随机服务过程及其在管理中的应用

官 建 成 编著

北京航空航天大学出版社

随机服务过程
及其在管理中的应用

官建成　编著

北京航空航天大学出版社

(京)新登字 166 号

图书在版编目(CIP)数据

随机服务过程及其在管理中的应用/官建成编著.-北京:北京航空航天大学出版社,1994.3

ISBN 7-81012-448-X

Ⅰ.随…

Ⅱ.官…

Ⅲ.①随机过程-应用-管理学 ②管理学-应用-随机过程

Ⅳ.C931.1

内 容 简 介

本书内容共分十一章,前三章介绍了随机过程与随机服务过程的基本概念,与随机服务过程理论密切相关的几个重要的概率分布,如普阿松分布、负指数分布、爱尔朗分布等以及贝努利过程、普阿松过程、生灭过程。第四、五章介绍了马尔柯夫链、马尔柯夫过程的理论及其在管理中的应用。后六章分别介绍马尔柯夫型、爱尔朗型、非马尔柯夫型排队系统及马尔柯夫型排队网络。

本书可作为工科院校的管理工程、系统工程、工业工程、工商管理硕士生及经济类专业的研究生、高年级本科生教材,亦适用于广大科技人员、大学以上水平的管理人员学习、参考。

随机服务过程及其在管理中的应用

SUI JI FUWU GUOCHENG JI QI ZAI GUANLI ZHONG DE YINGYONG

官建成　　编著

责任编辑　郭维烈

北京航空航天大学出版社出版

新华书店总店科技发行所发行　　各地新华书店经销

通县觅子店印刷厂印装

787×1092　1/16　印张:16.75　字数:429 千字

1994 年 2 月第一版　　1994 年 2 月第一次印刷　　印数:3000 册

ISBN 7-81012-448-X/O・027　　　定价:12.50 元

前　　言

随机现象在管理领域俯拾即是，随机因素在人类管理活动中无所不在。随机服务过程理论就是管理科学中专门研究一类随机管理现象的学科。

随机服务过程主要研究一类服务系统由于随机因素（如顾客的到达、对顾客的服务时间）的影响而产生的拥挤（排队）现象，换言之，它是研究随机服务系统中排队现象的一门学科。因此，常将这类理论称为“随机服务系统理论”或“排队论”。

本书考虑到随机过程理论在这类问题中起着本质的、决定性的作用，又有别于某些这方面的纯数学专著，不去追求艰深的数学论证，而自始至终注重于相关学科（随机过程、管理科学）的衔接，注重于随机理论在管理学科方面的应用，正是在此意义上，本书才定名为《随机服务过程及其在管理中的应用》。

本书的雏形是编著者在 1985 年为研究生课程“随机过程与排队论”所编写的《实用随机过程》上、下册（内部教材）。此后，笔者在从事研究生、双学位、本科生的多门相关课程的教授中，不断吸收国内外优秀著作和最新研究成果，使课程内容逐渐系统、充实。屈指数来，自 1983 年笔者开始为航空工业部管理工程师资班开设“随机服务过程”以来，历时十个寒暑。积十年经验与教训，方为本书奠定了写作基础。

本书主要包含两部分内容，一部分内容是随机过程理论，重点是马尔柯夫链和马尔柯夫过程，这部分内容是研究随机服务过程所必需的理论基础，同时，其自身在管理科学中亦有众多的应用。另一部分内容是随机服务系统的理论与应用，它是前一部分内容在管理科学方面的具体应用与延伸，重点介绍各种各样的随机服务模型和处理这些排队系统的手段、方法与技巧。

应当指出的是，随机服务的理论和应用研究是目前管理科学领域最为活跃的分支之一。在国外，有关这方面的著作和文献浩如烟海。在国内，亦不乏颇有见地的研究成果接踵而至。作为管理科学、系统工程、工业工程、工商管理硕士（*MBA*）等专业的研究生与高年级本科生所用教材，因学时、篇幅均有限，故只能选取某些笔者认为是最基本且又最重要的内容。由于学识水平有限，或挂一漏万，或以误作正，或有失偏颇，都敬请师长赐教，读者批评指正。

