微积分

上册

（第二版）

徐澄波　吴迪光　张光天　编

浙江大学出版社

微积分

上册

（第二版）

徐澄波　吴迪光　张光天　编

浙江大学出版社

(浙)新登字10号

内容提要

本书是为理工科大学对数学要求较高的专业(非数学系)开设《微积分》课而编写的. 全书分为上、下两册. 上册介绍函数与极限,一元函数的微分学与积分学(包括广义积分);下册介绍矢量代数与空间解析几何,多元函数的微分学与积分学,场论,无穷级数与含参变量的积分. 每章按节配有思考题与习题,书后附有习题答案.

本书可供高等学校部分理工科(非数学系)的本科专业作为《微积分》课的教材,也可供高等专科学校、业余科技大学、电视大学等作为高等数学的教学参考书. 此外,本书可作为报考研究生的复习用书以及各种有志自学提高者的学习用书.

微 积 分

上 册

(第二版)

徐澄波 吴迪光 张光天 编

责任编辑 涂 红

* * *

浙江大学出版社出版

浙江大学出版社计算机中心电脑排版

杭州富阳何云印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

* * *

787×1092 16开 14.25印张 423千字

1993年8月第2版 1993年8月第1次印刷

印数 0001—4000

ISBN 7-308-00014-1/O·003(1) 定价:6.20元

第二版前言

本版订正了第一版中已发现的错误，改进了一些写得不够清楚和不大妥当的地方，并更换了少量的习题与思考题. 由于付印时间紧迫，有些需要改善的不足之处，只好留待将来再作较大修订，借此机会，谨向多年来使用这本教材，并提出宝贵意见的老师们，特别是张彬、李家元等老师，表示衷心的感谢.

编 者

1993 年 7 月

第一版前言

现代科技的发展和我国的社会主义建设对理工科大学生的数学知识与能力提出了很高的要求.为了适应这种要求,我们在多年教学实践的基础上,合编了这本教材.

本书是高等数学的基础教材,在编写时力图加深学生对微积分基本知识的理解,并培养分析思考和逻辑推理的能力.为此,作了以下的安排:

首先,充实了微积分课的理论内容,特别是极限部分,使微积分的概念与方法建立在比较坚实的基础上.基本概念都从实际问题引入,并抽象出明确的定义,有关极限和连续的重要定理都给予证明,目的是加深学生对微积分学的理解,培养抽象思维与逻辑论证的能力.

其次,按节配备了较多的思考题与习题,其中适当增加一些证明题或难题,作为本书的重要组成部分.这样可以加强学生的基本训练,促进思考和灵活应用.书后附有习题答案,可供读者在独立作题后能及时地检查纠正,有助于学习的稳步前进.

我们期望本书有利于教学质量的提高,能为学生学好后继课程、进一步深造和从事科技工作,打下一个扎实的数学基础.

本书曾在浙江大学部分专业中作为讲义使用了4年,经过三次修订,但实践时间尚短,加上我们水平有限,书中难免存在疏漏不当之处,热诚欢迎批评指正.

本书由全国高等学校工科数学教材编审委员会委员周茂清教授审定.浙江大学应用数学系高等数学教研室的同志们,对于本书的编写、使用和出版,给予了大力的支持和帮助,特别是孙玉麟、孙子雨、陈仁梅、张彬、李家元等老师,曾认真审阅或使用这本教材,并提出了许多宝贵意见.我们在此表示衷心的感谢.

编　者

1986年12月

目　　录

第一章　函数与极限

第二章　一元函数的微分学

第三章　一元函数的积分学

第一章　函数与极限

第一节　函　　数

§1.1　函数的概念

人们在研究自然现象或运动过程时，要遇到许多不同的量.有些量在过程的进行中保持同一个数值，叫做**常量**；另一些量要取不同的数值，叫做**变量**.这种划分是相对的，在某一过程中的常量，在另一过程中就可能是变量.例如，自由落体的重力加速度，在地面附近可看作常量，而在高空落下的全过程中它是变量.

客观事物是不断变化发展的，一切自然现象和运动过程，都通过变量来描述.历史上，随着生产技术的发展，需要揭露和掌握各种运动过程的规律性，就必须深入研究变量的变化状态和变量间的依赖关系.由此产生了一门学问——**微积分**，它是高等数学中最重要的组成部分.

在一个实际的变化过程中，各个变量并不是孤立地变化，而是相互联系，相互依赖的.其中有些量可以独立变化，另一些量将随着它们的变化而变化.这种依赖关系正是反映了变化过程的内在规律性，刻划了事物的本质.

下面先看几个例子.

