

高等院校选用教材(工科类)

工 程 电 磁 场 基 础

孙 敏 孙亲锡 叶齐政 编著

科 学 出 版 社

2 0 0 1

内 容 简 介

本书是编著者在多年讲授电磁场课程的基础上,结合教学改革的具体要求编写而成。全书8章,主要介绍矢量分析与场论基础、电磁场基本方程和物质的电磁特性、静电场、恒定电场、恒定磁场、静态场的边值问题、时变电磁场、电磁场的传播等。每章末附有提要和习题,书末附有部分习题答案、3个附录和参考文献。

本书可作为电气、电力类各工科专业大学生的教材,也可供有关专业的科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

工程电磁场基础/孙敏,孙亲锡,叶齐政编著. —北京:科学出版社,2001
(高等院校选用教材(工科类))
ISBN 7-03-009316-X

I. 工… II. ①孙…②孙…③叶… III. 电磁场-高等学校-教材
IV. 0441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 17021 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2001年8月第一版 开本:720×1000 1/16

2001年8月第一次印刷 印张:25 1/4

印数:1—3 000 字数:454 000

定价:29.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换(环伟))

前 言

“电磁场”是电磁类专业的一门重要基础课,它在大学物理电磁学的基础上,进一步阐述宏观电磁场的基本性质、基本规律和基本分析计算方法,培养学生具有运用场的观点定性分析和定量计算工程电磁场问题的能力。

本书的特点如下:

(1) 三度(梯度、散度、旋度)是电磁场的重要物理概念和数学工具,鉴于近年来学生对该内容掌握较薄弱,本书在第一章中,以“三度”为主线,阐述标量场、矢量场的重要性质,理顺场的一些重要关系。

(2) 在内容体系上采用从一般到特殊的结构,即以电磁学为基础,先引入麦克斯韦方程组,讨论电磁场的基本运动规律和物质的电磁特性,然后再分别介绍电场、磁场、时变电磁场等,并且侧重于场性质、场方程的微分形式描述,提高教学起点,在一些内容和例题的编排上尽量避免与电磁学的相同。根据学时和学生的数理基础,第一、二章中的有些内容可安排自学。

(3) 充实工程应用实例,增强现代信息、扩大知识面。在第三、四、五章的最后部分都加进了“工程应用实例”一节,其内容是利用本章的理论知识对相关的工程问题展开讨论。

(4) 加强电磁场边值问题的数值计算,教学中可选用有限差分法作为入门,介绍1~2种数值计算方法。

(5) 对某些定理和公式的数学推导较简略,而对一些具体问题的论述和例题的分析求解较详细,消除学生以往对该课程“数学太繁”、“抽象”、“难自学”的感觉。

本书由孙敏编写第一、二、三、六章,并负责全书的统、审工作;由孙亲锡编写第四、五章,由叶齐政编写第七、八章及电磁场常用词汇英汉对照。全书承张文灿教授仔细审阅,提出了许多宝贵的修改意见,在此谨致谢意。

因学识和经验有限,加之编写时间较仓促,书中难免有错误和不妥之处,恳请读者不吝指正。

编著者

2000年12月于华中科技大学

目 录

第一章 矢量分析与场论基础	1
§ 1.1 标量场和矢量场	1
§ 1.2 三种正交坐标系	2
§ 1.3 矢量代数	5
§ 1.4 标量场的梯度	7
§ 1.5 矢量场的通量、散度、高斯散度公式	14
§ 1.6 矢量场的环量、旋度、斯托克斯公式	22
§ 1.7 无散场、无旋场中的势函数	28
§ 1.8 亥姆霍兹定理	31
提要	32
习题	33
第二章 电磁场基本方程和物质的电磁性能	35
§ 2.1 电磁场的场源——电荷和电流	35
§ 2.2 电荷守恒定律和全电流连续性原理	41
§ 2.3 自由空间电磁场的基本方程	44
§ 2.4 物质的电磁性能——传导、极化和磁化	47
§ 2.5 物质中电磁场的基本方程	62
§ 2.6 不同介质分界面上电磁场的边界条件	64
提要	73
习题	75
第三章 静电场	78
§ 3.1 静电场的基本方程、电势和电势的边界条件	78
§ 3.2 泊松方程和拉普拉斯方程	92
§ 3.3 惟一性定理	100
§ 3.4 镜像法	103
§ 3.5 电容和部分电容	121
§ 3.6 电场能量	130
§ 3.7 电场力	134
§ 3.8 工程应用实例	140
提要	150

