高等学校教材

线性代数及其应用

张肇炽 主编　曹锡华 主审

西北工业大学出版社

高等学校教材

线性代数及其应用

张肇炽　主编

张肇炽　符丽珍　等编

西北工业大学出版社

1992年6月　西安

(陕)新登字第 009 号

【内容简介】　本书是根据多年教学经验，在原讲义基础上经过修改补充而成。书中除介绍了线性代数的基本理论和方法外，还介绍了有广泛应用的若干近代理论和方法。全书共九章，以线性空间与线性变换为主线展开，视点较高，开始则从几何向量讲起，直观性强，便于接受。最后一章介绍了线性代数方法在众多不同领域中的应用。各章配置了大量例题。全书习题共 500 多道，并附有参考答案。

本书可作为理、工、经、管等专业的教材，亦可供自学读者及有关科技人员参考。

高等学校教材
线性代数及其应用
张肇炽　主编
责任编辑　蔡增寿
责任校对　力　丽
*
西北工业大学出版社出版
(西安市友谊西路 127 号)
陕西省新华书店发行
西北工业大学出版社印刷厂印装
ISBN 7-5612-0348-9　O·42 (课)
*
开本 850×1168 毫米 1/32　16.25 印张　381 千字
1992 年 6 月第 1 版　1992 年 6 月第 1 次印刷
印数：1-1500 册　　定价：4.15 元

前　言

线性代数是在19世纪后期发展起来的一个数学分支，已成为当代高等理工教育的基础学科之一，以讨论有限维线性空间的线性理论与方法为主要内容，具有较强的逻辑性、抽象性与广泛的实用性。目前，在我国高校不仅理、工、经、管类专业普遍开设了这一课程，而且一些人文学科专业也开设了这门课程。这本《线性代数及其应用》，是在西北工业大学1982年讲义及1986年修订本基础上进一步修改增删而成，供每周3～4学时各专业类的线性代数课程一学期使用。原编是反映近年来这门课程教学改革的一本讲义，它的前言中写道："考虑到现代科学技术领域显示出的对线性代数理论和方法愈益增长的需要，本讲义在课时变动不大的情况下，在内容上比原教育部颁发的工科线性代数教学大纲略有增加。在体系上，则尽量把代数和几何结合起来；我们没有采用通常线线性代数教材……的'块状'结构，而以线性空间和线性变换的观点和方法统一处理了这些内容，藉以突出现代数学中集合与函数的基本思想，……。本讲义先从直观的几何向量讲起，逐步建立起抽象空间的概念。有关数值代数的内容，则留给了计算方法课程。"实践表明，这些设想是有益的。这次修订出版时仍予遵循。

本书第一章向量代数，是为建立线性代数中抽象空间概念提供直观的几何背景，其中§1.1至§1.6限于3维空间中讲述，对于在《高等数学》或其他课程中已经学习过相应内容的读者，稍事系统回顾，随后就可以进入n维向量的推广和讨论，这是自§1.7开始的内容。

在前一章基础上，我们以向量的线性运算（加法与数乘）为

模型，按照线性代数课程现行的国际标准，用公理化方法引进了抽象的线性空间概念，并附以丰富的例证进行阐释。这些例子分别来自分析、几何与代数。在一些常规讨论之后，又以向量的点积（数积）运算为模型，引进了线性空间的内积，介绍了欧氏空间的基本理论。Gram-Schmidt 正交化过程也在这里讲述。最后还介绍了正交补概念和逼近问题，给出了相应定理。

第三章中，以熟悉的实数轴上的线性函数为模型，抽象出一般线性空间的线性变换的概念，并附以大量阐释性的例证，它们同样来自数学的许多不同分支。在介绍了变换的像子空间、核子空间的概念、秩与亏的计算后，接着讨论了线性变换的代数运算，它们关于线性运算构成线性空间，关于乘法运算是有单位元的半群，乘法关于加法（有意义的话）满足分配性。随后讨论了可逆（一一）变换，介绍了同构的概念，进而得到了维数相同的线性空间同构的定理。这一章还讨论了线性扩张，进而从线性变换的表示自然地引进了矩阵概念，讨论了一类特殊的矩阵——对角形阵的构造，介绍了矩阵的标准形和矩阵的秩的概念。