例1　物体在离地面高度为 h 处自由落下，经过时间 t 下落的距离为 s.实验证明它们具有如下的关系：

$$s=\frac{1}{2}g\,t^2,$$

其中 g 是重力加速度(常数).依照这个公式，对于下落过程中的每一时刻 t，都能确定 s 的一个值与之对应.

例2　根据牛顿万有引力定律，两个质量为 m 和 M 的质点当距离为 r 时的相互吸引力 F 由下式表示：

$$F=k\frac{mM}{r^2},$$

这里 k 是引力常数.依照它，从 r 的每一值可以确定 F 的一个对应值.

例3　一种保险丝的熔断电流与直径的依赖关系如下表所示：

直　径　D（毫米）	0.508	0.559	0.61	0.71	0.813	0.915	1.22
熔断电流　I（安培）	3.0	3.5	4.0	5.0	6.0	7.0	10.0
直　径　D（毫米）	1.63	1.83	2.03	2.34	2.65	2.95	3.26
熔断电流　I（安培）	16.0	19.0	22.0	27.0	32.0	37.0	44.0

按此表格，从 D 的每一值都能读出 I 的一个确定值.

例 4 气象站用自动记录仪记下某一天的气温 θ 与时间 t 的关系如图 1-1 所示. 从图中对于每一时刻 t_0，都可以相应地确定一个温度 θ_0.

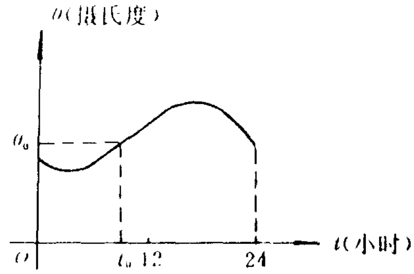


图 1-1

例 5 把 1 千克质量的冰块加热，使温度从 -20℃ 升高到 $+20$℃，求物质所吸收的热量 Q 和温度 t 之间的依赖关系.

冰的比热是 0.5 卡 / 克 · 度(1 卡 /(克 · 开) = 4186.8 焦耳 /(公斤 · 开))，冰块加热到 0℃ 时将溶解成水，溶解过程中温度不变，溶解热是 80 卡 / 克，水的比热 1 卡 / 克 · 度，若取 $t = -20$℃ 时 $Q = 0$，则可得 Q 与 t 的关系如下：

$$Q = \begin{cases} 0.5t + 10, & -20 \leqslant t \leqslant 0; \\ t + 90, & 0 < t \leqslant 20. \end{cases}$$

依照上式，从 t 的每一值都能确定 Q 的一个值与之对应. 这个关系还可用图 1-2 描绘出来.

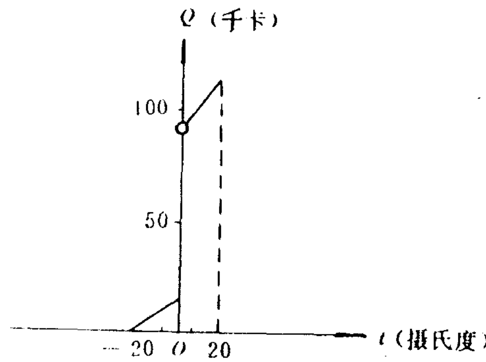


图 1-2

从这些例子看到，虽然各个问题的实际意义不同，表示方式也不同(公式、表格、图形)，但它们有一个公共的特征，就是在某过程中两个变量之间，存在着一个对应规律，依照它，从一个变量所能取的每一值都可以确定另一变量的一个值。这样一种变量间的依赖关系在自然界是普遍存在的. 为了一般地掌握这种关系，必须撇开变量的具体内容，从纯数量状态中研究它们的共同本质。这样就抽象出函数的概念.

定义 如果在变量 x 与 y 之间存在这样一个对应规律 f，依照它，对于 x 在某个变化范围 D(数集)内所取的每一值，都有 y 的唯一一个确定的值与之对应，则称 f 是 D 上的**函数**，D 是函数 f 的**定义域**. 这个函数通常记为

$$y = f(x), \quad x \in D.$$

其中 x 叫做**自变量**，y 叫做**因变量**，$x \in D$ 表示 x 的值属于 D.

