高等数学

典型方法及习题课教程

GAODENG SHUXUE DIANXING FANGFA JI XITIKE JIAOCHEN

武汉汽车工业大学数学教研室　编著

武汉工业大学出版社

GAODENG SHUXUE DIANXING FANGFA JI XITIKE JIAOCHEN

高 等 数 学

典型方法及习题课教程

武汉汽车工业大学数学教研室　编著

武汉工业大学出版社

·武　汉·

（鄂）新登字 13 号

内 容 简 介

本书按照理工科大学高等数学课程的教学要求和通用教材的讲授顺序编写 25 讲．每讲包括教学目的与要求、典型方法与范例、练习、答案．典型方法与范例部分按照题型分类，揭示解题规律，归纳、总结解题方法．全部习题基本上覆盖了读者在高等数学学习中可能遇到的问题类型．书末附有 1987—1994 年全国硕士研究生入学数学试题分类简答．本书是高等数学习题课教材，也可用作理工科大学生学习高等数学的参考书，还可作报考硕士研究生的应考复习资料．

图书在版编目（CIP）数据

高等数学典型方法及习题课教程/武汉汽车工业大学数学教研室编著．—武汉：武汉工业大学出版社，1995．6

ISBN 7-5629-0965-2

Ⅰ．高…　Ⅱ．武…　Ⅲ．高等数学-数学方法，典型-教材

Ⅳ．O13

武汉工业大学出版社出版发行

（武汉市珞狮路 14 号　邮编 430070）

武汉工业大学出版社核工业中南三〇九印刷厂印刷　　各地新华书店经销

1995 年 6 月第 1 版　　1995 年 6 月第 1 次印刷

开本：850×1168　1/32　印张：14.875　字数：379 千字

印数：1—5100 册　　定价：13.80 元

前　　言

高等数学是工科院校重要的基础理论课，它不仅是学习后续课程和将来从事理论、实际工作的必要基础，而且对学生各种能力的培养有着重要的作用，因此，高等数学课程的教学质量将直接或间接地影响着高质量人才的培养.我们在长期的教学过程中，深感加强高等数学典型方法与习题课的教学是提高该门课程教学质量的重要环节，为此，我们根据多年积累的资料著成此书. 本书是我们长期教学经验的结晶，是多年教学研究的成果.

本书是根据国家教委工科数学课程指导委员会制定的《高等数学课程教学基本要求》，按照高等数学课程通用教材的顺序而编写的. 本书各讲由教学目的与要求、典型方法与范例、练习、答案四个部分组成.典型方法与范例部分对数学方法进行归纳总结，力图把基本理论、基本方法、解题技巧等多方面的教学要求，融于典型方法与范例之中. 通过对范例的剖析、解答和论证，帮助读者深化对高等数学概念和理论的理解，提高解题和证题的能力，掌握思考问题和处理问题的方法和技巧. 范例具有典型性、示范性，有助于读者举一反三. 范例中不只是给出解题过程，而且着重揭示解题规律，分析解题思路，引导读者思考，重视解决问题的思维过程，培养读者的思维能力，特别是逻辑思维和抽象思维的能力，把传授知识和培养分析问题和解决问题的能力有机地结合起来，使本书独具特色，颇有新意. 在不少范例之后，通过评注，进一步开拓思路、画龙点睛. 本书重视讲练结合，有利于读者理解、消化与掌握所讲授的内容. 除每讲有相当数量的练习题外，还安排了两个综合练习. 习题总量在1000题以上，基本上覆盖了读者在高等数学方面可能遇到的问题类型. 此外，为了与全

国硕士研究生入学数学考试接轨，书末附录1987—1994年全国硕士研究生入学数学试题分类简答(含线性代数)，供读者参考.

全书思路清晰，推理严谨，行文流畅，叙述详细，便于自学，这就为教师在教学过程中进行精讲提供了条件，从而使每次习题课可以让学生有一定时间在教师指导下进行解题训练.

本书可供高等理工科院校作为习题课教材，也可作为理工科大学生学习高等数学的参考书，同时对于准备报考硕士研究生的广大考生，本书也是他们理想的应考复习资料.