本教材承冯允成教授细心审阅，并提出了许多宝贵的意见，在此表示衷心谢意。同时，还应感谢顾昌耀教授。董少英同志，秦安琳同志对本教材编写、出版的支持和帮助。

编著者：官建成

1993 年 4 月于北航管理学院

目　　录

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

第一章　随机过程与随机服务过程概论

随机过程理论是现代数学的一个重要分支，其主要基础知识为概率论。随机过程理论已广泛应用于自然科学、社会科学和工程科学技术的众多领域，如通信、导航、飞行控制、生物学、人口统计学、管理科学等。随着科学技术的进步，计算机技术的迅速发展，概率论与随机过程的应用范围日渐扩大。某些边缘学科和交叉学科如系统工程、运筹学、管理科学及技术经济学等，也正是由于使用了随机过程与概率论的方法而日臻完善。

本章先介绍有关概率论、随机过程的一些基本概念及术语。这些内容对于有一定概率论基础的读者来说，可仅作为阅读本书前的一般性复习。然后，我们再介绍随机服务过程和随机服务系统的基本概念。

§1.1　概率空间

概率论中最基本也是最重要的术语为随机试验，随机试验是满足以下条件的试验：

1. 在相同试验条件下可重复进行；
2. 每次试验结果不止一个；
3. 每次试验之前不能预先精确确定哪一种结果发生。

我们用 ω 表示试验的一个最基本的不可再分解的结果，称其为基本事件。用 Ω 表示一切基本事件所组成的总体，即 $\Omega=\{\omega\}$，称 Ω 为样本空间。

事件是样本空间的子集，当且仅当试验结果 ω 是集合 A 的元素时，我们就称事件 A 已经发生。

例 1.1-1　某随机试验为：在一个特定的时间区间中，计算某交通路口发生的交通事故数。

显然，对于该例，样本空间

$$\Omega=\{0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\cdots\cdots\}$$

而“事故数小于等于七”指的是 Ω 的子集

$$A=\{0,\quad 1,\quad 2,\cdots\cdots 7\}$$

事件 $B=\{5,\quad 6,\quad 7,\cdots\cdots\}$ 发生当且仅当事故数大于等于五。

若给定样本空间 Ω 及事件 A，则 A 的补 A^c 可定义为当且仅当 A 不发生的事件，即

$$A^c=\{\omega\in\Omega|\omega\notin A\} \tag{1.1.1}$$

定义事件 A 和事件 B 的并为事件 A 或 B 至少有一个发生，即

$$A\cup B=\{\omega\in\Omega|\omega\in A\quad 或\ \omega\in B\} \tag{1.1.2}$$

定义事件 A 与事件 B 的交为当且仅当 A 与 B 同时发生，即

$$A\cap B=\{\omega\in\Omega|\omega\in A\quad 且\ \omega\in B\} \tag{1.1.3}$$

集合 Ω 可称为必然事件。不包含任何元素的集合称为空集，用符号 $\varnothing$ 表示，显然有

$$\varnothing=\Omega^c\quad,\quad\Omega=\varnothing^c \tag{1.1.4}$$

若事件 A 与 B 是不相容的，则 $A \cap B = \varnothing$。若多个事件中任意两个事件都不相容，则称这多个事件是互不相容的。

若 $A_1, A_2, \cdots\cdots$ 均是事件，则它们的并

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \tag{1.1.5}$$

指的是当且仅当在 A_1、A_2、……这些事件中至少有一个发生的事件。它们的交

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \tag{1.1.6}$$

指的是当且仅当所有这些事件同时发生的事件。

为了介绍概率的概念，我们引入以下定义。

定义 1.1-2 设有样本空间 $\Omega = \{\omega\}$，$\mathscr{F}$ 是由 Ω 的一些子集 A（一般是不可列的）组成的集合。若 $\mathscr{F}$ 满足以下条件

1. $\Omega \in \mathscr{F}$

2. 若 $A \in \mathscr{F}$，则 $A^c \in \mathscr{F}$，

3. 若 $A_i \in \mathscr{F}, i = 1, \quad 2, \cdots$，则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$

便称 $\mathscr{F}$ 是 Ω 中的一个 σ 代数。

显然，由条件 1 和 2 及式(1.1.4)知

$$\varnothing = \Omega^c \in \mathscr{F} \tag{1.1.7}$$

实质上，$\mathscr{F}$ 即为一个随机事件族。将 Ω 与定义在 Ω 上的 σ 代数 $\mathscr{F}$ 一起称为可测空间，记作 $(\Omega, \mathscr{F})$，并简称 $\mathscr{F}$ 中的元素为事件。

以下引入有关概率的基本概念。

定义 1.1-2 设对于任一事件 $A \in \mathscr{F}$，$P(A)$ 是定义在 σ 代数 $\mathscr{F}$ 上的实值集函数，若 $P(A)$（亦记为 $P\{A\}$ 或 $P_r\{A\}$）满足以下条件：