习题	152
第四章 恒定电场	161
§ 4.1 导电介质中的恒定电场	161
§ 4.2 恒定电场的基本方程	163
§ 4.3 静电比拟	169
§ 4.4 电导与电阻	171
§ 4.5 场路理论的统一:基尔霍夫定律	181
§ 4.6 工程应用实例	183
提要	188
习题	189
第五章 恒定磁场	192
§ 5.1 恒定磁场的基本方程	192
§ 5.2 标量磁势	201
§ 5.3 矢量磁势	206
§ 5.4 镜像法	214
§ 5.5 电感	218
§ 5.6 磁场能量与磁场力	223
§ 5.7 工程应用实例	230
提要	238
习题	241
第六章 静态场的边值问题	248
§ 6.1 概述	248
§ 6.2 分离变量法	251
§ 6.3 复势函数法	264
§ 6.4 图解法	276
§ 6.5 有限差分法	279
§ 6.6 模拟电荷法	291
§ 6.7 有限元法	303
§ 6.8 场的实验研究	319
提要	324
习题	325
第七章 时变电磁场	329
§ 7.1 电磁场能量传播定理(坡印亭定理)	329
§ 7.2 电磁场方程及其正弦态形式	333

§ 7.3 势函数表示的电磁场方程·····	338
§ 7.4 似稳场和似稳电路·····	343
提要·····	346
习题·····	347
第八章 电磁场的传播 ·····	349
§ 8.1 辐射·····	349
§ 8.2 均匀平面电磁波·····	357
§ 8.3 电磁辐射干扰与电磁屏蔽·····	364
§ 8.4 集肤效应与交流阻抗·····	369
提要·····	372
习题·····	374
部分习题答案 ·····	375
参考文献 ·····	383
附录一 主要矢量运算式及微分算子运算式 ·····	384
附录二 电磁学的量和单位 ·····	386
附录三 电磁场常用词汇英汉对照 ·····	388

第一章 矢量分析与场论基础

反映宏观电磁场基本规律的麦克斯韦(Maxwell)方程,可以表示为积分形式或微分形式.一般来说,积分形式的场方程是实验结果的直接反映,在对称系统中有较多的应用,有助于初学者对物理概念和定律的理解,并由它可方便地导出微分形式的场方程.然而,对大多数工程电磁场及时变电磁场问题的研究和计算,积分形式的场方程往往显得无能为力,而必须应用微分形式的场方程,后者是以场量对空间、时间的偏导数形式表示的.

研究场的数学理论称为场论.场论是19世纪发展起来的,伟大的数学物理学家高斯、拉普拉斯、库伦等人对此作出很大的贡献.本章中讨论场的空间导数的一些概念,即标量场的梯度、矢量场的散度、旋度及其运算描述了场的性质,它们贯穿于电磁场理论课程的始终.本章还介绍了场论中常用的算子:哈密顿算子(∇)和拉普拉斯算子(∇^2),常用的数学公式,如高斯散度公式、斯托克斯公式、格林公式以及矢量场中的一个重要定理——亥姆霍兹定理.

§ 1.1 标量场和矢量场

很多物理量是空间分布量,同时又随时间变化,将这些物理量统称为场量或简称为场.数学中,场是以空间坐标及时间为变量的函数,如温度 $T(\mathbf{r}, t)$ 、速度 $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ 、电势 $\varphi(\mathbf{r}, t)$ 、电场强度 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 、磁感应强度 $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ 等.物理量是标量的称为标量场(如 T, φ),物理量是矢量的称为矢量场(如 $\mathbf{V}, \mathbf{E}, \mathbf{B}$);随时间变化的场称为时变场,不随时间变化的场称为静态场.本书中用粗黑体字母符号表示矢量,用白体字母符号表示标量或矢量的大小,用 \mathbf{r} 表示坐标原点到空间某点(称为场点)的矢量.例如选取直角坐标系,温度场可表示为 $T(x, y, z, t)$ 或 $T(\mathbf{r}, t)$,静电场中的电势表示为 $\varphi(x, y, z)$ 或 $\varphi(\mathbf{r})$,后者适用于不同坐标系中场的表示,也显简捷,常常把 \mathbf{r} 称为场点位置矢量.