本书由欧阳家之、张小柔、史南星、吴传生、蔡宏材、葛翔宇执笔，武汉汽车工业大学数学教研室全体同志都为本书付出了劳动. 由于我们水平所限，书中难免有不足或错误之处，恳请同行专家和广大读者提出宝贵意见.

著 者

目　　录

第 1 讲

极限的概念与计算

【教学目的与要求】

(1)理解数列极限与函数极限的定义,并能利用它们来验证极限并进行较简单的理论证明. 培养学生的逻辑推理能力.

(2)掌握已学过的求极限的基本方法与技巧,培养学生的运算能力并加深对极限概念和有关理论的理解.

【典型方法与范例】

1. "$\varepsilon-N$"方法与"$\varepsilon-\delta$"方法及其应用

用数列极限的"$\varepsilon-N$"定义或函数极限的"$\varepsilon-\delta$"定义来验证极限或进行论证的方法,通常称为"$\varepsilon-N$"方法或"$\varepsilon-\delta$"方法. 它们是高等数学中重要的论证方法之一.

掌握这两个方法的关键在于应用:

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ N>0$, 当 $n>N$ 时, 恒有 $|x_n-a|<\varepsilon\Rightarrow$ 对于特定的 $\varepsilon>0$, $\exists\ N>0$, 当 $n>N$ 时, 恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ \delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon\Rightarrow$ 对于特定的 $\varepsilon>0$, $\exists\ \delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

【例 1】 用"$\varepsilon-N$"方法验证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\quad(a>0)$.

证 分三种情况证明.

(1)当 $a>1$ 时, 对任给 $\varepsilon>0$, 要 $|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$, 只要 $n>$

$\frac{1}{\log_a(1+\varepsilon)}$.

于是，对任给 $\varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{1}{\log_a(1+\varepsilon)}\right]$，则当 $n>N$ 时，恒有 $|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1 \quad (a>1).$$

(2)当 $0<a<1$ 时，令 $b=\frac{1}{a}$，则 $b>1$，有

$$|\sqrt[n]{a}-1|=\left|\frac{1}{\sqrt[n]{b}}-1\right|=\frac{|\sqrt[n]{b}-1|}{\sqrt[n]{b}}\leqslant|\sqrt[n]{b}-1|.$$

已知 $b>1$，由(1)知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b}=1$，所以对任给 $\varepsilon>0$，总存在自然数 N. 当 $n>N$ 时，恒有 $|\sqrt[n]{b}-1|<\varepsilon$，从而 $|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1 \quad (0<a<1).$$

(3)当 $a=1$ 时，命题显然正确.

综上所述，当 $a>0$ 时，总有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

注 用数列极限的定义验证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，通常的步骤是：

(1)任给 $\varepsilon>0$；

(2)解不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$，求 N，使得当 $n>N$ 时，$|x_n-a|<\varepsilon$；

(3)由 $n>N$ 时，$|x_n-a|<\varepsilon$ 恒成立，得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

这里关键是第(2)步. 寻找 N 的方法有：

(Ⅰ)直接法：即从 $|x_n-a|<\varepsilon$ 直接解出 n，随即获得 N，如本例中之(1).

(Ⅱ)放大法：当 $|x_n-a|<\varepsilon$ 不易解时，可将 $|x_n-a|$ 适当放大，得 $|x_n-a|\leqslant f(n)$，然后解不等式 $f(n)<\varepsilon$ 求 n，从而确定 N，如本例中之(2).

所谓“适当放大”，就是既要放大，又不能放得太大. 放大的原则是：①放大后的式子比较简单；②放大后的 $f(n)$ 必须以 0 为极限.

用函数极限的"$\varepsilon-\delta$"定义验证函数极限的思想与步骤和数列极限的"$\varepsilon-N$"方法类似.

【例 2】 用极限定义验证$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5x-1}{6(x+1)}=\dfrac{1}{3}$.

