DEA

理论、方法与应用

盛昭瀚　朱　乔　吴广谋　著

科 学 出 版 社

DEA理论、方法与应用

盛昭瀚　朱　乔　吴广谋著

科学出版社

1996

内 容 简 介

DEA 方法是近年发展起来的一种新的行之有效的系统分析方法.

本书简明扼要地介绍了 DEA 方法的基本原理和模型、主要命题及在几个方面的典型应用. 主要内容包括 DEA 的基本概念和思想，基本 DEA 模型及扩展 DEA 模型，DEA 方法与规模效益等重要经济概念之间的关系，DEA 应用的一般程序及 DEA 的新发展.

本书可供从事经济管理、系统工程、决策分析等工作的工程技术人员、社会科学工作者，大专院校有关专业的师生阅读.

DEA 理论、方法与应用

盛昭瀚 朱 乔 吴广谋 著

责任编辑 毕 颖

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

北京科地亚印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1996 年 11 月第一版 开本：850×1168 1/32

1996 年 11 月第一次印刷 印张：12 1/8

印数：1—1300 字数：317 000

ISBN 7-03-005196-3/O・851

定价：25.00 元

序

自1978年第一个DEA模型——C^2R模型问世以来，DEA方法无论在理论研究还是在实际应用方面都有迅速的发展．事实证明，DEA方法已成为管理科学、系统工程和决策分析、评价技术等领域一种常用和重要的分析工具和手段．

魏权龄教授于1987年所著的《评价相对有效性的DEA方法》对于在国内普及和推广DEA方法起了积极和重要的作用．近年来，国内学者关于DEA方法的研究和应用日渐增多，并取得多方面的成果，但从总体上讲，与DEA的作用和意义相比，这一方法在国内尚未得到充分的重视，不少专业人员对这一方法还不太了解和熟悉，有些应用也欠准确．出现这种情况的原因是多方面的，其中重要的一点就是DEA方法的一些基本概念比较抽象，应用又涉及较多的知识领域．因此，围绕着DEA方法的核心思想，以尽可能精炼的材料介绍DEA方法的基本原理和模型、主要命题及在各个方面的典型应用，并且把相关的实际背景表述、解释清楚，对我们了解和掌握基本的DEA方法，提高我们管理工作和系统分析的能力和水平是有积极作用的．

基于这一出发点，根据我们近年来所从事的关于DEA方法的教学、研究以及应用实践，选择了若干基本内容，编写了这本书．全书主要分为二大部分，第一部分包括必要的基本概念、DEA基本思想、基本的和扩展的DEA模型、DEA方法与规模效益等重要经济概念之间的关系等．第二部分包括DEA应用的一般程序、DEA方法在一些领域中的应用实例等．

本书还介绍了在应用DEA方法时对一些问题的处理．

考虑到部分读者阅读本书的方便，我们把线性规划的基本内容和DEA方法计算机程序说明作为本书的附录．

在写作本书时，我们努力用不太长的篇幅使读者了解 DEA 是什么和怎么用，但由于时间和水平所限，疏漏和不周之处还望读者赐教.

胡执中教授审阅了本书书稿，在此深表谢忱.

作者

1994 年 2 月

目　录

第一章 引 论

数据包络分析（Data Envelopment Analysis，简称 DEA）是著名运筹学家 A. Charnes 和 W. W. Cooper 等学者在**“相对效率评价”**概念基础上发展起来的一种新的系统分析方法. 自 1978 年第一个 DEA 模型——C^2R 模型建立以来，有关的理论研究不断深入，应用领域日益广泛，可以说，DEA 现已成为管理科学与系统工程领域一种重要而有效的分析工具.

由于当初 DEA 方法的诞生和目前的应用都比较深入地涉及到一些生产和经济问题，因此，在本书开始之际，简要地向读者介绍一些基本的经济理论和生产理论是必要的.