这个定义告诉我们，所谓函数是指使得 y 的值对应于 x 的值的对应规律 f，这个规律是定义在数集 D 上的. 因此，只要明确地给出一个对应规律 f，同时指出它的定义域 D，就**完全确定**了一个函数. 至于变量本身的具体意义及其采用什么记号，那是无关紧要的. 比如

$$y = f(x), \quad x \in D \quad 与 \quad s = f(t), \quad t \in D$$

代表同一个函数. 正因为 y 的值由 x 在 D 上的值通过 f 就能完全决定，所以常常省略 y，而把一个函数简记为

$$f(x) \ (x \in D).$$

如果同时考察几个不同的函数，即不同的对应规律，就必须用不同的记号加以区别，如 $f, g, \varphi, \psi, \cdots$ 等. 有时为了简便起见，可用 $y = y(x)$ 表示一个函数，这里 y 既代表对应规律又代表因变量，一字两义.

在函数的定义中，当 x 在 D 上每取一值 x_0，y 所取的与之对应的值 y_0，称为**函数 f 在 $x = x_0$**

处的值，记作 $f(x_0)$，即有 $y_0 = f(x_0)$. 注意记号 $f(x)$ 既表示一个函数，也表示函数 f 在 x 处的值. 例如 $f(x) = x + \cos x$，则 $f(0) = 1$，$f(\pi) = \pi - 1$. 由函数值的全体所组成的数集 Γ，称为函数的**值域**. 这个值域由该函数完全决定，若无需要就不必写出来.

当两个变量之间存在着一个函数使它们具有确定的依赖关系，我们就说这两个变量间具有**函数关系**. 从实际问题中建立函数关系，也就是要确定一个函数.

注意，在满足定义所述的条件下，我们也常说：**变量 y 是变量 x 的函数**. 这句话把因变量 y 叫做函数，从上述定义来看是不大确切的. 但它表明了 y 是依赖于 x 的变量，在使用上有简便之处，所以今后仍可沿用这个习惯术语. 不过应该正确理解，**函数概念的本质是指对应规律 f，不是指因变量 y.**

关于函数的定义域，要根据问题的实际条件来确定. 例 1 中的函数只有在物体从高 h 处落到地面之前这段时间内才有意义，所以它的定义域是 $0 \leqslant t \leqslant \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$；例 2 的函数定义域应当是 $r > 0$；例 3 中的直径 D 只取表中那 14 个数值，而例 4 中的时间 t 取 0 到 24 之间的一切值. 等等. 如果没有说明实际背景，那么一般函数的定义域就是使得函数在数学上有意义的自变量所取数值的全体. 例如函数

$$y = \frac{\log_a(x+1)}{\sqrt{2 - x - x^2}} \qquad (a > 0, a \neq 1)$$

只有当 $2 - x - x^2 > 0$ 及 $x + 1 > 0$ 时才有数学意义，所以它的定义域是 $-1 < x < 1$.

必须声明一下，我们这里及今后都在实数范围内讨论问题，自变量和因变量所取的数值均为实数. 大家在中学里已经知道：有理数与无理数统称**实数**；全体实数与数轴上所有点之间可以建立**一一对应**. 因此，不必严格区分数与点，常把数 x 叫做点 x.

为了便于描写函数的定义域，我们引进区间的概念. 满足不等式 $a < x < b$ 的实数 x 的全体，称为一个**开区间**，记作 (a,b)；满足 $a \leqslant x \leqslant b\,(a < b)$ 的实数 x 的全体，称为一个**闭区间**，记作 $[a,b]$. 读者不难写出半开半闭区间 $(a,b]$ 及 $[a,b)$ 的定义. 这些区间统称为**有限区间**，实数 a 与 b 叫做区间的**端点**，$b - a$ 叫做区间的**长度**.

此外还有**无限区间**：记号 $(a, +\infty)$ 表示适合 $x > a$ 的实数 x 的全体；$(-\infty, b]$ 表示适合 $x \leqslant b$ 的实数 x 的全体；$(-\infty, +\infty)$ 表示一切实数 x 的全体，或者表示成 $-\infty < x < +\infty$. **注意，这里的 $-\infty$ 与 $+\infty$ 只是记号，不能把它们作为实数进行运算.** 各种区间可在数轴上显示出来，如图 1-3.

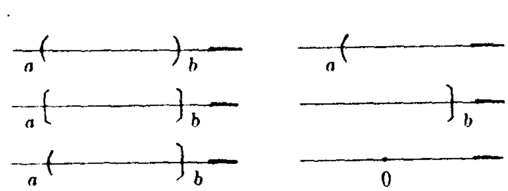


图 1-3

通常函数的定义域就是某一个区间. 如例 5 中的函数定义域是 $-20 \leqslant t \leqslant 20$，即闭区间 $[-20, 20]$；例 2 中的函数定义域是无限区间 $(0, +\infty)$.