分析 用定义证明此极限的关键是对任意的 $\varepsilon>0$，能够找到 $\delta>0$，使当 $0<|x-1|<\delta$ 时，恒有

$$\left|\frac{5x-1}{6(x+1)}-\frac{1}{3}\right|=\frac{|x-1|}{2|x+1|}<\varepsilon. \tag{1}$$

为了找出使(1)式成立的条件 $0<|x-1|<\delta$ 中的 δ，利用放大法，保留上式中的$|x-1|$因子，去掉其它含 x 的因子. 具体做法是：因 $x\to1$，所以可先限定 $0<|x-1|<1$，于是

$$\begin{aligned}|x+1|&=|(x-1)+2|\geqslant\big||x-1|-2\big|\\&=2-|x-1|\geqslant2-1=1,\end{aligned}$$

从而
$$\left|\frac{5x-1}{6(x+1)}-\frac{1}{3}\right|=\frac{|x-1|}{2|x+1|}\leqslant\frac{1}{2}|x-1|.$$

所以，当 $0<|x-1|<1$ 时，要(1)式成立，只要$|x-1|<2\varepsilon$ 即可.

证 任给 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\min(1,2\varepsilon)$，则当 $0<|x-1|<\delta$ 时，恒有

$$\left|\frac{5x-1}{6(x+1)}-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon,$$

所以
$$\lim_{x\to1}\frac{5x-1}{6(x+1)}=\frac{1}{3}.$$

【例 3】 证明：若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则存在点 x_0 的一个去心邻域，在这个邻域内 $f(x)$有界(局部有界性)。

证 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Rightarrow$对于 $\varepsilon=1$，$\exists\ \delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有$|f(x)-A|<1$，从而

$$|f(x)|=|f(x)-A+A|\leqslant|f(x)-A|+|A|<1+|A|.$$

所以，取 $M=1+|A|$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有$|f(x)|<M$，即 $f(x)$在点 x_0 的一个去心邻域内有界.

2. 已学过的求极限的一些方法

在理解极限概念的基础上，熟练掌握求极限的方法，是极限部分的学习重点.

2.1 利用“有界函数与无穷小量之积为无穷小”的定理

【例 4】 求$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}(\sin x+\operatorname{arctg}x)$.

解 这里不能运用乘积的极限的运算法则.

由于$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$，$|\sin x+\operatorname{arctg}x|\leqslant 1+\frac{\pi}{2}$，所以根据有界函数与无穷小之积为无穷小，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}(\sin x+\operatorname{arctg}x)=0.$$

2.2 利用极限的四则运算法则

在利用极限的四则运算法则求极限时，应注意这些法则的适用条件. 例如，求$\lim\limits_{x\to e}\frac{x-1}{\ln x-1}$，由于$\lim\limits_{x\to e}(\ln x-1)=0$，因而不能运用商的极限的运算法则. 而应根据无穷小量与无穷大量的关系的定理来求此极限.

在求函数极限的问题中，常常需要将函数经过适当的变形，才能运用极限的四则运算法则得到所求的极限. 常见的变形途径有两种.

(Ⅰ)消去不定性

【例 5】 求下列极限：

(1)$\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^3+x-2}$； (2)$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\operatorname{arctg}x}{x-\operatorname{arctg}x}$.

解 (1)当 $x\to1$ 时，分子与分母的极限均为零，不能直接运用商的极限运算法则，经变形后，求得

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^3+x-2}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x^2+x+2)(\sqrt{x}+1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{(x^2+x+2)(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{8}.$$

(2)当 $x\to\infty$时，分子与分母均为无穷大量，不能直接运用商

的极限运算法则，经变形，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\operatorname{arctg}x}{x-\operatorname{arctg}x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}\operatorname{arctg}x}{1-\frac{1}{x}\operatorname{arctg}x}=1.$$

注 分子与分母的极限均为零，或分子与分母均为无穷大量的情形是经常遇到的，我们把这两种类型的极限分别称作“$\frac{0}{0}$”型和“$\frac{\infty}{\infty}$”型，它们都属于未定型的极限，都不能直接运用极限的四则运算法则．在此，我们通过变形把求未定式的极限转化为求定式的极限，这里所采用的变形方法称为消去不定性法．

【例 6】 求 $\lim\limits_{x\to-2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{12}{x^3+8}\right)$.