§1.1 决策单元

一个经济系统或一个生产过程可以看成是一个人（一个单元）在一定可能范围内，通过投入一定数量的生产要素并产出一定数量的“产品”的活动. 虽然这种活动的具体内容各不相同，但其目的都是尽可能地使这一活动取得最大的“效益”. 由于从“投入”到“产出”需要经过一系列决策才能实现，或者说，由于“产出”是决策的结果，所以这样的人（单元）被称为**决策单元**（Decision Making Units，DMU）. 因此，可以认为，每个 DMU（第 i 个 DMU 常记作 DMU_i）都代表或表现出一定的经济意义，它的基本特点是具有一定的输入和输出，并且在将输入转化成输出的过程中，努力实现自身的决策目标.

DMU 的概念是广义的，它可以是一个企业，这时投入为厂房资金、设备、原材料、技术与管理人员等，产出为各种产品；如果是大学，则校舍、设备、教育经费与教职员工等为投入，培养

的各种专门人才与科研成果为产出；就是某种产品本身也可视为DMU，例如成本是它的投入，质量指标、售价等是它的产出.

按照系统的语言，“投入”常称为“输入”，“产出”常称为“输出”. 这样，一个DMU就是一个将一定“输入”转化为一定“输出”的实体.

在许多情况下，我们对多个同类型的DMU更感兴趣，所谓同类型的DMU，是指具有以下三个特征的DMU集合：

1. 它们具有相同的目标和任务；
2. 它们具有相同的外部环境；
3. 它们具有相同的输入和输出指标.

根据这三个特征，我们就不能把工厂与学校视为同类型的DMU，也不能把大学和中学视为同类型的DMU. 但是，在外部环境和内部结构没有多大变化的情况下，同一个DMU的不同时段可视为同类型DMU，例如一个企业四个季度的生产活动可以看作是四个同类型的DMU. 另外，上述特征中并没有关于DMU规模的要求，因此一个万人大学与一个数千人大学也可看作是同类型的.

最后，还要指出一点，由于我们的研究目的不同，即使对同一个DMU，它的“输入”和“输出”有时也会有所不同. 例如，为了对一个学校的办学效益进行评价，“教师人数”可视为输入，但若是为了研究学校的发展，则“教师人数”应视为输出. 这告诉我们，DMU的输入、输出要根据需要来确定，并非随意的.

§1.2 生产可能集

设某个DMU在一项经济（生产）活动中的输入向量为 $\boldsymbol{x}=(x_1, \cdots, x_m)^T$，输出向量为 $\boldsymbol{y}=(y_1, \cdots, y_s)^T$，于是，我们可以简单地用 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 来表示这个DMU的整个生产活动.

定义 1.1 称集

$$T=\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mid \text{产出 } \boldsymbol{y} \text{ 能用输入 } \boldsymbol{x} \text{ 生产出来}\} \qquad (1.1)$$

为所有可能的生产活动构成的**生产可能集**.

设有 n 个 DMU，DMU_j 对应的输入、输出向量分别为

$$\boldsymbol{x}_j = (x_{1j}, x_{2j}, \cdots, x_{mj})^T$$

$$\boldsymbol{y}_j = (y_{1j}, y_{2j}, \cdots, y_{sj})^T$$

$(j=1,\cdots,n)$，由于$(\boldsymbol{x}_j \boldsymbol{y}_j)$是实际观测到的生产活动，因此有

$$(\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{y}_j) \in T, \quad j = 1, \cdots, n$$

另外，通常称由（$\boldsymbol{x}_j$，$\boldsymbol{y}_j$），$j=1$，…，n 组成的集合

$$\hat{T} = \{(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1), (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2), \cdots, (\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_n)\} \tag{1.2}$$

为**参考集**.

