

孤立子理论与应用



应用数学丛书

孤立子理论与应用

谷超豪 郭柏灵 李翔神

曹策问 田畴 魏帆

胡和生 郭本瑜 葛墨林

浙江科学技术出版社



应用数学丛书

孤立子理论与应用

谷超豪等著

浙江科学技术出版社出版

商务印书馆上海印刷厂排版

浙江新华印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

开本: 850×1168 1/32 印张: 15.5

字数: 373,000

1990年8月第一版

1990年8月第一次印刷

印数: 1-1,550

ISBN 7-5341-0217-0/O·10

定 价: 10.00 元

责任编辑: 周伟元

封面设计: 孙 菁

Published by Zhejiang Publishing House
of Science and Technology

125 Wulin road, Hangzhou, China

© 1990 by Gu Chaochao etc.

First published 1990

Printed in Xinhua Printing Factory

Library of congress catalogue card:

ISBN 7-5341-0217-0/O·10

Responsible Editor: Zhou Wei yuan

Cover Design: Sun jing

出版说明

在近代科技发展中，应用数学在国民经济和科学研究各个领域的作用和地位显得日益重要，世界上许多发达国家对它非常重视，投入了大量的资金和研究力量。我国在这方面的研究工作也已有一定的规模和成果。我们为了推进和交流应用数学的成果，在苏步青教授、吴文俊教授的关怀下，由谷超豪教授为主编，组织出版这套《应用数学丛书》。

本《丛书》的出版，得到了数学界的重视。陈省身教授、杨振宁教授对此给予热情的鼓励和支持。国家自然科学基金会对《丛书》的出版非常重视。

为了反映应用数学在各主要分支的现代水平，特别是我国数学家的研究成果，以及国外的最新进展，向读者介绍应用数学的理论和各种方法、数学模型，《丛书》计划在数学物理、经济数学、组合设计、运筹学、控制理论、应用统计、通信理论、生物数学、几何造型等应用分支出版一些质量较高的专著。

我们希望《丛书》的出版，能为中国数学赶超世界水平作出一点贡献。

《应用数学丛书》编委会

名誉主编

苏步青 吴文俊

主 编

谷超豪

编委(按姓氏笔划)

王兴华	叶其孝	叶彦谦
刘鼎元	孙和生	史树中
李大潜	李训经	李翊神
吴 方	吴立德	萧树铁
张尧庭	林 群	俞文鱿
郭仲衡	郭竹瑞	游兆泳
管梅谷		

**Editorial Committee of
Applied Mathematics
Series**

Honor Editor-in-Chief

Su Buqing Wu Wenjun

Editor-in-Chief

Gu Chaohao

Editorial Committee

Guan Meigu	Guo Zhongheng
Guo Zhurui	Li Daqian
Li Xunjing	Li Yishen
Lin Qun	Liu Dingyuan
Shi Shuzhong	Sun Hesheng
Wang Xinghua	Wu Fnag
Wu Lide	Xiao Shutie
Ye Qixiao	Ye Yanqian
You Zhaoyong	Yu Wenci
Zhang Yaoting	

内 容 简 介

孤立子理论是应用数学和数学物理的一个重要组成部分,在流体力学、等离子体物理、非线性光学、经典场论、量子论等领域有着广泛的应用.近年来,国际上对孤立子的研究发展很快,很受重视,在国内也已形成相当强的力量,在一些前沿课题上取得了较大的进展.

本书对孤立子的若干最基本概念,如物理背景、反散射方法、Bäcklund 变换、有限维完全可积系、对称性、Kac-Moody 代数、孤立子与微分几何、非线性波的数值研究、引力波孤立子等,作了详细介绍,并对问题的关键所在给以清晰地阐述,列举了它的一些应用,然后介绍了该学科的某些最前沿研究和作者研究的新成果.

本书适合数学、物理等有关专业人员,以及高等院校有关专业教师和学生学习参考.

ABSTRACT

The soliton theory is an important branch of applied mathematics and mathematical physics. It has important applications in fluid mechanics, nonlinear optics, classical and quantum fields theories etc. It is one of the most active fields in science. In China several groups have been formed for the research in this field in recent years. Important progress has been made in some subjects.