解 当 $x\to-2$ 时，不论 $x\to-2^+$ 或 $x\to-2^-$，$\frac{1}{x+2}$与$\frac{12}{x^3+8}$均为符号相同的无穷大量，记为“$\infty-\infty$”型，这也是未定型的极限．对于这种极限，不能运用差的极限的运算法则．通常把它变成“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型后，再作处理．

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{12}{x^3+8}\right)&=\lim_{x\to-2}\frac{x^2-2x-8}{(x+2)(x^2-2x+4)}\\&=\lim_{x\to-2}\frac{x-4}{x^2-2x+4}=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

请读者思考以下两个问题：

(1)若 $f(x)$与 $g(x)$中的一个极限存在，而另一个极限不存在，则 $f(x)+g(x)$和 $f(x)g(x)$的极限情况如何？

(2)若 $f(x)$和 $f(x)g(x)$的极限均存在，则 $g(x)$的极限情况如何？

(Ⅱ)有限化——把无限多项的和式与无穷多个因子之积的式子化简后再取极限

【例 7】

求$\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{[nx+a]^2}{n^3}+\frac{[nx+2a]^2}{n^3}+\cdots+\frac{[nx+(n-1)a]^2}{n^3}\right\}$.

解 由于当$n\to\infty$时，上式括号内的项数将会无限增加，因而不能直接运用和的极限的运算法则.

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(n-1)x^2}{n}+\frac{2ax}{n^2}\left[1+2+\cdots+(n-1)\right]\right.$$

$$\left.+\frac{a^2}{n^3}\left[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\right]\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n-1}{n}x^2+\frac{n-1}{n}ax+\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}a^2\right\}$$

$$=x^2+ax+\frac{1}{3}a^2.$$

【例 8】 若$|x|<1$，求$\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})$.

解 由于$|x|<1$，故

$$(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})$$

$$=\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}$$

$$=\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x},$$

所以 $$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}=\frac{1}{1-x}.$$

2.3 利用两个重要极限

【例 9】 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x\sin 2x}{x^2}=4\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}=4$.

【例 10】 求$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^{x+1}(x+3)^{x+3}}{(x+4)^{2x+4}}$.

解

$$原式=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left[\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{3}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{3}}{\left[\left(1+\frac{4}{x}\right)^{\frac{x}{4}}\right]^{8}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{4}}=e^{-4}.$$

注 重要极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$属于$\frac{0}{0}$型极限，而$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$或$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$属于$1^{\infty}$型极限，凡不属于$\frac{0}{0}$型或$1^{\infty}$型极限者，均不能利用这两个重要极限.

2.4 利用等价无穷小代换定理

目前已掌握的等价无穷小有：当$x\to0$时，$\sin x\sim x$；$\mathrm{tg}x\sim x$；$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^{2}$；$\arcsin x\sim x$；$\mathrm{arctg}x\sim x$.

【例 11】 求$\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x\sin^{2}x}$.

解

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\sin x\cos x}\overset{(1)}{=\!=}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}\overset{(2)}{=\!=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^{2}}{x^{2}}=\frac{1}{2}.$$

注 (1)在计算极限的过程中，为简化计算，可以在乘积因子中把极限存在而不为 0 的部分先求出来，题中(1)步就是这样做的.

(2)在计算极限过程中，可将分子或分母换成与其等价的无穷小量，对于乘积因子也可用等价无穷小量代换，但下列的做法

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x\sin^{2}x}=\lim_{x\to0}\frac{x-x}{x^{3}}=0$$

是错误的. 这是因为分子中的 $\mathrm{tg}x$ 与 $\sin x$ 不是以因子形式出现的. 等价无穷小代换不能在加减法中使用.

2.5 利用夹逼准则(两边夹准则)

夹逼准则不仅是判定极限存在的准则，而且也给我们提供了一个求极限的方法.

【例 12】 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)$.

解 令 $x_n=\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}$,

则
$$\frac{n}{n+\sqrt{n}}\leqslant x_n\leqslant\frac{n}{n+\sqrt{1}},$$

又
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+\sqrt{n}}=1,\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+\sqrt{1}}=1,$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}x_n=1.$$

注 利用夹逼准则求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 的关键是找出具有相同极限的两个数列$\{y_n\}$和$\{z_n\}$，使 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$. 一般方法是通过将 x_n 适当放大找 z_n，将 x_n 适当缩小找 y_n. 所谓“适当”，即要使数列 y_n 与数列 z_n 都有相同的极限.