表示一个函数的方法是多种多样的，只要能够确定地给出变量间的一个对应规律（或称法则）就行了. 但基本的表示法有以下三种：

(1) 公式法（解析表示法） 它把一个函数通过指明运算的数学式子表示出来，依照它，从自变量的值可以计算因变量的对应值. 其优点是精确、完整，便于理论上分析研究. 例 1、例 2 就是用公式法表示的函数. 例 5 也是如此，不过这是一个在其定义域的不同部分用不同公式表示的函数，称为**分段函数**. 注意分段函数不是几个函数，而是一个函数.

(2) **表格法**　如例 3，从表中可以直接读出对应的值，简单方便.

(3) **图示法**　通过一个图形把函数关系显示出来，形象直观，富有启发性. 如例 4 是用图形直接给出的函数. 我们也常把一个已知的函数设法描绘出它的图形，以便考察函数的变化性态. 所谓**函数 $y=f(x)$ 的图形**，是指在平面直角坐标系 Oxy 下，凡坐标满足方程 $y-f(x)=0$ 的点 (x,y) 的集合. 这个图形的特点是平行 Oy 轴的直线和它至多只交于一点，如图 1-4 所示.

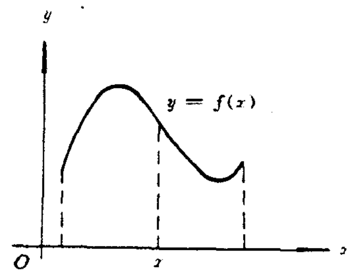


图 1-4

微积分的研究对象就是函数，并且主要是解析表示的函数，而以函数的图形作为重要的辅助工具.

最后，我们再介绍几个有用的函数.

例 6　取整函数，或称方括号函数：

$$y=[x],\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

符号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，例如

$$[2]=2,\quad [3.1416]=3,\quad [-3]=-3,\quad [-\sqrt{2}]=-2,$$

等等. 对于每一实数 x，都有一个整数 $[x]$ 与之对应. 这个函数的图形是一个阶梯形，如图 1-5 所示. 根据 $[x]$ 的定义，我们得到一个今后有用的不等式：

$$[x]\leqslant x<[x]+1.$$

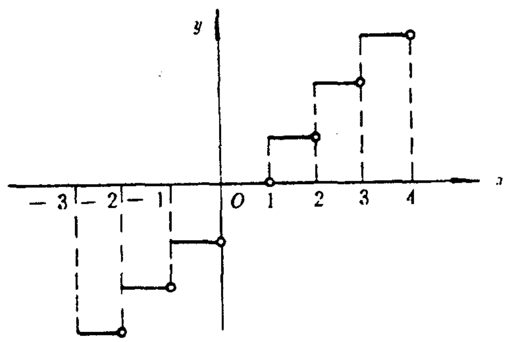


图 1-5

例 7　符号函数：

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

它定义在全体实数上，使 $+1$ 与正数对应，-1 与负数对应，如图 1-6 所示.

例 8　狄利克雷(Dirichlet)函数：

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数};\\ 0, & x\text{ 是无理数}.\end{cases}$$

这个函数定义在整个数轴上，把全体实数分成两类，使 1 对应于有理数，0 对应于无理数，简单明了. 可是无法画出它的图形，因为在任何两个实数之间，都既有无穷多个有理数，又有无穷多个无理数. 可以想象它的图形似乎是两条平行直线 $y=1$ 与 $y=0$，但在每条直线的任何一个小段内都有无穷多个漏洞，我们的目力是无法辨认的.

§1.2　复合函数与反函数

(一) 复合函数　变量间的依赖关系是错综复杂的，表现之一是锁链式的依赖关系，即甲量依赖于乙量，乙量依赖于丙量，等等. 这种关系在数学上就抽象成为复合函数的概念.

设有函数 $y=f(u)$，$u\in E$ 及 $u=\varphi(x)$，$x\in D$，且当 $x\in D$ 时，相应的 $u=\varphi(x)\in E$. 那么对于 x 在 D 上所取的每一值，先通过 φ 有一个 u 值与之对应，再通过 f 有一个 y 值与之对应. 这

样一个使 y 依赖于 x 的对应规律，称为 φ 与 f 的**复合函数**，记作

$$y = f[\varphi(x)], \quad x \in D.$$

其中 x 是自变量，y 是因变量，而 u 称为**中间变量**.

这个复合函数的定义域与函数 φ 的定义域相同，是因为假定了 φ 的值域不超出 f 的定义域范围. 如果当 $x \in D$ 时，对应的 u 值有一部分超出 f 的定义域 E，从而没有 y 值与之对应，那么必须适当限制 x 的变化范围，使相应的 u 值完全落在 E 中. 这样一来，复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的定义域要比 $\varphi(x)$ 的定义域缩小了. 例如 $\varphi(x) = \lg x$ 的定义域是 $x > 0$，$f(u) = \sqrt{u}$ 的定义域是 $u \geqslant 0$，但 $f[\varphi(x)] = \sqrt{\lg x}$ 的定义域是 $x \geqslant 1$.