采用正交坐标系,任一矢量可以由它在空间三个相互垂直轴上的投影(标量分量)来确定,例如如图 1.1 所示的直角坐标系中,矢量 \mathbf{A} 在 3 个

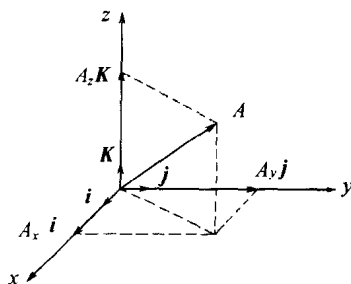


图 1.1 直角坐标系中矢量 \mathbf{A} 及其分量.

坐标轴上的投影分别是 A_x, A_y, A_z , 矢量 \mathbf{A} 表示为

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}, \quad (1.1)$$

其中 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 分别是 3 个坐标轴方向的单位矢量.

矢量 \mathbf{A} 的大小或模为

$$A = |\mathbf{A}| = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2}, \quad (1.2)$$

A, A_x, A_y, A_z 是标量, 它们一般也都是空间 (x, y, z) 和时间 t 的函数.

§ 1.2 三种正交坐标系

在分析电磁场问题时, 往往需要根据具体问题的几何条件首先选择一种相适应的坐标系, 例如建立直角坐标系分析平板电容器中的电场, 建立圆柱坐标系分析带电荷长直导线的电场和载流长直导线的磁场, 建立球坐标系分析单元辐射子的辐射等. 直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系是三种最常用的正交坐标系.

空间某点位置可以由 3 个面的交点确定, 每个面可以是平面, 也可以是曲面, 当这 3 个面相互垂直, 便建立了一个正交坐标系. 设正交坐标系的 3 个坐标变量是 u_1, u_2, u_3 , 则 3 个坐标面分别可表示为 $u_1 = \text{常数}, u_2 = \text{常数}, u_3 = \text{常数}$, 每两个面的交线称为坐标线, 例如 u_1 坐标线是 $u_2 = \text{常数}$ 和 $u_3 = \text{常数}$ 的两个坐标面的交线, 见图 1.2.

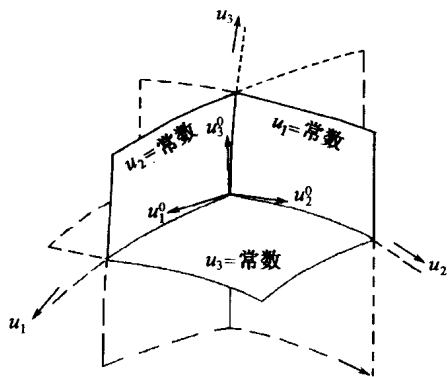


图 1.2 正交坐标系.

沿坐标线切线方向所取的单位矢量称为坐标单位矢量, 它的方向指向相应的坐标变量正的增加方向.

设一个正交坐标系 3 个坐标单位矢量为 $\mathbf{u}_1^0, \mathbf{u}_2^0, \mathbf{u}_3^0$, 它们相互正交并满足右手

螺旋法则

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1^0 \times \mathbf{u}_2^0 = \mathbf{u}_3^0, \\ \mathbf{u}_2^0 \times \mathbf{u}_3^0 = \mathbf{u}_1^0, \\ \mathbf{u}_3^0 \times \mathbf{u}_1^0 = \mathbf{u}_2^0. \end{cases} \quad (1.3)$$

任一矢量 \mathbf{A} 可表示为

$$\mathbf{A} = A_{u_1} \mathbf{u}_1^0 + A_{u_2} \mathbf{u}_2^0 + A_{u_3} \mathbf{u}_3^0, \quad (1.4)$$

式中 $A_{u_1}, A_{u_2}, A_{u_3}$ 分别是 \mathbf{A} 在 $\mathbf{u}_1^0, \mathbf{u}_2^0, \mathbf{u}_3^0$ 方向的投影. 式(1.4)亦可写为 $\mathbf{A} = \mathbf{u}_1^0 A_{u_1} + \mathbf{u}_2^0 A_{u_2} + \mathbf{u}_3^0 A_{u_3}$.