This book gives expository reviews of some basic ideas, such as physical backgrounds, inverse scattering, Bäcklund transformations, completely integrable systems of finite dimensional symmetry, Kac-Moody algebra, solitons and differential geometry, numerical analysis for nonlinear waves, and gravitational solitons. Some essential points are emphasized and several applications are sketched. Some recent developments together with new achievements obtained by the authors are presented.

This book has been written for related specialists, teachers and students in mathematics and physics.

前 言

孤立子理论是应用数学和数学物理的一个重要组成部分，在最近二十余年中，它得到了迅速的发展。

孤立子往往也称为孤立波，它是指一大类非线性偏微分方程的许多具有特殊性质的解，以及与之相应的物理现象。用物理的语言来说，这些性质是：(i) 能量比较集中于一个较狭小的区域；(ii) 两个孤立子相互作用时出现弹性散射现象（即波形和波速能恢复到原状）。可以说，孤立子具备了粒子和波的许多性能，在自然界有一定的普遍性。许多学科领域，如流体力学，等离子体物理，非线性光学，经典场论和量子场论等，都包含着和孤立子理论密切相关的重要问题。近年来，人们也以更广泛的意义上理解孤立子这一术语，比如说，具性质(i)的一些静态解有时也称为孤立子。

孤立子理论的产生和发展是非线

性偏微分方程研究中的一个重大事件.大家知道,对于数学物理中的许多线性问题,傅里叶方法是非常有用的,可以由之得出许多准确解而使问题得到完善的解答.而非线性偏微分方程的难度大得多.但孤立子理论却蕴藏着一系列的制作准确解的方法,特别是其中的反散射方法,在一定程度上可以看成是非线性问题的傅里叶方法.经典分析和泛函分析,李群、李代数和无限维代数,微分几何(有限维和无限维),代数几何,拓扑学,动力系统以及计算数学等数学分支,对孤立子的研究都有重要作用.另一方面,孤立子的研究也对数学的各个分支产生了一定的影响.

由于上述两方面的原因,孤立子理论受到了国际上数学界和物理学界的充分重视,研究工作十分活跃,范围日趋广泛,近十年来,每年都有专门性的国际学术会议,已出版了一些专著.此外还有多种会议记录和论文集,而在各种杂志上发表的论文,其数量是非常大的,许多国家,都投入相当强的研究力量,以各种不同的风格和角度,来推动这一理论的前进,利用它来解

决应用问题。

在我国,从1974年开始,杨振宁、李政道、陈省身等教授在回国讲学时,先后向我们介绍了孤立子理论的进展,指出其重要性。与此同时,中国科学院冯康教授率先提倡并组织力量进行研究,随着科学工作条件的改善,国际交流的开展和中青年研究人员的成长,我国对孤立子理论的研究也蓬勃开展起来,形成了一支实力相当强的队伍,在若干课题上取得了优秀的成果,在国际上开始产生一定的影响。不少单位都把孤立子理论列为重点研究课题,南开大学数学研究所理论物理部将“可积系统的物理模型”列为近期研究的主题,就是一个例子。

国内对孤立子研究的交流活动,已有所开展。1980年,在冯康和张学铭两位教授的主持下,曾在厦门举行过一次学术讨论会。1986年,在上海也举行过一次小型讨论会,到会同志一致认为,要把交流活动经常化起来并加以扩大,大家认为,编写出一本专门著作,对孤立子理论的若干最基本的方面,作深入浅出的介绍,并引导有志于研究这一理论的人员到达研究的

前沿,这将对我国进一步发展这方面的研究有很大的好处,现在这本书,就是为了适应这个要求而编写的。

本书是一部集体的作品,其内容范围,读者可以从目录中知其大概.需要指出的是,各位作者都在有关的方面作过系统的研究,都有各自的切身体会,大家都力求从最基本的概念讲起,把问题的关键所在阐述清楚,然后又反映和介绍最前沿的研究,以及他们本人的新成果.大家希望,这本书能够起预期的作用。