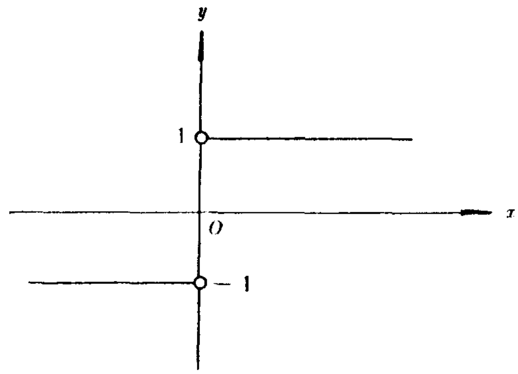


图 1-6

根据函数的定义，复合函数指的仍然是一个对应规律，只不过它是由两个(或两个以上的)对应规律复合起来的一个对应规律罢了. 我们把上面说明的这种复合作用看成是在函数间施行的一种运算，称为**复合运算**. 复合运算的关键在于对应规律的复合，而用什么符号表示自变量，因变量及中间变量，是无关紧要的. 例如，设 $f(x) = \sin x$，$g(x) = \log x$，这里只标出一个变量 x，但完全可以把 f 及 g 复合起来，构成下面的复合函数：

$$f[g(x)] = \sin \log x; \quad g[f(x)] = \log \sin x;$$

$$f[f(x)] = \sin \sin x; \quad g[g(x)] = \log \log x.$$

由此还看到，复合运算与运算的次序有关，不满足交换律. 即一般说来，$f[g(x)] \neq g[f(x)]$.

(二) 反函数 函数 $y = f(x)$ 表达了 y 依赖于 x 的对应规律，x 是自变量，y 是因变量. 但实际变量之间总是相互依赖的，不应把 x，y 的地位看作一成不变. 如果反过来看，让 y 独立变化，考察 x 如何依赖于 y 而变化，这就导致反函数的概念.

对于给定的函数 $y = f(x)$，如果当 y 在某个变化范围内所取的每一值，都有 x 的适合 $y = f(x)$ 的唯一一个确定值与之对应，这样一个使 x 依赖于 y 的对应规律就称为函数 $y = f(x)$ 的**反函数**，记作

$$x = f^{-1}(y).$$

记号 f^{-1} 象征与 f 相反的对应规律，不要看成 $1/f$.

由于习惯上常用 x 表示自变量，y 表示因变量，所以常把上述反函数改写成

$$y = f^{-1}(x).$$

这样改写无关紧要，因为反函数的本质是对应规律 f^{-1}.

例如，函数 $y = 2x - 1$ 的反函数是 $x = \dfrac{1}{2}(y + 1)$，改写为 $y = \dfrac{1}{2}(x + 1)$. 又如，函数 $y = 2^x$ 的反函数为 $y = \log_2 x$.

若给定函数为 $y = x^2$，由此方程式解得

$$x = \pm \sqrt{y}.$$

它表明对于 $y > 0$ 的每一个值，都有 x 的两个值与之对应(例如 $y = 1$ 时，有 $x = \pm 1$)，如图 1-7

所示. 这里出现的对应关系是多值的.

在函数的定义中,我们曾规定了 x 的每一值有 y 的唯一的确定值与之对应,这样的函数称为**单值函数**. 如果放宽这点限制,使得对于 x 的每一值可有 y 的多于一个的确定值与之对应,这样的函数就称为**多值函数**. 例如 $y = x^2$ 是单值函数,$x = \pm\sqrt{y}$ 或改写为 $y = \pm\sqrt{x}$,是个多值(二值)函数,它就是 $y = x^2$ 的多值反函数.

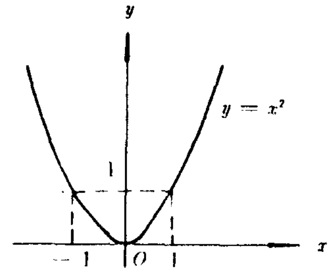


图 1-7

若无特别的声明,我们今后将一律讨论单值函数.

如上所述,一个单值函数的反函数可以是多值的,能不能获得单值的反函数呢?在一定条件下,这是可能的. 注意在函数 $y = x^2$ 中,只要限制 $x > 0$,就得到单值反函数 $x = \sqrt{y}$;限制 $x < 0$,则得 $x = -\sqrt{y}$. 这两个单值函数称为 $y = x^2$ 的**反函数的单值分支**. 为了一般地讨论这个问题,我们引进**函数单调性**的概念.