1.2.1 直角坐标系

直角坐标系 3 个坐标变量是 x, y, z , 对应 3 个单位矢量用 i, j, k 表示, 见图 1.3(a).

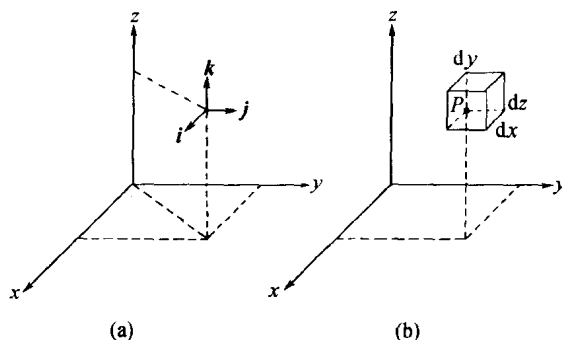


图 1.3 直角坐标系.

矢量 \mathbf{A} 在直角坐标系中表示为式(1.1)

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}.$$

在直角坐标系中[见图 1.3(b)], 空间各微分元分别表示为

长度微分元: $dl_x = dx, dl_y = dy, dl_z = dz$;

面微分元: $dS_x = dydz, dS_y = dx dz, dS_z = dx dy$;

体微分元: $dV = dx dy dz$.

1.2.2 圆柱坐标系

圆柱坐标系的 3 个坐标变量是 r, α, z , 对应的 3 个坐标单位矢量用 $\mathbf{r}^0, \boldsymbol{\alpha}^0, \mathbf{k}$

表示,见图 1.4(a).

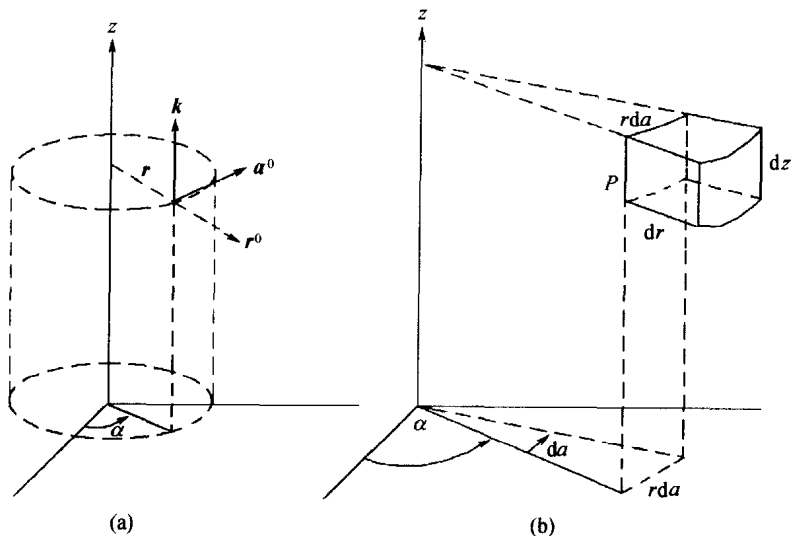


图 1.4 圆柱坐标系.

矢量 \mathbf{A} 在圆柱坐标系中表示为

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{r} + A_\alpha \mathbf{\alpha}^0 + A_z \mathbf{k}. \quad (1.5)$$

在圆柱坐标系中[见图 1.4(b)],空间各微分元分别表示为

长度微分元: $dl_r = dr, dl_\alpha = r da, dl_z = dz$;

面微分元: $dS_r = rdadz, dS_\alpha = drdz, dS_z = rdadr$;

体微分元: $dV = r dr da dz$.