第四章集中介绍了矩阵的运算。这里我们既把矩阵看作一类独立的数学对象来进行讨论，又处处从它作为线性变换的表示来加以考察。在矩阵的线性运算、乘法运算及转置之后，较为着重地介绍了矩阵分块以及单位坐标向量的应用。

第五章用线性变换的观点讨论了线性方程组及其解，从而方便地解决了解的存在（相容性）和解的结构问题。在此还给出了存在性的许多等价的命题。通过实例具体介绍了实际求解方法——Gauss 消去法及 Gauss-Jordan 消去法，进而介绍了初等矩阵，从而也给出了求矩阵标准形、矩阵秩的初等变换方法：非异矩阵概念及用初等变换求方阵的逆，也在这里作了介绍。在 Gauss 消去法的基础上，还介绍了矩阵的 LU 分解。最后又讨论了矛盾方程组及其最小二乘解和矩阵的 QR 分解。

第六章介绍了 n 阶矩阵的行列式，从熟悉的二、三阶行列式出发，归纳地给出了 n 阶的定义，不加证明地介绍了读者已经熟悉的行列式性质和一二新的性质。在此，我们指出，行列式是多线性的交错函数，且在单位方阵处的值为 1，揭示了公理化定义的途径。这一章着重讨论了行列式在矩阵和线性方程组理论中的应用。最后介绍了 Laplace 展开定理的一般形式，而前面的归纳定义其实是它按一行（列）展开的特殊性情形。

第七章特征值与特征向量问题在矩阵理论中起着关键作用。我们是从具有对角形方阵表示的线性变换着手讨论的，从而较自然地引进了变换的特征值与特征向量的概念；在转化为矩阵问题后讨论了它们的计算，这里应用了行列式的理论。从同一线性变换的不同方阵表示介绍了矩阵相似的概念。接着讨论了重要的 Hamilton-Caylay 定理和最小多项式。最后还给出了 Jordan 标准形定理，这里，我们的介绍基于 A.F.Filippov 70 年代初期给出的证明，较之现有的大多数概念迭出、过程冗繁的证明，这也许是最为简明的一个。我们知道，通常只有在多学时理科教材中才认真讲述这一定理的有关证明，而且往往需要写成整整一章。现在的简化方法只用了一节的篇幅，从而使得它在学时不多的教程中也能得到完整的介绍，而 Jordan 定理正是最终完成相似变换理论的根本定理。这一节末尾，我们还给出了 Jordan 形阵的一种简便算法。

第八章是从一般的双线性型（双线性泛函或双线性形式）的介绍开始的，二次型是特殊的一类对称双线性型的特定相伴形式。讨论中给出了对称双线性型的对角形矩阵表示这一主要定理。从同一双线性型的不同矩阵表示介绍了矩阵合同（相合）的概念，相应地讨论了二次型的平方和形式——标准形以及它的规范形，这里给出了化为标准形的初等变换方法和 Lagrange 配方法，讨论了二次型的定型——型值分类问题以及相应的判定准

则．这一章进一步讨论了正交矩阵与正交变换、对称矩阵与对称变换，以及用正交变换化二次型为标准形。最后介绍了二次型理论的一个应用——一般二次方程化简问题。

最后一章集中介绍了线性代数的理论与方法，在许多不同领域的一些应用，自然也要涉及数学的若干分支．介绍主要是通过一系列典型例题进行的。这里既有一些十分简单的矩阵、方程组的运算问题，而更多地是一些线性代数应用的经典范例和较新领域。所涉内容遍及电学、化学、力学、遗传学、系统控制、优化、扩散理论、人口模型、经济、管理、密码学以及 CAD 计算、频谱分析等等，可以根据不同专业适当选学。应用介绍按典型问题集中安排，一是为了使问题的提出、分析和解决，不致因教材编写而人为地割裂；二是为了便于教师灵活掌握和运用，如果需要，也完全可以在相应章节适当穿插进行教学。