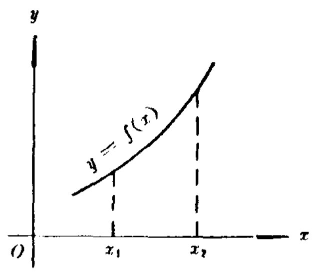
如果函数(单值的) $f(x)$ 对于数集 D 上的任意两点 $x_1 < x_2$,都有

$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1) \geqslant f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上是**单调增(或单调减)的**. 如果对于 D 上任意两点 $x_1 < x_2$,都有

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1) > f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上是**严格单调增(或严格单调减)的**,简称**严格增(或严格减)的**,或称**严格增加(减少)**.



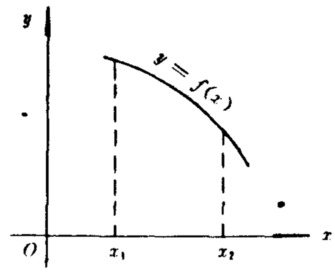


图 1-8

严格增(或减)的函数的图形,将随着 x 的增加而上升(或下降),如图 1-8 所示. 例如,函数 $y = x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格增加,在 $(-\infty, 0)$ 上严格减少. 前面讲过的方括号函数 $y = [x]$ 在整个数轴上是单调增,但不是严格增的.

反函数存在定理　严格增(减)的函数必有严格增(减)的单值反函数.

证　不妨设函数 $y = f(x)$ 在其定义域 D 上是严格增的,它的值域为 V. 根据函数的定义,对于每一点 $y \in V$,必有一点 $x \in D$,使得 $y = f(x)$. 这样的点 x 是唯一的,因为若有二点 $x_1 < x_2$,使得 $f(x_1) = f(x_2)$,这就和 $f(x)$ 是严格增的相违. 因此,对于 V 中的每一点 y,都有 D 中的唯一一点 x 与之对应,并满足 $y = f(x)$. 就是说,函数 $y = f(x)$ 在其值域上存在一个单值的反函数 $x = f^{-1}(y)$,它的定义域是 V. 同时,这个反函数 $f^{-1}(y)$ 在 V 上也是严格增的. 假若不然,设在 V 中存在两点 $y_1 < y_2$,使得 $x_1 = f^{-1}(y_1) \geqslant f^{-1}(y_2) = x_2$. 但 $f(x)$ 是严格增的,故当 $x_1 \geqslant x_2$,有 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$,亦即 $y_1 \geqslant y_2$. 这与假设矛盾. 证毕.

这里使用了**反证法**,它是今后常用的论证方法.

根据这个定理,对于函数 $y = f(x)$,如果适当限制 x 的变化范围,能获得一个使函数严格单调的区间,那就可以相应地确定一个单值的反函数 $x = f^{-1}(y)$. 上面对于 $y = x^2$,正是如此办理

的. 下面再举一例.

大家知道,正弦函数 $y=\sin x$ 是以 2π 为周期的函数,即有

$$\sin(x+2\pi)=\sin x$$

对一切实数 x 成立. 因此,它的反函数是无穷多值的,记作

$$x=\mathrm{Arc}\sin y.$$

但 $y=\sin x$ 在 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 上是严格增的,所以相应地能够确定反正弦函数的一个单值分支,记为

$$x=\arcsin y \quad \left(-1\leqslant y\leqslant 1,\ -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right),$$

或按习惯改写为

$$y=\arcsin x \quad \left(-1\leqslant x\leqslant 1,\ -\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\right),$$

并称之为反正弦函数的主值. 它的定义域是 $[-1,1]$,值域是 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

反函数还有一个几何性质:在同一个坐标平面 Oxy 中,函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的,如图 1-9 所示. 换句话说,把 $y=f(x)$ 的图形绕着 Ⅰ、Ⅲ 象限角的平分线翻转 180°,就得到 $y=f^{-1}(x)$ 的图形. 这个性质的证明留给读者来完成.

例如,指数函数 $y=a^x$ 与对数函数 $y=\log_a x$ 的图形关于直线 $y=x$ 是对称的,见图 1-10.

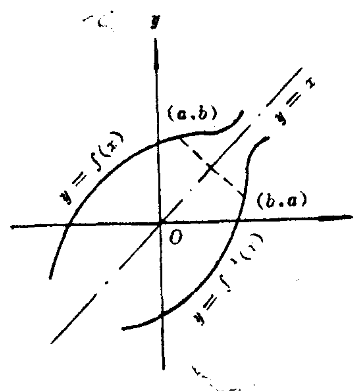


图 1-9

§1.3 初等函数

人们在实践中经常遇到以下六个基本而又重要的函数,称为基本初等函数:

(1) **常值函数** $y=c$, $-\infty<x<+\infty$ (c 是任意实常数).