根据实际情况和研究问题方便，一般都假设生产可能集满足下面四条公理：

1. **凸性**：对任意的$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in T$ 和$(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}') \in T$，以及$\mu \in [0,1]$，有

$$\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (1-\mu)(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}') \in T$$

即如果分别以 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{x}'$ 的 μ 和$(1-\mu)$倍之和作为新的输入，则可得到原产出相同比例之和的新的产出. 凸性表明 T 是一个凸集.

2. **锥性**：若（$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$）$\in T$ 及 $k \geqslant 0$，则

$$k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (k\boldsymbol{x}, k\boldsymbol{y}) \in T$$

此表明若以原输入的 k 倍为新的输入，则得到原产出的 k 倍是可能的.

3. **无效性**：设（$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$）$\in T$，若 $\boldsymbol{x}' \geqq \boldsymbol{x}$[①]

则（$\boldsymbol{x}'$，$\boldsymbol{y}$）$\in T$；若 $\boldsymbol{y}' \leqslant \boldsymbol{y}$，则（$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}'$）$\in T$，这说明在原来的生产活动的基础上增加投入或减少产出进行生产总是可能的.

4. **最小性**：生产可能集 T 是满足上述条件 1—3 的所有集合

---

① 设 $\boldsymbol{x}_1$ 与 $\boldsymbol{x}_2$ 为两个维数相同的向量，本书中约定

$\boldsymbol{x}_1 > \boldsymbol{x}_2$，当且仅当 $x_{1j} > x_{2j}$；

$\boldsymbol{x}_1 \geqq \boldsymbol{x}_2$，当且仅当 $x_{1j} \geqslant x_{2j}$；

$\boldsymbol{x}_1 \geqslant \boldsymbol{x}_2$，当且仅当 $\boldsymbol{x}_1 \geqq \boldsymbol{x}_2$ 但 $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}_2$，即 $\boldsymbol{x}_2$ 的每个分量都小于或等于 $\boldsymbol{x}_1$ 的相应分量，而且至少有一个 $\boldsymbol{x}_2$ 的分量严格小于 $\boldsymbol{x}_1$ 的相应分量.

的交集.

在满足 1—4 的基础上，对于已有的观测值$(\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{y}_j)(j=1,\cdots,n)$,可得

$$T=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mid k\sum_{j=1}^{n}\mu_j\boldsymbol{x}_j\leqq\boldsymbol{x},k\sum_{j=1}^{n}\mu_j\boldsymbol{y}_j\geqq\boldsymbol{y},\mu_j\geqslant 0,$$
$$\sum\mu_j=1,k>0\}\tag{1.3}$$

若令 $k\mu_j=\lambda_j,(j=1,\cdots,n)$则(1.3)为

$$T=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mid\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\boldsymbol{x}_j\leqq\boldsymbol{x},\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\boldsymbol{y}_j\geqq\boldsymbol{y},\lambda_j\geqslant 0\}\tag{1.4}$$

若把公理条件 2 去掉，则(1.4)成为

$$T=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mid\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\boldsymbol{x}_j\leqq\boldsymbol{x},\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\boldsymbol{y}_j\geqq\boldsymbol{y},\lambda_j\geqslant 0,$$
$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1\}\tag{1.5}$$

另外，有的时候例如在研究生产活动的规模效益时，还会考虑如下形式的生产可能集

$$T=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mid\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\boldsymbol{x}_j\leqq\boldsymbol{x},\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\boldsymbol{y}_j\geqq\boldsymbol{y},\lambda_j\geqslant 0,$$
$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\leqslant 1\}\tag{1.6}$$

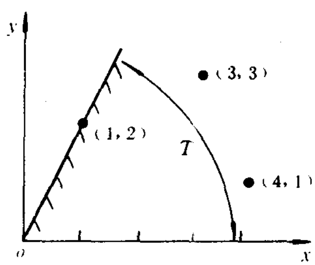
后面我们会看到，式(1.4)—(1.6)各自都反映了生产活动的一定的经济含义，一般地，我们称它们为经验生产可能集.