本书还包含了广义逆矩阵 A^{+}的一个简短附录。目前，广义逆矩阵的理论已经成为线性代数以及许多其它学科的重要工具，并正在迅速发展。

全书配置了大量例题，每章都附了较多的习题，其中一部分是为巩固和掌握所学基本理论与方法必须的练习；一部分是为磨炼和提高解题的方法与技巧选作为题型；还有一部分则是本书正文的适当扩充和延伸．教师可以根据实际情况斟酌选用．读者也可根据自身的兴趣、能力选作。

本书也可供学时较少的课程选用。如果学时不足 40，则带＊号内容以及一些定理的证明、一些例题的演示可以省略。这将不致影响基本内容的教学。这些省略的内容，有些可视情况交由同学课外自学，即使学时较多，也可以部分内容交由同学自学，以培养这方面的能力。包括课堂讲授的全部内容在内，无疑也都需要经过课前课后认真的独立钻研，才能较好地领会和掌握。这种独立思考的学习方法，对于不少低年级大学生来说，往往感到

困难以至困惑，但却值得他们从一开始就以自己的全部努力去认真学会，这将对他们今后各阶段的学习和工作大有裨益。本书还可供学习了少学时线性代数课程的读者，作为提高的选修课程教材或自学读物。这时读者将看到一个全新的角度，一种较高的观点，一套融代数方法与几何构造于一体的理论系统，正展现在他的面前。

全书第一～八章、第九章§1～§15和§18由张肇炽编写；§9.16、§9.17、§9.19、§9.20、§9.21各节，分别由刘克轩、蒋大为同志，张德昌教授、鲍国华副教授和屠庆平同志编写；附录由徐仲同志编写。张肇炽对全书进行了统稿。符丽珍副教授参加了全书各章修改定稿，改正了一些漏误，协助完成了包括清稿在内的各项工作。

本书自初稿起虽经多次使用和修改，我们始终是不很满意的。现在整理出来正式出版，并非由于它已是一本成熟的教材，而是希望在更多人使用的基础上得到进一步修改。为此，恳请同行专家和广大读者不吝指正。

除编者外，西北工业大学应用数学系车刚明、肖亚兰、杨月茜同志，田铮副教授及赵星华同志等曾先后使用了讲义初稿或修订本。程云鹏教授、张德珍副教授、王居友副教授审阅了讲义初稿；西北大学胡希正教授耐心地校阅了讲义的油印本。他们提出一些宝贵的建议。西工大的同仁和一些兄弟院校的同行专家，也在初稿使用过程中提供了不少有益的意见。值此机会，谨向所有关心、支持本书各项工作的人们，深表谢忱！

代数学家、中国数学会理事、上海市数学会理事长、国家教育委员会高等学校理科教材编审委员、代数与数论编审组成员、博士导师曹锡华先生审阅了本书全稿。他高度的评价、富有远见的建议，对全书定稿无疑甚有助益、笔者表示衷心感谢！

自本书初稿开始编写直至这次修改付印，先后十年间参阅了

大量国内外出版的标准著作和教材（书末附有主要参考文献目录），受到不少启发和教益，在此谨向有关作者致以诚挚的谢意!

张肇炽

1989年8月于西安

目　　录

第一章　向量代数

§1.1　几何向量

现实世界中，有一些量，例如质量、温度、时间、体积、距离和功等等，在取定相应的单位以后，只用一个实数就完全可以表示了。这种只有“大小”的量叫做数量或纯量。

另外还有一些量，它们不但有大小，而且还有方向。例如一个质点的位移，是指沿着一个方向移动一段距离，这就是一种既有大小又有方向的量。又如力、速度、加速度、力矩等等，虽然各具不同的物理意义，但都是同时具有大小和方向的量，象这样的量叫做向量或矢量。

在中学，复数曾经用平面上的向量表示，物理学中也早已用到过向量。其实，不仅物理学中广泛应用着向量作为研究工具，在微积分中，特别在直线，平面和空间曲线的几何学研究，以及工程技术领域中，也常要用到向量。