1. $P(A) \geqslant 0$ 且 $P(A) \leqslant 1, \qquad \forall A \in \mathscr{F}$ (1.1.8)

2. $P(\Omega) = 1 \quad , \quad P(\varnothing) = 0$ (1.1.9)

3. 若 $A_m \in \mathscr{F} \quad , \quad A_i \cap A_j = \varnothing \ (i \neq j)$ 则

$$P\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\right) = \sum_{m=1}^{\infty} P(A_m) \tag{1.1.10}$$

则称 P 为 $\mathscr{F}$ 上的概率测度，简称概率。称三元总体 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 为概率空间。

根据概率空间的定义，Ω 的子集 A 是否是一个事件，完全取决于 A 是否属于 $\mathscr{F}$。而在定义 $\mathscr{F}$ 时，并没有要求 Ω 的全体子集都属于 $\mathscr{F}$。因此，并不是 Ω 中任何子集 A 都一定是一个事件。当然，事件却一定是 Ω 的子集。如例 1.1-1，样本空间 $\Omega = \{0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \cdots\cdots\}$，$\Omega$ 在实轴上有许多子集。很难给每一个子集都明确用一个事件表示，因此，也很难给每一个子集都明确赋上一个概率值。更况且，许多实际问题的样本空间比这还要复杂得多。

§1.2 条件概率

在实际应用时，有时除了要掌握有关事件 A 的概率信息 $P(A)$，还要考虑在"某事件 B 已发生"的前提条件下，事件 A 发生的概率，称其为条件概率，其定义为

定义 1.2-1 设概率空间为 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$，$A \in \mathscr{F}$，$B \in \mathscr{F}$。若满足

1. $0 \leqslant P(A|B) \leqslant 1$ (1.2.1)

2. $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$ (1.2.2)

则称 $P(A|B)$ 为在事件 B 已发生的条件下，事件 A 发生的条件概率。

若 $P(B)>0$，则 $P(A|B)$ 可由(1.2.2)唯一确定。若 $P(B)=0$，则 $P(A|B)$ 可在[0,1]中任意取值。

当 $P(B)>0$ 时，固定 B 后，$P(A|B)$ 即为 A 的函数。显然，$P(A|B)$ 满足概率测度定义 1.1-2，即

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ 0\leqslant P(A|B)\leqslant 1 \\ 2.\ P(\Omega|B)=1 \\ 3.\ P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i|B)=\Sigma_{i=1}^{\infty}P(A_i|B) \end{array}\right\} \tag{1.2.3}$$

其中，$A_1,A_2,\cdots\cdots$ 是互不相容的。

在某些场合下，条件概率 $P(A|B)=P(A)$，此时有

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B) \tag{1.2.4}$$

称满足式(1.2.4)的 A、B 为统计独立的事件。推广到 n 个事件的情形：$A_1,A_2,\cdots\cdots,A_n,n\geqslant 2$，若对任意 $k(1<k\leqslant n)$ 及任意 $i_s,s=1,2,\cdots,k$，且 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$，有

$$P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}) \tag{1.2.5}$$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是相互独立的。

条件概率的定义很有用，在许多场合下，可利用式(1.2.2)以及将要介绍的全概率公式，通过已知的概率(或条件概率)信息，求出其它未知的概率及条件概率。

设 B_1、$B_2,\cdots,B_n$ 是互不相容的事件，即

$$B_i\cap B_k=\varnothing,i,\qquad k=1,2,\cdots n,i\neq k,$$

且

$$\bigcup_{i=1}^{n}B_i=\Omega$$

则称事件 $B_1,B_2,\cdots B_n$ 为 Ω 的一个划分。此时，对任何事件 $A,A\in\mathscr{F}$，全概率公式为

$$P(A)=\Sigma_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i) \tag{1.2.6}$$

设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为样本空间 Ω 的一个划分，则对于任一事件 $A\in\mathscr{F}$，由条件概率定义知，对任意 i，当 $P(A)>0$ 时有

$$P(B_i|A)=\frac{P(A\cap B_i)}{P(A)}=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)}$$

将全概率公式(1.2.6)代入上式，得

$$P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)} \tag{1.2.7}$$

式(1.2.7)称为贝叶斯公式。若将 $P(B_i)$ 称为先验概率，则由贝叶斯公式知，在已知先验概率 $P(B_i)$ 和条件概率 $P(A|B_i)$ 的前提下，后验概率 $P(B_i|A)$ 可通过一系列先验概率求得。贝叶斯公式在管理科学的重要分支统计决策中非常有用。