1.2.3 球坐标系

球坐标系 3 个坐标系变量是 r, θ, α , 对应 3 个坐标单位矢量用 $\mathbf{r}^0, \boldsymbol{\theta}^0, \boldsymbol{\alpha}^0$ 表示, 见图 1.5(a).

矢量 \mathbf{A} 在球坐标系中的表示为

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{r}^0 + A_\theta \boldsymbol{\theta}^0 + A_\alpha \boldsymbol{\alpha}^0. \quad (1.6)$$

球坐标系中[见图 1.5(b)],空间各微分元分别表示为

长度微分元: $dl_r = dr, dl_\theta = r d\theta, dl_\alpha = r \sin\theta da$;

面微分元: $dS_r = r^2 \sin\theta d\theta da, dS_\theta = r \sin\theta dr da, dS_\alpha = r dr d\theta$;

体微分元: $dV = r^2 \sin\theta dr d\theta da$.

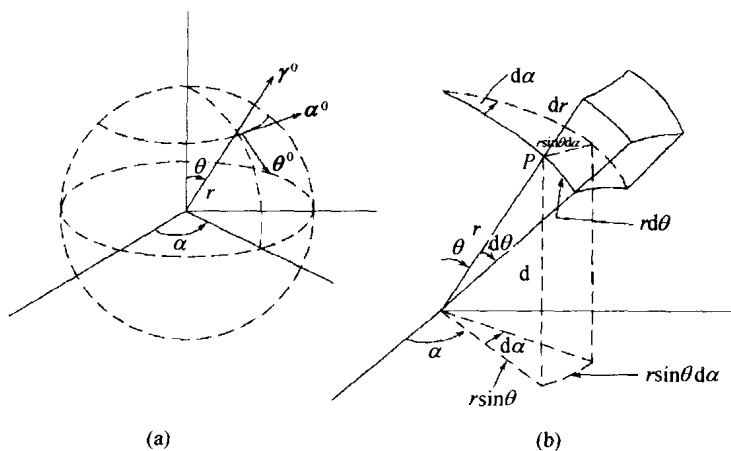


图 1.5 球坐标系.

§ 1.3 矢量代数

矢量的加法、减法, 矢量标量积、矢量矢量积是矢量的代数运算.
 矢量加法服从加法的交换律和结合律

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}, \quad (1.7)$$

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}. \quad (1.8)$$

矢量加、减法的几何运算见图 1.6.

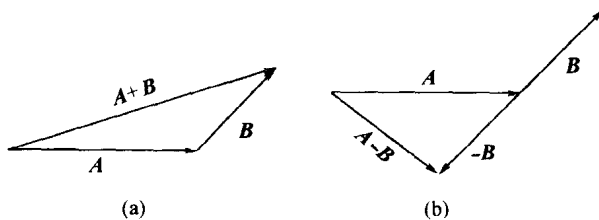


图 1.6 矢量加、减法的几何运算.

矢量 \mathbf{A} 与矢量 \mathbf{B} 的标量积是一个标量, 它等于两个矢量模相乘, 再乘以它们夹角 θ 的余弦, 记作 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, 即

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta = AB \cos \theta. \quad (1.9)$$

点积满足乘法交换律和分配律, 即

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}, \quad (1.10)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}. \quad (1.11)$$

由点积性质可知,正交坐标系中的任意两个单位矢量的标量积或等于零,或等于1.例如直角坐标系中

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1,$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0.$$

因此

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \cdot (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}) \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \end{aligned} \quad (1.12)$$

A_x, A_y, A_z 又可表示为

$$A_x = \mathbf{A} \cdot \mathbf{i}, A_y = \mathbf{A} \cdot \mathbf{j}, A_z = \mathbf{A} \cdot \mathbf{k}.$$

矢量 \mathbf{A} 与矢量 \mathbf{B} 的矢量积是一个矢量, 设用 \mathbf{C} 表示, 记为

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}. \quad (1.13)$$

矢量 \mathbf{C} 的大小等于矢量 \mathbf{A}, \mathbf{B} 大小的乘积再乘以它们夹角 θ 的正弦, 即

$$|\mathbf{C}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta. \quad (1.14)$$

矢量 \mathbf{C} 的方向垂直于矢量 \mathbf{A} 和矢量 \mathbf{B} 所决定的平面, 且其正方向按右手法则确定, 见图 1.7.

