lim\limits_{n\to+\infty}x_{2n-1}=+\infty$,$\lim\limits_{n\to+\infty}x_{2n}=0$,因此数列不是无穷大量,不是无穷小量,也不是有界变量,是无界变量。

【例8】 (1992(一)3分) 当 $x\to 1$ 时,函数$\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限。 [D]

A. 等于2 B. 等于0

C. 为 ∞ D. 不存在,但不为 ∞

事实上,因为

$$\lim_{x\to 1-}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1-}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=0$$

$$\lim_{x\to 1+}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1+}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$$

所以 $x\to 1$ 时,函数$\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限不存在,但它不是无穷大量。

【例9】 (2000(一)5分) 求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$

【解】 $$\lim_{x\to 0-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=2-1=1$$

$$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0+}\left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=0+1=1$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=1$$

3. 函数有界是函数极限存在的必要条件

若 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ 存在,则$\{x_n\}$ 有界;

若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,则$f(x)$只在 $x=x_0$点的去心邻域上有界,而不是$f(x)$在其定义域上有界;

若$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在,则$f(x)$只在 $|x|$ 充分大时有界,而不是$f(x)$在其定义域上有界。

除了数列极限外,一般函数极限存在,要特别强调是“局部有界”。

【例10】 已知 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=b$, $c_n=\dfrac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}$,求 $\lim\limits_{n\to+\infty}c_n$。

【解】 $c_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_{n-k+1}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-a)b_{n-k+1}+\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}ab_{n-k+1}$,由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=b$,故存在$M>0$,有 $|b_n|\leqslant M$,又 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$,有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-a)=0$,于是 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k-a|=0$,又

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k-a)b_{n-k+1}\right|\leqslant M\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|x_k-a|\right]$$

所以

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com