§1.3 随机变量和随机过程

通常，在应用概率论中往往并不明确地使用概率空间和样本空间。人们为了能够采用数学分析的方法来研究随机试验，往往采用某个(些)函数来描述随机试验的结果，这种函数称之为

随机变量。

定义 1.3-1 设某随机试验的概率空间为$(\Omega,\mathscr{F},P)$，若对于每一试验结果$\omega\in\Omega$，均有某实值$X(\omega)\in E$与之对应，即$X(\omega)$是试验结果ω的一个函数，且对于任意实数x，集合$\{\omega:X(\omega)\leqslant x\}\in\mathscr{F}$，则称$X(\omega)$为随机变量，$E$称之为状态集合，或称为状态空间。

以后为方便起见，不必每次均写出概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$，且将$X(\omega)$简记为X。代之常用状态空间E表征随机变量与概率空间的联系。

最常见的状态集合E有：

(*a*) 非负整数集合$N^+=\{0,1,2,\cdots\cdots\}$

(*b*) 整数集合$N=\{\cdots\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\cdots\}$

(*c*) 实数集合$R=(-\infty,+\infty)$

(*d*) 非负实数集合$R^+=[0,+\infty)$

(*a*)、(*b*)两种情况称为可列无限集合，当E为可列有限集(如，$E=\{1,2,\cdots,N\}$)或可列无限集时，称X为离散型随机变量。

例 1.3-2 考察"测试12个灯泡的平均寿命"这一随机试验。显然，样本空间Ω是所有12元组$\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{12})$组成的集合，其中对所有$i$，$\omega_i\geqslant 0$，$\omega_i$表示某次试验时，第$i$个灯泡的寿命$1\leqslant i\leqslant 12$。设$X$为

$$X(\omega)=\frac{1}{12}(\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_{12})$$

则X为一个定义在Ω上的随机变量，它表示12个灯泡的平均寿命。显然，X的状态空间为

$$E=R^+=[0,+\infty)$$

定义 1.3-3 一族无穷多个随机变量组成的集合$\{X_t;t\in T\}$称为一个随机过程，其中集合T称为参数集，各个X_t是定义在相同的概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上，各随机变量X_t均在同一状态空间E中取值。

该定义的另一叙述方式为：随机过程是以参数集T为定义域，以随机变量为值的"算子"。

此外，还可以用另一种观点处理随机过程；若把试验结果ω固定，则$X(\cdot\omega)$是T上的函数。这样，可将随机过程看作是以Ω为定义域，以T上函数为值的"算子"。因此，可给出随机过程的一个等价定义。

定义 1.3-4 对于给定的概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$，若对于每个$\omega\in\Omega$，有取值为T上的函数$X(\cdot\omega)$* 与之对应，且使得对每一个$t\in T$，$X(t,\cdot)$均是随机变量，则称$\{X(t,\omega),t\in T\}$为随机过程，简记为$\{X_t;t\in T\}$。

最常见的参数集类型有

(*a*) $T=N^+=\{0,1,2,\cdots\cdots\}$

(*b*) $T=R^+[0,+\infty)$

称前者为离散参数的随机过程。否则，若T不可数，则称相应的随机过程为连续参数的。

通常，可将$t\in T$认为是时间，于是，可将X_t看成是t时刻过程所处的"状态"或"位置"。

例 1.3-5 设Y_i表示某工厂在第i月份的生产产量，则$X_n=\sum_{i=1}^{n}Y_i$为该厂前n个月的累积产量。设$Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$为相互独立、服从相同分布的随机变量，则随机变量集合$\{X_n;n=1,2,3,$

* 记号$X(\cdot\omega)$表示ω固定，t在T中变化。类似地，$X(t,\cdot)$表示t固定，ω在Ω中变化。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

…}即为一个随机过程，称其为“一般随机移动过程”，在第 i 步时移动的步幅为 Y_i。

例 1.3-6 飞机在大气紊流中沿既定飞行轨迹飞行。设 $H_0(t)$为既定飞行高度，由于大气紊流的随机扰动，对于每次观测所记录下的实际高度随时间变化的结果，即使在相同飞行条件下所得到的也是不同的飞行高度-时间函数，见图 1-1。由图知，每次观测到的飞行高度随时间 t 变化的过程并不准确地等于 $H_0(t)$，而是在 $H_0(t)$上下波动。换言之，实际的飞行高度在任一