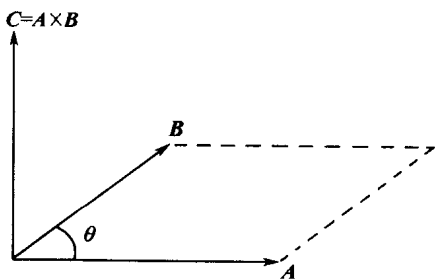


图 1.7 矢量的矢量积.

矢量积不服从乘法交换律

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A}). \quad (1.15)$$

矢量积服从分配律

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}. \quad (1.16)$$

由矢量积的定义可知

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0,$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = -(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) = \mathbf{k},$$

$$\begin{aligned}j \times k &= -(k \times j) = i, \\k \times i &= -(i \times k) = j.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}A \times B &= (A_x i + A_y j + A_z k) \times (B_x i + B_y j + B_z k) \\&= (A_y B_z - A_z B_y) i + (A_z B_x - A_x B_z) j + (A_x B_y - A_y B_x) k.\end{aligned}\quad (1.17)$$

上式常用行列式表示为

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}.\quad (1.18)$$

常用的矢量代数运算式见附录一。

§ 1.4 标量场的梯度

1.4.1 标量场的等值面

标量场 $f(\mathbf{r})$ 的等值面是该标量等于同一数值的空间各点构成的曲面, 因此, 等值面方程为

$$f(\mathbf{r}) = \text{常数}.\quad (1.19)$$

若 f 仅是两个坐标变量的函数(二维函数), 则构成等值线。

对于式(1.19), 给定不同的常数值, 便得出一系列等值面方程及对应的等值面, 形成等值面族, 等值面族图形是描述标量场直观、形象的图形, 常称为标量场的场图。例如, 位于坐标原点的点电荷, 其电场的电势函数 $\varphi(\mathbf{r}) = \frac{K}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$,

其等势面方程为 $\frac{K}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} = C$ (常数), 这是一族以原点为球心的球面方程:

$x^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{K}{C}\right)^2$, 球面半径为 $\frac{K}{C}$, 电势值越大, 等位球面的半径越小。

另外, 若要写出标量场过空间某点的等值面方程, 则该方程是令式(1.19)中的常数等于该点标量的数值所得出的方程。例如, 某点位置矢量为 \mathbf{r}_p , 过该点的等值面方程为

$$f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}_p).\quad (1.20)$$

例 1.1 自由空间位于(1 m, 2 m, 3 m)点有电量 $q = 1\mu\text{C}$ 的点电荷, 试求:

- (1) 电势为 100 V 的等势面方程;
- (2) 过点 $p(2\text{ m}, 1\text{ m}, 3\text{ m})$ 的等势面方程。

解 由题意, 设点电荷 q 所在点的位置矢量为 $\mathbf{r}' = 1\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, 场点位置矢

量 $r = xi + yj + zk$

(1) 100 V 等势面方程为

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 |r - r'|} = 100.$$

由 $|r - r'| = [(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2]^{1/2}$

$$\times \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \times 100} = \frac{10^{-6}}{4\pi \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \times 100} = 90,$$

故等势面方程为

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 90^2.$$

该等势面是以点电荷所在点(1 m, 2 m, 3 m)为球心, 90 m 为半径的球面.

(2) p 点位置矢量

$$r_p = 2i + j + 3k.$$

p 点电势

$$\varphi_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |r_p - r'|}$$

过 p 点的等势面方程

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 |r - r'|} = \varphi_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |r_p - r'|},$$

即

$$|r - r'| = |r_p - r'|.$$

r', r_p, r 代入上式, 得到过 p 点等势面方程

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = (2-1)^2 + (1-2)^2 + (3-3)^2 = 2.$$

过 p 点的等势面是以点电荷所在点为球心, 半径为 $\sqrt{2}$ m 的球面.