例 考虑如下的有三个 DMU 的单输入、单输出问题：

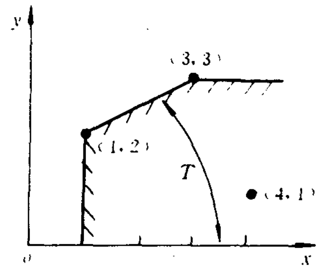
DMU_i	1	2	3
x_i	1	3	4
y_i	2	3	1

分别用(1.4),(1.5),(1.6)式构成的经验生产可能集如下面的图 1.1(i),(ii),(iii)所示,从这里可以看出,生产可能集构成中的 $\Sigma\lambda_j$

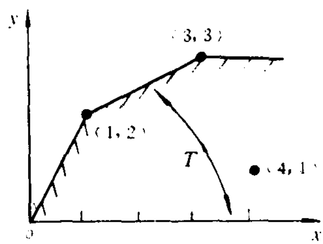
的约束形式对可能集的形状是有很大影响的.



(i)由(1.4)式构成的 T



(ii)由(1.5)式构成的 T



(iii)由(1.6)式构成的 T

图 1.1

§1.3 生产函数与规模收益

在生产可能集概念的基础上，还有两个有关的概念，即

定义 1.2 称集

$$L(y) = \{x \mid (x, y) \in T\} \tag{1.7}$$

为对于 y 的**输入可能集**；称集

$$P(x) = \{y \mid (x, y) \in T\} \tag{1.8}$$

为对于 x 的**输出可能集**，其中 T 为生产可能集.

不难看出，对固定的 y_0，如果 $x_0 \in L(y_0)$ 且在"$\geqslant$"意义下

是 $L(y_0)$ 中最小的，则表明任何再减少投入并保持产出不变的企图都是无法实现的，换言之，相应的 y_0 已是最理想的产出. 基于这一考虑，有下面的

定义 1.3 设 $(x, y) \in T$，如果不存在 $(x, y') \in T$，且 $y \leqslant y'$，则称 (x, y) 为**有效生产活动**.

定义 1.4 对生产可能集 T，所有有效生产活动（点）(x, y) 构成的 R^{n+s} 空间中的超曲面

$$y = f(x) \tag{1.9}$$

称为**生产函数**.

显然，生产函数是在一定的技术条件下，任何一组投入量与**最大**产出量之间的函数关系，由于生产可能集具有无效性，即允许生产中存在浪费现象，所以生产函数中 y 是关于 x 的增函数.

增函数的概念仅粗略地反映了产出 y 对投入 x 的相对不减性，但尚未清楚地描述出不减性的程度. 例如投入增量相对百分比与对应的产出增量相对百分比究竟哪个大. 如果前者大于后者，表明投入规模的增加并未获得“理想”的产出效益；反之则表明产出效益相对增加大于投入规模的相对增加；如果二者相等，则表明投入规模与产出规模的相对增加是“同步”的.

这里，以单输入、单输出情形为例对这一问题作进一步的解释. 如图 1.2 所示，折线 $PBAQ$ 为生产函数图形，$y=f(x)$ 为生产函数的解析表达. 设对 x 给增量 Δx，相应地得到增量 Δy，这样，$\dfrac{\Delta y}{y}$ 表示了产出的相对增量，$\dfrac{\Delta x}{x}$ 表示了投入的相对增量，而

$$\frac{\Delta y}{y}\bigg/\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\bigg/\frac{y}{x} > 1 \quad (=1, <1)$$

则表示了相对于原投入规模 x，产出效益相对增量大于（等于、小于）投入效益相对增量的生产状况.

对 PB 段上任一点 C，由于 $\angle\alpha > \angle Cox$，则有

$$\frac{\Delta y}{y}\bigg/\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\bigg/\frac{y}{x} = \frac{\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}\angle Cox} > 1$$

故在 C 点增加投入规模能得到相对更多的产出效益增量.