2.6 利用单调有界准则

在确定数列极限存在的前提下，利用单调有界准则往往也能求得该数列的极限值.

【例 13】 设 $u_1=\sqrt{2}$，$u_2=\sqrt{2\sqrt{2}}$，…，$u_n=\sqrt{2u_{n-1}}$，…，证明$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 存在，并求此极限.

解 先证$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 存在.

显然 $\sqrt{2}<\sqrt{2\sqrt{2}}$，即 $u_1<u_2$. 设 $n=k$ 时，$u_k<u_{k+1}$，则当 $n=k+1$ 时，因为 $2u_k<2u_{k+1}$，所以$\sqrt{2u_k}<\sqrt{2u_{k+1}}$，即 $u_{k+1}<u_{k+2}$.

由数学归纳法知，对一切自然数 n，数列 u_n 单调增加.

又 $u_1=\sqrt{2}<2$，$u_2=\sqrt{2\sqrt{2}}<2$. 设 $n=k$ 时，$u_k=\sqrt{2u_{k-1}}<2$，则对 $n=k+1$，有 $u_{k+1}=\sqrt{2u_k}<\sqrt{2\times2}=2$，因此数列 u_n 单调增加且有上界，故$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 存在.

再求$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

设$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A(A\geqslant\sqrt{2}>0)$，由$u_n=\sqrt{2u_{n-1}}$两边取极限，得$A=\sqrt{2A}$，解得$A=2$或$A=0$(舍去)，所以$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=2$.

注 (1)利用单调有界准则求极限的方法特别适合于由递推关系给出的数列.

(2)利用单调有界准则求极限时，一定要先证该数列的极限存在，再利用递推关系式求出数列的极限，否则可能出现错误的结论. 例如，令$x_n=2^n$，于是$x_{n+1}=2x_n$，如果在此递推关系式两边贸然地取$n\to\infty$的极限，令$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，即得$a=2a$，$a=0$，即$\lim\limits_{n\to\infty}2^n=0$，这显然是错误的.

3. 求分段函数的极限

对于分段函数，主要是如何求它在两段交接点处的极限. 求分段函数在其它点处极限的方法与普通函数没有什么不同.

若分段函数在分段点两侧具有不同的函数表达式，则求分段函数在两段交接点处的极限，须根据函数在一点处极限存在的充分必要条件，考察函数在两段交接点处的左、右极限.

【例 14】 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x<0,\\ 1-\cos x, & x>0,\end{cases}$ 求$\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

解 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$,

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(1-\cos x)=0$,

故$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$，从而$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$.

注 (1)若分段函数在分段点两侧具有相同的函数表达式，则求此分段函数在分段点处的极限通常可不考察左、右极限. 例如，

$$f(x)=\begin{cases}x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, & x\neq0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$$

则$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}=0$.

但是，有时分段函数在分段点两侧具有相同的函数表达式，则求此分段函数在分段点处的极限，仍须考察左、右极限．例如，

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0;\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

当求$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$与$\lim\limits_{x\to 0}g(x)$时，均须考察函数在 $x=0$ 处的左、右极限．

顺便指出，对于某些非分段函数，也要考察左、右极限．

(2)分段函数求极限主要用于研究分段函数在分段点处的连续性与可导性时．

4．求含参数的函数的极限

【例 15】 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{1+a^n}$ $(a\geqslant 0)$.

解 所求极限值与参数 a 的取值范围有关．

当 $0\leqslant a<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{1+a^n}=0$；

当 $a=1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{1+a^n}=\dfrac{1}{2}$；

当 $a>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}a^n=\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{1+a^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{a^n}}=1$.

故
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{1+a^n}=\begin{cases}0, & 0\leqslant a<1;\\ \dfrac{1}{2}, & a=1;\\ 1, & a>1.\end{cases}$$

5．已知函数的极限，求函数表达式中的参数

如果函数的表达式中含有未知的参数，当已知该函数的极限时，可求未知参数的值．这类问题可称为函数极限的局部逆问题，主要出现在未定式极限中．这类问题的前提是已假定极限存在，这