1.4.2 标量场的梯度

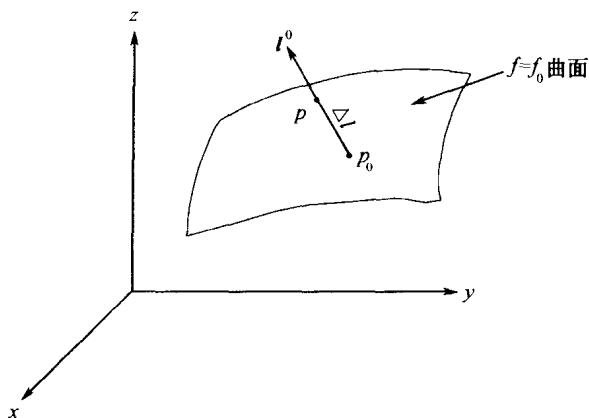
设标量场 $f(x, y, z)$ 经过空间点 $p_0(x_0, y_0, z_0)$ 的等值面如图 1.8 所示, 等值面方程为

$$f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) = f_0.$$

过 p_0 点沿 l^0 方向经位移元 Δl 达到 p 点, 若 p 点位于 $f(x, y, z) = f_0 + \Delta f$ 的等值面上, 则将标量 f 的增量 Δf 与位移量 Δl 之比的极限定义为函数 f 在 p_0 点沿

l^0 的方向导数(变化率), 记作 $\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{p_0}$ 即

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{p_0} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta l}. \quad (1.21)$$

图 1.8 标量函数 f 的方向导数.

当 $\frac{\partial f}{\partial l} > 0$, 表明函数 f 的值沿 l^0 方向是增加的; 当 $\frac{\partial f}{\partial l} < 0$, 表明函数 f 的值沿 l^0 方向是减小的. 显然, 沿不同的 l^0 方向有不同的方向导数值, 那么, 从场中给定点出发的无限多个方向中, 沿其中哪一个方向的方向导数有最大值? 该最大值是多少? 这是实际问题中常常要关心和探讨的.

由微分运算

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial l} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial l},$$

而 $\frac{\partial x}{\partial l}, \frac{\partial y}{\partial l}, \frac{\partial z}{\partial l}$ 是 l^0 方向的方向余弦, 即

$$\begin{aligned} l^0 &= \frac{\partial x}{\partial l} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial l} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial l} \mathbf{k} \\ &= \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}, \\ &(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1). \end{aligned} \quad (1.22)$$

因此, f 沿 l^0 的方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l}$ 可表示为两个矢量的标量积

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot l^0.$$

令矢量

$$\mathbf{G} = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k},$$

得到

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{l}^0. \quad (1.23)$$

上式表明, f 沿 \mathbf{l}^0 的方向导数, 是矢量 \mathbf{G} 在 \mathbf{l}^0 方向的投影. 某点的 \mathbf{G} 矢量是一定的, 当 \mathbf{l}^0 的方向调整到与 \mathbf{G} 矢量方向一致, $\cos(\mathbf{G} \cdot \mathbf{l}^0) = 1$, 该点的方向导数便有最大值, 其最大值 $\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{\max} = |\mathbf{G}|$. 定义矢量 \mathbf{G} 为标量函数 f 的梯度, 记作 $\text{grad} f$, 即

$$\text{grad} f = \mathbf{G} = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (1.24)$$

标量函数的梯度是矢量, 标量函数 f 在某点梯度的模和方向就是 f 在该点的最大方向导数的值和方向.

式(1.23)又可写成

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \text{grad} f \cdot \mathbf{l}^0 = (\text{grad} f)_l. \quad (1.25)$$

上式表明 f 沿任意方向 \mathbf{l}^0 的方向导数(变化率)等于 f 的梯度在 \mathbf{l}^0 方向的投影.