由于孤立子理论的内容日趋丰富,本书显然还不够涉及它的一切重要方面,例如 Riemann-Hilbert 方法,代数几何方法等;许多应用问题,特别是它在各类技术问题上的具体应用,也未能涉及,这是我们感到很不足的地方.由于各位作者都很繁忙,聚会时间也不可能很多,书中会有不少缺点,希望读者提出宝贵的意见。

谷超豪

1989年10月

目 录

前 言

第 一 章

孤立子与近代物理.....	郭柏灵
§ 1 引言	1
§ 2 水波和弱非线性作用下的波动方程	6
§ 3 等离子体中的孤立子	18
§ 4 Langmuir 波的坍塌(collapse)	38
§ 5 孤立子的相互作用和 $t \rightarrow \infty$ 的渐近性质	42
§ 6 分子系统中的孤立子	53
§ 7 Toda 晶格和 Born-Infeld 方程.....	64
参考文献	69

第二章

反散射方法.....	李翊神
§ 1 正散射问题	72
§ 2 反散射问题	85
§ 3 KdV 方程初值问题的解	91
§ 4 AKNS 方程.....	99
§ 5 AKNS 方程特征值问题的正散射与反散射问题	103
§ 6 用反散射方法求 AKNS 方程的解	113
§ 7 离散的特征值问题与 Toda 晶格	120
§ 8 K-P 方程及其反散射解法	125
§ 9 几点说明	137
参考文献.....	140

第三章

Bäcklund 变换.....	谷超豪
§ 1 由来和定义	141
§ 2 经典 Darboux 阵	146
§ 3 几个特殊情形	155
§ 4 Bäcklund 变换的更广泛的情形	160
§ 5 补充说明	170
参考文献.....	173

第四章

经典可积系统.....	曹策问
§ 1 辛流形	176
§ 2 Liouville 完全可积性	186
§ 3 几个有限维可积系统	194
参考文献.....	215

第五章

对 称.....	田 畴
§ 1 对称	216
§ 2 强对称、遗传性	225

§ 3 换位子、李代数	237
§ 4 变换	251
参考文献	266

第 六 章

Kac-Moody 代数与可积系	屠规彰
§ 1 Lax 意义下的可积系	268
§ 2 Kac-Moody 代数简介	270
§ 3 广义 KdV 方程族	294
§ 4 τ 函数和 K-P 方程族	307
§ 5 对称, 圈代数与 Virasoro 代数	334
参考文献	340

第 七 章

孤立子理论与微分几何学	胡和生
§ 1 曲面论的基本事项	343
§ 2 负常曲率曲面和 sine-Gordon 方程	347
§ 3 线汇、伪球线汇和 Bäcklund 变换	353
§ 4 孤立子方程与调和映照	362
§ 5 容有线性可积系统的非线性偏微分方程	370
§ 6 孤立子曲面	387
参考文献	394

第 八 章

非线性波的数值研究	郭本瑜
§ 1 Korteweg-de Vries 方程的差分解法	397
§ 2 Korteweg-de Vries 方程初、边值问题的数值研究	404
§ 3 Korteweg-de Vries 方程的有限元解法	409
§ 4 Korteweg-de Vries 方程的谱解法和拟谱解法	413
§ 5 Benjamin-Bona-Mahony 方程的数值解法	418
§ 6 Klein-Gordon 方程和 sine-Gordon 方程的数值研究	421
§ 7 非线性 Schrödinger 方程和 Dirac 方程的数值研究	429
参考文献	433

第九章

引力波孤立子.....	葛墨林
§ 1 引言	438
§ 2 BZG 的解的一般讨论	442
§ 3 单孤立子解	448
§ 4 一类新型引力波孤立子	453
§ 5 BZ 引力的哈密顿结构	466
参考文献	475

CONTENTS

Introduction

Chapter 1 Soliton and Modern Physics.....Guo Boling

§ 1 Introduction	1
§ 2 Water Wave and the Wave Equation under Weak Nonlinear Action	6
§ 3 Solitons in Plasma	18
§ 4 Collapse of Langmuir Wave	38
§ 5 Interaction of Solitons and the Asymptotic Properties as $t \rightarrow \infty$	42
§ 6 Solitons in Molecule System	53
§ 7 Toda Lattice and Born-Infeld Equation	64