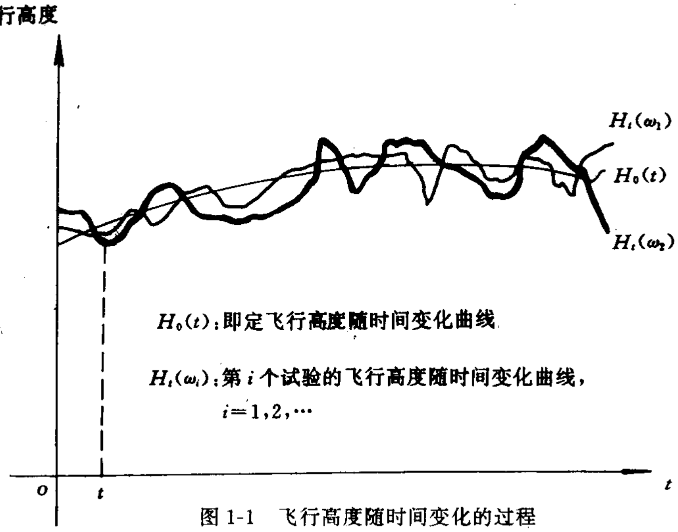

图 1-1 飞行高度随时间变化的过程

确定时刻均为随机变量。若以 H_t表示 t 时刻飞机所飞行的高度，则对于给定的 t，H_t 为随机变量，$\{H_t;t\geqslant 0\}$即为一个连续时间参数、连续状态空间的随机过程。

例 1.3-7 考查“某商店的顾客到达过程”。对某一个观测结果 ω，令 $N_t(\omega)$为在时间区间 $[0,t)$内顾客的到达数。则对每一个 $t\in T=R^+=[0,+\infty)$，N_t 是一个在状态集 $E=\{0,1,2,\cdots\}$中取值的随机变量。于是$\{N_t;t\in R^+\}$是一个连续时间参数、离散状态空间的随机过程。对于每一个固定的 ω，$N_t(\omega)$是 t 的一个非减、右连续且只能是跳跃增加的函数，如图 1-2 所示

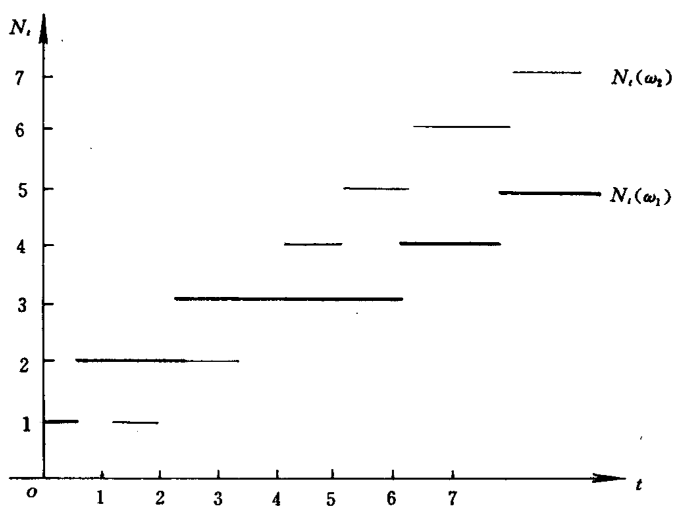

图 1-2 到达过程的一个实现

由以上例题知，我们也可根据 X_t 所取值的特征，将随机过程按状态空间是连续型还是离散型将其分类为连续型随机过程或者是离散型随机过程。

§1.4 随机变量的分布函数与随机过程的概率分布

为了刻划一个随机变量，我们还需要说明它的概率分布，以便更好地研究随机变量的统计规律性。

设 X 为一个离散型的随机变量，它的一切的可能取值为 $x_i, i=1,2,\cdots$，且 $x_1<x_2<\cdots$，设事件 $\{X=x_i\}$ 的概率为

$$P\{X=x_i\}=p_i, \qquad i=1,2,\cdots \tag{1.4.1}$$

则称(1.4.1)为离散型随机变量 X 的概率分布，显然，由定义 1.1-3，有

$$p_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\cdots, \qquad \sum_{i=1}^{\infty}p_i=1$$

离散型随机变量的概率分布函数定义为

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=\sum_{x_i\leqslant x}P\{X=x_i\} \tag{1.4.2}$$