图 1.9 中所示的两条曲线是邻近的两条等值线, 设 $\Delta f > 0$, 由于 $\Delta l'' > \Delta l' > \Delta l$, 故 $\frac{\Delta f}{\Delta l} > \frac{\Delta f}{\Delta l'} > \frac{\Delta f}{\Delta l''}$, 显然, 沿等值线(面)垂直的方向, $\frac{\partial f}{\partial l}$ 最大, 因此, 某点梯度的方向必定与过该点的等值面相垂直, 即梯度的方向在等值面的法线上且指向该点标量值增大的一方. 而沿等值面的切线方向 \mathbf{l}_t^0 , \mathbf{G} 与 \mathbf{l}_t^0 正交, 由式(1.24)和(1.25) $\frac{\partial f}{\partial l_t} = 0$, 这与等值面上各点有相同的标量值相吻合.

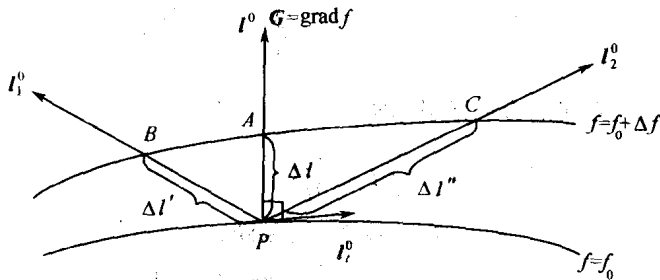


图 1.9 梯度垂直于等值面.

在第三章中将看到, 静电场中电场强度 \mathbf{E} 与电势 φ 的关系是

$$\mathbf{E} = -\text{grad} \varphi. \quad (1.26)$$

从梯度与等值面的关系可知, 电场强度 \mathbf{E} 垂直于等电势面, 且方向由高电势指向低电势 (\mathbf{E} 的方向是电势梯度的负方向). 直角坐标系中 \mathbf{E} 的三个分量 E_x 、 E_y 、 E_z 与电势 φ 的关系是

$$\begin{cases} E_x = \mathbf{E} \cdot \mathbf{i} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ E_y = \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ E_z = \mathbf{E} \cdot \mathbf{k} = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{cases} \quad (1.27)$$

\mathbf{E} 沿等势面的法向 \mathbf{n} 及切向 \mathbf{t} (\mathbf{n}, \mathbf{t} 为单位矢量) 的分量可表示为

$$\begin{cases} E_n = \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = -\frac{\partial \varphi}{\partial n}, \\ E_t = \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \end{cases} \quad (1.28)$$

由上面讨论我们概括一下标量函数在某点的梯度的若干性质有

1. 垂直于标量函数的等值面.
2. 指向标量函数变化最快的方向.
3. 其大于等于标量函数每单位距离的最大变化率.
4. 一个标量函数在某点沿任意方向的方向导数等于此函数的梯度与该方向单位矢量的标量积.

为了简便,运算中引入一个算子 ∇ (称作哈密顿算子,读作“del”或“nabla”).

正交坐标系中该算子定义为

$$\nabla = \mathbf{u}_1^0 \frac{\partial}{\partial l_{u_1}} + \mathbf{u}_2^0 \frac{\partial}{\partial l_{u_2}} + \mathbf{u}_3^0 \frac{\partial}{\partial l_{u_3}}. \quad (1.29)$$

可见 ∇ 是一个微分运算符号,同时又要当作矢量看待.

在直角坐标系中

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (1.30)$$

$$\nabla f = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) f = \mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (1.31)$$

梯度在圆柱坐标系和球坐标系中要复杂些,因为 $\frac{\partial f}{\partial l_u}$ 中的长度元 dl_u 不一定等于相应坐标系中某一坐标 u 的增量,例如圆柱坐标系中 $\frac{\partial f}{\partial l_a} = \frac{\partial f}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial l_a} = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial a}$ (因为 $dl_a = r da$); 球坐标系中 $\frac{\partial f}{\partial l_\theta} = \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial l_\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}$ (因为 $dl_\theta = r d\theta$), $\frac{\partial f}{\partial l_a} = \frac{\partial f}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial l_a} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial a}$ (因为 $dl_a = r \sin \theta da$). 因此,在圆柱坐标系中

$$\nabla f = \mathbf{r}^0 \frac{\partial f}{\partial r} + \mathbf{a}^0 \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial a} + \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (1.32)$$