(2) **幂函数** $y=x^\alpha$, $x>0$ (α 是任意实常数).

(3) **指数函数** $y=a^x$, $-\infty<x<+\infty$ (a 是实常数,且 $a>0,a\neq 1$).

(4) **对数函数** $y=\log_a x$, $x>0$ (a 是实常数,且 $a>0,a\neq 1$).

特别,$y=\log_{10}x=\lg x$ 称为**常用对数**;$y=\log_e x=\ln x$ 称为**自然对数**,$e=2.71828\cdots$.

(5) **三角函数**

$$y=\sin x,\quad -\infty<x<+\infty;$$

$$y=\cos x,\quad -\infty<x<+\infty;$$

$$\left.\begin{array}{ll} y=\mathrm{tg}x, & x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2} \\ y=\mathrm{ctg}x, & x\neq k\pi \\ y=\sec x, & x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2} \\ y=\csc x, & x\neq k\pi \end{array}\right\} k=0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\cdots.$$

(6) **反三角函数**

$y = \text{arc sin}x,\quad -1 \leqslant x \leqslant 1,\ -\dfrac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2};$

$y = \text{arc cos}x,\quad -1 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant \pi;$

$y = \text{arc tg}x,\quad -\infty < x < +\infty,\ -\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2};$

$y = \text{arc ctg}x,\quad -\infty < x < +\infty,\ 0 < y < \pi;$

……

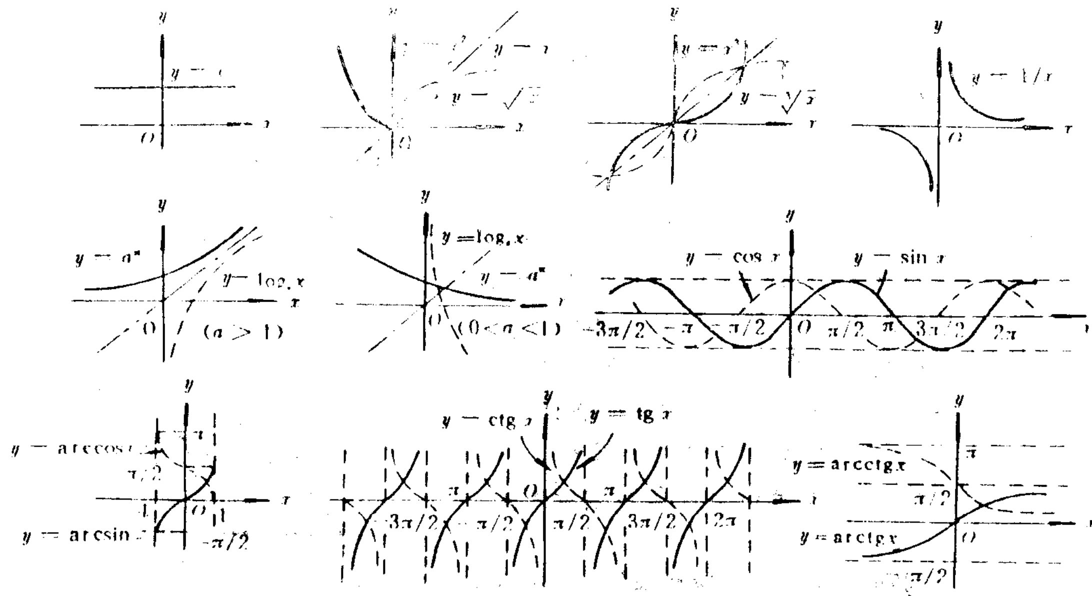


图 1-10

这些函数大家已在中学里学过，我们今后还经常地和它们打交道，所以必须熟悉它们的基本特性以及它们的图形.

关于幂函数的定义域，需要说明一下. 当 a 是正整数，它的定义域为 $-\infty < x < +\infty$；当 a 是负整数，要 $x \neq 0$；当 a 是分数 $\dfrac{p}{q}$(p,q 为整数，且 $q > 1$)，要看 q 的奇偶及 p 的正负而定；当 a 是无理数，必须限定 $x > 0$. 因此，对于一般的实数 a，幂函数 $y = x^a$ 在 $x > 0$ 时总有定义.