通常用画出有向线段的方法来表示一个向量的大小和方向。有向线段$\overline{PQ}$表示向量，意思是用$\overline{PQ}$的长度表示向量的大小，用端点的顺序 $P \to Q$ 表示向量的方向，第一个端点 P 叫做起点，第二个端点 Q 叫做终点。

对于向量，我们只考虑大小和方向。因此在用有向线段表示向量时，起点可以任意选取。这就是说，长度相等、方向相同的有向线段$\overline{PQ}$和$\overline{RS}$表示相同的向量。这时向量$\overline{PQ}$和$\overline{RS}$叫做相等，记做$\overline{PQ}=\overline{RS}$。这正是 $PQSR$ 形成一个平行四边形的情形（图 1.1）。

这样定义的向量，由于起点可以“自由”选取，所以也叫做**自由向量**。并不是所有的“向量”都自然而然地符合这样的规定。有些向量，例如力矩，不仅依赖于它的大小和方向，同时还由它的起点所确定。

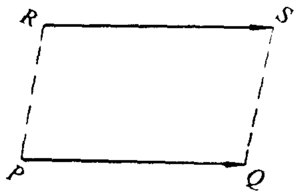

图 1.1

自由向量的概念，是将向量概念中本质的东西(大小和方向)保留下来，而抛弃它的次要属性(起点和终点)。自由向量的起点可以放置在空间任意选取的某一点上，从而得到以该点为起点的向量。如果我们在空间(平面)指定一点 O，叫做**原点**，其中的一切向量都认为是以这一点 O 为起点。这样一来，向量 $\mathbf{OP}$ 可以简化为 $\mathbf{P}$，它以 O 为起点。这样的向量也叫做关于原点 O 的**位置向量**(或**定位向量**、**向径**)。以后凡提及向量一般是指自由向量，但为讨论方便，有时又要确定一个起点，从而考虑作为位置向量。

除了上面的记法，通常也用粗体小写拉丁字母 $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$，$\mathbf{x}$，$\mathbf{y}$ …，表示向量．向量 $\mathbf{a}$ 的长度记做 $\|\mathbf{a}\|$。

与向量 $\mathbf{a}$ 长度相等而方向相反的那个向量叫做 $\mathbf{a}$ 的反向量（或负向量）．记做 $-\mathbf{a}$。例如一个力的反作用力是它的反向量。显然，

$$-\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{QP},$$

$$-(-\mathbf{a})=\mathbf{a}.$$

§1.2 向量加法

点 O 接连作了两次位移 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$，合起来也是一个位移 $\mathbf{s}$。第一次点 O 经位移 $\mathbf{a}$ 到了点 P，第二次点 P 经位移 $\mathbf{b}$ 到了 R，合起来就是从 O 移到了 R 的位移 $\mathbf{s}$。位移合成的方法是作一个三角形，接连在三角形的两边上所作的位移，合起来就是第三边上的位移(图 1.2)。

也可用作三角形的方法来求合力。这只要把一个力的起点移到另一个力的终点上去就行了。

力或位移的这种合成法，对于一般向量也有意义。现在定义向量的加法:

［**定义**］ 向量加法　设已给向量 $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$，从一点 O 起始，接连作出两个向量 $\overrightarrow{OP}=\mathbf{a}$，$\overrightarrow{PR}=\mathbf{b}$，得折线 OPR，从折线起点 O 到终点 R 的向量 $\mathbf{s}$，叫做 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的和，记做 $\mathbf{s}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$($\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OR}$)。这种作图法叫做向量加法的三角形法则。

类似地可以定义向量加法的平行四边形法则(图 1.3)。

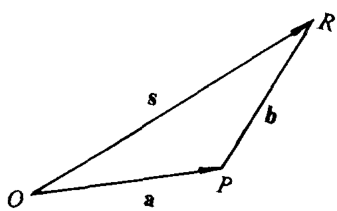

图 1.2

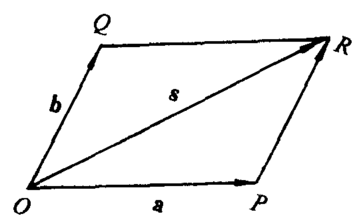

图 1.3

显然，向量和 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 与起点的选取无关，从不同的起点作