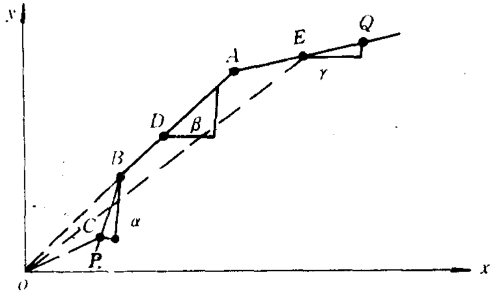


图 1.2

对 BA 段上任一点 D，由于$\angle\beta=\angle Dox$，则有

$$\frac{\Delta y}{y}\Big/\frac{\Delta x}{x}=\frac{\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\angle Dox}=1$$

故在 D 点投入规模增加与产出规模增加是“持平”的.

对 AQ 段上任一点 E，由于$\angle r<\angle Eox$，则有

$$\frac{\Delta y}{y}\Big/\frac{\Delta x}{x}=\frac{\mathrm{tg}r}{\mathrm{tg}\angle Eox}<1$$

故在 E 点投入规模的增量只换取到相对较小的产出效益增量.

正因为如此，我们一般称 PB 段为**规模效益递增的**，BA 段为**规模效益不变的**，而 AQ 段为**规模效益递减的**.

如果某一生产过程（$\boldsymbol{x}_0$，$\boldsymbol{y}_0$）处于规模收益递增状态，说明在 $\boldsymbol{x}_0$ 的基础上，适当增加投入量，可望最大可能产出有相对更高比例的增加，因此DMU 会有增加投入的积极性，反之，从理论上说，DMU 将没有再增加投入的积极性.

例 设有单输出单输入一阶齐次生产函数，即有

$$\lambda^{\alpha}f(x)=f(\lambda x)$$

其中 λ 为任意正数. 现设 $\lambda>1$，因为

$$\frac{\Delta y}{y}\Big/\frac{\Delta x}{x}=\frac{f(\lambda x)-f(x)}{f(x)}\Big/\frac{\lambda x-x}{x}$$

$$=\frac{\lambda^{\alpha}-1}{\lambda-1}$$

故若 $\alpha>1$，则此生产过程为规模效益递增的；若 $\alpha=1$，则此生产过程为规模效益不变的；若 $\alpha<1$，则此生产过程为规模效益递减的.

进一步地，如果对投入规模 $\boldsymbol{x}_0$，当投入小于 $\boldsymbol{x}_0$ 时，均为规模效益递增状态；而当投入大于 $\boldsymbol{x}_0$ 时，则相反. 换句话说，就投入规模而言，无论大于或小于 $\boldsymbol{x}_0$ 都不是最好的. 我们称这样的 DMU $(\boldsymbol{x}_0, f(\boldsymbol{x}_0))$ 为**规模有效的**.

在以上这些较为直观的叙述后，下面我们一般地讨论规模有效这一问题. 首先给出

定义 1.5 设 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in T$，令

$$\alpha(\beta) \triangleq \max\{\alpha \mid (\beta \boldsymbol{x}, \alpha \boldsymbol{y}) \in T, \beta \neq 1\} \tag{1.10}$$

$$\rho \triangleq \lim_{\beta \to 1} \frac{\alpha(\beta) - 1}{\beta - 1} \tag{1.11}$$

若 $\rho>1$，称 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 对应的 DMU 为**规模效益递增的**；$\rho<1$，称其为**规模效益递减的**；$\rho=1$，则称为**规模效益不变的**（这里假设极限（1.11）式总是存在的）.

另外，还有

定义 1.6 对生产过程 $(\boldsymbol{x}_s, \boldsymbol{y}_s) \in T$，若 $(\beta \boldsymbol{x}_s, \alpha \boldsymbol{y}_s) \in T$，则 $\frac{\alpha}{\beta} \leqslant 1$，称 $(\boldsymbol{x}_s, \boldsymbol{y}_s)$ 为**最大产出规模点**.