图 1-10 是一批基本初等函数的图形. 从这些图形可以看到，基本初等函数常常具有的一些重要特性：

(1) **单调性**　例如当 $a > 1$ 时，函数 $y = a^x$ 及 $y = \log_a x$ 是严格增的；当 $0 < a < 1$ 时它们是严格减的. 又如 $y = \text{tg}x$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上严格增加；$y = \text{arc cos}x$ 在 $[-1,1]$ 上严格减少.

(2) **奇偶性**　如果 $f(x)$ 对其定义域 D 中的每一点 x，$-x$ 也在 D 中，并有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**；若有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**. 显然，偶函数的图形对称于 Oy 轴，奇函数的图形对称于坐标原点. 例如，$y = x^2$ 和 $y = \cos x$ 为偶函数；$y = x^3$ 和 $y = \sin x$ 为奇函数.

(3) **周期性**　如果存在常数 $T \neq 0$，使得 $f(x)$ 对其定义域 D 中的每一点 x，$x + T$ 也在 D 中，并有

$$f(x + T) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的**周期函数**. 显然,当 $\pm T$ 是 $f(x)$ 的周期,那么 nT 也是它的周期,这里 $n=\pm 1,\pm 2,\pm 3,\cdots$. 通常我们说到周期函数的周期为 T,指的是它的最小正周期(假如存在的话). 例如,$y=\sin x$ 及 $y=\cos x$ 以 2π 为周期,$y=\mathrm{tg}x$ 及 $y=\mathrm{ctg}x$ 以 π 为周期.

由以上六个基本初等函数经过有限多次四则运算(加、减、乘、除)及有限多次复合运算所构成的函数,统称为初等函数. 这是一类在实用上相当广泛而又重要的函数,我们将逐步深入地研究它们的性质.

例如

$$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n \quad (n\text{ 次多项式}),$$

$$y=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m} \quad (\text{有理分式}),$$

就是初等函数,其中 n,m 是正整数,a_i,b_i 是实常数,且 $a_0\neq 0,b_0\neq 0$. 二者合称为**有理函数**. 再如

$$y=\frac{2^x+x\sin x}{\mathrm{arc\ tg}x}-\ln(x+\sqrt{1+x^2}),$$

也是初等函数,它是由基本初等函数 $1,x,x^2,\sqrt{x},2^x,\ln x,\sin x,\mathrm{arc\ tg}x$ 经过 3 次加法,1 次减法,1 次乘法,1 次除法及 2 次复合运算所构成的函数. 又如 $y=x^x(x>0)$ 也是初等函数,因为

$$x^x=e^{x\ln x} \quad (x>0),$$

它是由 $x,\ln x,e^x$ 通过 1 次乘法 1 次复合所构成的函数. 一般,函数

$$y=[u(x)]^{v(x)}=e^{v(x)\ln u(x)} \quad (u(x)>0)$$

称为**幂指函数**. 只要 $u(x),v(x)$ 是初等函数,它就是初等函数,注意这种函数的底数与指数都是变量,不要和幂函数及指数函数混淆起来.

在工程技术问题中常用 e^x 及 e^{-x} 构成的一种初等函数,称为**双曲函数**. 它们的定义为:

$$y=\mathrm{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \quad (\text{双曲正弦});$$

$$y=\mathrm{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \quad (\text{双曲余弦});$$

$$y=\mathrm{tg}x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \quad (\text{双曲正切});$$

……

容易验证这些双曲函数具有下列类似于三角函数的公式:

$$\mathrm{ch}^2\alpha-\mathrm{sh}^2\alpha=1;$$

$$\mathrm{sh}2\alpha=2\mathrm{sh}\alpha\mathrm{ch}\alpha;$$

$$\mathrm{sh}(\alpha\pm\beta)=\mathrm{sh}\alpha\mathrm{ch}\beta\pm\mathrm{ch}\alpha\mathrm{sh}\beta;$$

$$\mathrm{ch}2\alpha=\mathrm{ch}^2\alpha+\mathrm{sh}^2\alpha;$$

$$\mathrm{ch}(\alpha\pm\beta)=\mathrm{ch}\alpha\mathrm{ch}\beta\pm\mathrm{sh}\alpha\mathrm{sh}\beta;$$

$$\mathrm{th}\alpha=\frac{\mathrm{sh}\alpha}{\mathrm{ch}\alpha}.$$

同时,$\mathrm{sh}x,\mathrm{th}x$ 是奇函数,$\mathrm{ch}x$ 是偶函数,它们的图形如图 1-11 所示.

双曲正弦具有单值的反函数. 从

$$y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{e^{2x}-1}{2e^x}$$

得到 e^x 的二次方程

$$(e^x)^2-2ye^x-1=0.$$

解之,得