设 X 为一个连续型的随机变量，则其分布往往由它的分布密度 $f(x)$ 给出。

若存在非负函数 $f(x)$，且 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x<+\infty$，对于任意实数 x 有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t \tag{1.4.3}$$

则称 X 为连续型随机变量，$f(x)$ 称为 X 的概率密度函数，$F(x)$ 为 X 的分布函数。

显然，分布函数 $F(x)$ 具有下述性质：

1. $F(x)$ 为单调非降函数；
2. $F(x)$ 是右连续的；
3. $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$ ，$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$

我们称 $F(x,y)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的联合分布函数，若对任意的实数 x,y 有

$$F(x,y)=P\{X\leqslant x,\ Y\leqslant y\} \tag{1.4.4}$$

若 $F(x,y)$ 可表示成

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{1.4.5}$$

则称 $f(x,y)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数。若

$$F_1(x)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=F(x,\infty) \tag{1.4.6}$$

$$F_2(y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=F(\infty,y) \tag{1.4.7}$$

则称 $F_1(x)$ 和 $F_2(y)$ 分别为二维随机变量 (x,y) 关于 X 和关于 Y 的边际分布函数，称

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}y \tag{1.4.8}$$

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x \tag{1.4.9}$$

分别为二维随机变量(X,Y)关于X和关于Y的边际概率密度函数。若X,Y统计独立,则

$$F(x,y)=F_1(x)F_2(y) \tag{1.4.10}$$

$$f(x,y)=f_1(x)f_2(y) \tag{1.4.11}$$

否则,称它们是相依的。

类似地,可以把二维分布的概念及其结论直接推广到任意有限维随机变量的情况。若对于任意实数$x_1,x_2,\cdots,x_n$,有

$$F(x_1,x_2,\cdots x_n)=P\{X_1\leqslant x_1,X_2\leqslant x_2,\cdots X_n\leqslant x_n\} \tag{1.4.12}$$

则称$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为n维随机变量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的分布函数。若$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$可表示成

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\cdots\int_{-\infty}^{x_n}f(u_1,u_2,\cdots,u_n)\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_n \tag{1.4.13}$$

则称$f(x_1,x_2\cdots x_n)$为n维联合概率密度。

类似于事件的条件概率的定义,我们还可建立起随机变量的条件概率分布函数的概念,进而得出条件概率密度函数的定义(见文献[1])。

将上述概念引入随机过程中,就得到随机过程的有关概率分布的概念。

设$X=\{X_t;t\in T\}$为一个随机过程,如前定义,对于任一个固定时刻$t_1\in T$,X_{t_1}为一个随机变量。我们称

$$F_1(t_1;x_1)=P\{X_{t_1}\leqslant x_1\} \tag{1.4.14}$$

为随机过程$\{X_t;t\in T\}$的一维分布函数。与随机变量的概率密度相类似,若存在二元函数$f_1(t_1;x_1)$使得下式成立

$$F_1(t_1;x_1)=\int_{-\infty}^{x_1}f_1(t_1;u)\mathrm{d}u \tag{1.4.15}$$

则称$f_1(t_1;x_1)$为随机过程X的一维概率密度函数。为了刻划随机过程在不同时刻状态之间的联系,引入随机过程多维分布函数的定义如下:

若对于任意$t_1,t_2\in T$,且$t_1\neq t_2$,存在函数F_2使得下式成立

$$F_2(t_1,t_2;x_1,x_2)=P\{X_{t_1}\leqslant x_1,X_{t_2}\leqslant x_2\} \tag{1.4.16}$$

则称$F_2(t_1,t_2;x_1,x_2)$为随机过程X的二维分布函数。若存在函数f_2使得

$$F_2(t_1,t_2;x_1,x_2)=\int_{-\infty}^{x_2}\int_{-\infty}^{x_1}f_2(t_1,t_2;u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{1.4.17}$$

成立,则称函数$f_2(t_1,t_2;x_1,x_2)$为随机过程X的二维概率密度函数。

一般地,可定义随机过程的n维联合分布如下

$$\begin{aligned}&F_n(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n)\\&\quad=P\{X_{t_1}\leqslant x_1,X_{t_2}\leqslant x_2,\cdots,x_{t_n}\leqslant x_n\}\end{aligned} \tag{1.4.18}$$

我们称由一维、二维、……直至n维分布的集合

$$\{F_n(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n);\ t_1,\cdots,t_n\in T,n\geqslant 1\}$$