关于最大产出规模点与规模效益不变概念之间的关系，有下面的

定理 1.1 若 $(\boldsymbol{x}_s, \boldsymbol{y}_s)$ 为最大产出规模点，则 $(\boldsymbol{x}_s, \boldsymbol{y}_s)$ 为规模效益不变的.

证明 对给定的 $\beta \neq 1$，令

$$\alpha(\beta) = \max\{\alpha \mid (\beta \boldsymbol{x}_s, \alpha \boldsymbol{y}_s) \in T, \beta \neq 1\}$$

因为 $(\boldsymbol{x}_s, \boldsymbol{y}_s)$ 为最大产出规模点，故 $\alpha(\beta) \leqslant \beta$，并且

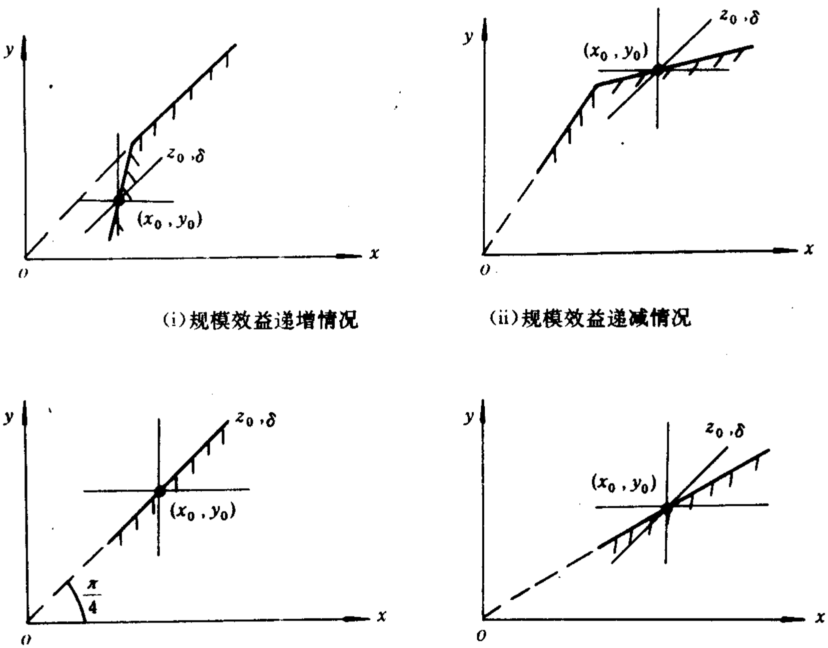
（1）若 $\beta<1$，则 $\frac{\alpha(\beta)-1}{\beta-1} \geqslant 1$，并得

$$\lim_{\beta \to 1^-} \frac{\alpha(\beta) - 1}{\beta - 1} \geqslant 1$$

(2)若 $\beta>1$,则由 $\dfrac{\alpha(\beta)-1}{\beta-1}\leqslant 1$,得

$$\lim_{\beta\to 1^+}\frac{\alpha(\beta)-1}{\beta-1}\leqslant 1$$

故 $\rho=\lim\limits_{\beta\to 1}\dfrac{\alpha(\beta)-1}{\beta-1}=1$,证毕.



(i)规模效益递增情况　　(ii)规模效益递减情况

(iii)规模效益不变情况之一　　(iv)规模效益不变情况之二

图 1.3

关于对某一生产状态的规模效益情况的判别，有时我们并不直接利用定义 1.5，而用下面的方法：

记 $(x_0, y_0)\in T$，(x_0, y_0) 邻域内的“**对角线**”$Z_{0,\delta}=\{(x,y)\mid (x,y)=(1+\delta)(x_0,y_0), |\delta|$ 足够小$\}$,

(a) (x_0, y_0) 为规模效益递增的，当且仅当存在 $\delta^*>0$，使得