为随机过程X的有限维分布族。显然,若已求得了有限维分布族,便掌握了该随机过程中任意有限个随机变量的联合分布的信息,从而可完全确定诸随机变量之间的相互关系。

对于离散状态的随机过程,我们也可类似地用多维联合分布函数或多维联合分布律来描述该随机过程中多个随机变量的相互关系。当然,对于一般的随机过程,要确定其有限维分布

族是很困难的。

§1.5 数学期望值与母函数

在实际应用中，人们除了关心随机变量的分布外，还常常关心它的一些主要的数字特征，如随机变量在概率意义下的加权平均值即数学期望值以及偏离该均值的分散度等。尤其是在某些场合下，求出随机变量的概率分布非常困难，此时，数学期望值的概念就更为重要(如 $M/G/1$ 排队系统，见§11.1)。

定义 1.5-1 设 X 为离散型随机变量，其所有可能的取值为 $x_i, i=1,2,\cdots,n$，相应的概率为 $P\{X=x_i\}=p_i, i=1,2,\cdots,n$。若

$$E[X]=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i \tag{1.5.1}$$

存在，称 $E[X]$为 X 的数学期望值，简称为均值。

以上定义可方便地推广至连续型随机变量的情形：

定义 1.5-2 设 X 为连续型随机变量，且具有分布密度函数 $f(x)$。若积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x)\mathrm{d}x<+\infty$$

则称

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\mathrm{d}x \tag{1.5.2}$$

为连续型随机变量 X 的数学期望值。

我们不加证明地给出以下几个实用的计算期望值的公式，详细证明参见文献[1]。

对于任意实值型随机变量 X，其数学期望值可以表示为

$$E[X]=\int_{0}^{\infty}P\{X>t\}\mathrm{d}t-\int_{-\infty}^{0}P\{X\leqslant t\}\mathrm{d}t \tag{1.5.3}$$

对于任意非负的随机变量 X，有

$$E[X]=\int_{0}^{\infty}P\{X>t\}\mathrm{d}t \tag{1.5.4}$$

若随机变量 X 的取值范围为 $N^+=\{0,1,2,\cdots\}$，则其数学期望值为

$$E[X]=\sum_{n=0}^{\infty}P\{X>n\} \tag{1.5.5}$$

在实际计算期望值时，应视不同的问题选取计算方便的公式。通常，若给定的概率分布表达式是 $P\{X>t\}$或 $P\{X\leqslant t\}$，则应采用式(1.5.3)或式(1.5.4)，否则，采用定义式(1.5.2)或式(1.5.1)。

定义 1.5-3 在一个给定的时间区间中，到达某商店的顾客数是一个服从如下分布的随机变量 X，

$$P\{X=n\}=\frac{\mathrm{e}^{-8}8^n}{n!}\quad,\quad n=0,1,2,\cdots$$

于是，由定义(1.5.1)，求得

$$E[X]=\sum_{n=0}^{\infty}n\frac{\mathrm{e}^{-8}8^n}{n!}=8\mathrm{e}^{-8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$=8\mathrm{e}^{-8}\mathrm{e}^{8}=8(\text{人})$$

例 1.5-4 某元件的寿命 X 具有分布

$$P\{X \leqslant t\} = 1 - e^{-0.02t}, \quad t \geqslant 0$$

显然，X 是一个非负的随机变量，由式(1.5.4)，求得

$$E[X] = \int_0^\infty P\{X > t\}dt = \int_0^\infty e^{-0.02t}dt = 1/0.02 = 50$$

例 1.5-5 某离散型随机变量 X 具有分布

$$P\{X = n\} = pq^{n-1} \quad , \quad n = 1,2,\cdots$$

式中 $p,q>0,p+q=1$。

考虑到 X 为非负的离散型随机变量，由式(1.5.5)，对所有 $n \in N^+ = \{0,1,2,\cdots\}$

$$P\{X > n\} = \sum_{k=n+1}^{\infty} P\{X = k\} = \sum_{k=n+1}^{\infty} pq^{k-1} = q^n$$

因此

$$E[X] = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} = 1/p$$

读者可自行由定义(1.5.1)验证上述结果。

若 X 为在 E 中取值的随机变量，f 为从 E 映射到 R 的一个函数，则 $Y=f(x)$ 为在 R 中取值的随机变量。并容易求得 Y 的期望值表达式为

$$E[Y] = \sum_{x_i \in E} f(x_i)P\{X = x_i\}, X \text{ 离散时} \tag{1.5.6}$$

或当 X 连续时

$$E[Y] = E[f(x)] = \int_E f(t)d\varphi(t) \tag{1.5.7}$$

其中 $\varphi(t)$ 为 X 的分布函数。

以上两式表明，我们可不必求出 $Y=f(X)$ 的分布函数，而直接利用自变量 X 的分布就可求出函数 Y 的数学期望。

类似地，我们还可定义条件期望。若 Y 为离散型随机变量，则定义事件 A 发生的条件下 Y 的条件期望值为

$$E[Y|A] = \sum_b bP\{Y = b|A\} \tag{1.5.8}$$

其中 $P\{Y=b|A\}$ 即为 A 发生下，$Y=b$ 的条件概率。特别地，若令 $A=\{X=x_i\}$，其中 X 在 E 中取值，则

$$E[Y|X = x_i] = \sum_b P\{Y = b|X = x_i\} \cdot b \tag{1.5.9}$$

当 x_i 变化时，式(1.5.9)就在状态空间 E 上定义了一个 X 的函数

$$E[Y|X] = g(x), \qquad \text{其中 } g(x_i) = E[Y|X|x_i] \tag{1.5.10}$$

称 $E[Y|X]$ 为 X 发生下，Y 的条件期望。不难将条件期望的概念推广到连续型随机变量情形：

若 $[Y,X]$ 为连续型随机变量，则

$$E[Y|X] = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y|x)dy = g(X) \tag{1.5.11}$$

其中

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} \tag{1.5.12}$$

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,v)dv > 0 \tag{1.5.13}$$

称$f(y|x)$为在条件$X=x$下，Y的条件概率密度函数。

随机变量X的期望值粗略地描述了它的集中趋势，为了度量X偏离均值$E[X]$的程度，我们引入方差的定义。

定义 1.5-6 随机变量X的方差定义为

$$D[X]=E[(X-E[X])^2] \tag{1.5.14}$$

计算方差时，有时利用下式更为简便

$$\begin{aligned}D[X]&=E[(X-E[X])^2]=E[X^2-2XE[X]+(E[X])^2]\\&=E[X^2]-(E[X])^2\end{aligned} \tag{1.5.15}$$

在随机服务过程理论中，有时应用概率母函数来求解某些整值(即仅取非负整数值)随机变量的概率分布律和数字特征(如期望值、方差等)更为方便。

定义 1.5-7 设随机变量X为整值随机变量，其概率分布律为$p_k=P\{X=k\}, k=0,1,2,\cdots$。称实变数$\theta$的函数*

$$P(\theta)=E[\theta^X]=\sum_{k=0}^{\infty}p_k\theta^k \quad -1\leqslant\theta\leqslant 1 \tag{1.5.16}$$

为随机变量X的概率母函数。

考虑到 $P(1)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}p_k=1$

即式(1.5.16)右端的幂级数在区间$|\theta|\leqslant 1$上绝对一致收敛，因此，整值随机变量X的母函数总是存在的。

将式(1.5.16)求对θ的一阶导数，有

$$P'(\theta)=\sum_{k=1}^{\infty}kp_k\theta^{k-1}$$

于是

$$P'(1)=\sum_{k=0}^{\infty}kp_k=E[X] \tag{1.5.17}$$

一般地，母函数在$\theta=1$的各阶导数为

$$P^k(1)=E[X(X-1)\cdots\cdots(X-k+1)] \tag{1.5.17}$$

特别地，由

$$P''(1)=E[X(X-1)]$$

得

$$E[X^2]=P''(1)+E[X]=P''(1)+P'(1) \tag{1.5.18}$$

母函数的另一重要结论为，整值随机变量X的概率分布p_k正是$P(\theta)$的幂级数展开式中θ^k的系数，这个特性在求某些排队系统的概率分布时十分有用。

对于随机过程$\{X_t;t\in T\}$，我们也可类似地引入均值与方差的概念。

定义 1.5-8 设$X=\{X_t;t\in T\}$为一随机过程，若对于每一个$t_1\in T$，随机变量X_{t_1}的均值与方差均存在，令

$$m(t)\triangleq E[X_t] \tag{1.5.19}$$

$$D[X_t]\triangleq E[(X_t-m(t))^2] \tag{1.5.20}$$

分别称$m(t)$、$D[X_t]$为随机过程X的均值函数与方差函数。

---

* 有时实变数记为z或s，相应的概率母函数记为$P(z)$或$P(s)$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com