高等学校教材配套辅导丛书

高等数学辅导

同济四、五版通用（上下册合订本）

同济大学

马志敏 主编

华研数学

中山大学出版社

·广州·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学辅导/马志敏主编. —广州:中山大学出版社,2002.8
ISBN 7-306-01976-7

Ⅰ. 高… Ⅱ. 马… Ⅲ. 高等数学—高等学校—自学参考资料
Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 060006 号

责任编辑:李文 装帧设计:郭炜 责任校对:晨露 技术编辑:黄少伟

中山大学出版社出版发行
(地址:广州市新港西路 135 号 邮编:510275)
广东省新华发行集团股份有限公司经销
肇庆市科建印刷有限公司
850 毫米×1168 毫米 32 开本 19 印张 600 千字
2002 年 9 月第 1 版 2002 年 9 月第 1 次印刷
定价:20.00 元

前　言

高等数学是工科类各类专业的重要基础课程，也是硕士研究生入学考试的重点科目，学好高等数学对于后续各专业课程的学习将起着至关重要的作用。编者根据多年来的教学实际经验精心编写了这本辅导书，目的是帮助广大读者能更扎实系统地掌握高等数学的基本概念和基本理论，熟悉和拓宽各种解题思路、方法和技能。

本书结构一致，具有较强的可读性，每一章都有相应的重点提纲，并将每一章的重要内容浓缩为二至三节，每一小节第一部分将重要的必须掌握的概念、性质和基本理论进行了归纳，并且以列表的方式给出。同时对较易出现理解错误的地方作了尽可能多的注解。每一小节第二部分是本书的重点部分，其中精选了一定量的习题且解答过程尽可能地详尽，以便读者领会其思想方法和技能。之后的小节配上了达标训练及总复习题，并附带相应的参考答案。另外，为了让读者对高等数学研究生入学考试的题型有所了解，每章最后还附有近年来相关内容的考研题以及解答。

本书可作为大学本科和专科类各专业高等数学课程的学习辅导用书，对于热衷于参加自学考试的读者也会有较大帮助。

由于编者水平所限，书中如有错漏之处，敬请广大读者批评指正。

编　者

2002 年 8 月 18 日

目　　录

第一章　函数、极限与连续

函数是高等数学的研究对象,极限的思想方法是研究与讨论函数的一种重要方法,其思想理念贯彻于高等数学始终,理解函数的概念,掌握极限的概念及计算是学好高等数学的基础。

本章重点:1. 函数的概念及几何特性

2. 反函数、复合函数、初等函数

3. 极限的概念与性质

4. 极限的运算法则

5. 极限存在准则、两个重要极限

6. 无穷小的概念、性质与比较

7. 连续与间断

8. 闭区间上连续函数的性质

第一节　函　　数

一、主要内容归纳

表 1-1.1　函数的概念

定义	设 x,y 是两个变量,D 是一确定的实数集,如对每一个数 $x\in D$,按照一定的法则 f 总有惟一确定的 y 的值与它对应,则称 y 是 x 的函数,记为 $y=f(x)$。其中 D 称为该函数的定义域,x 称为自变量,y 称为因变量。 函数值全体:$W=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的值域

图像	平面点集$\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$称为函数 $y=f(x)$的图像，一般为平面上的一条曲线

表 1－1.2　反函数与复合函数的概念

反函数	设函数 $y=f(x)$的定义域为 D，值域为 W。如 $f(x)$是一一对应的，即当 $x_1\neq x_2$ 时，$f(x_1)\neq f(x_2)$。则对每一个 $y\in W$，总有惟一的 $x\in D$，使 $f(x)=y$。 由此确定了以 y 为自变量，x 为因变量的新的函数，这个函数称为 $y=f(x)$的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$。习惯上将反函数表示成 $y=f^{-1}(x)$或 $y=\varphi(x)$。其中 $f^{-1}=\varphi$ 表示 f 的逆对应
复合函数	设函数 $y=f(u)$的定义域为 D_1，$u=\varphi(x)$的定义域为 D_2，值域 $W_2=\{u\mid u=\varphi(x),x\in D_2\}\subset D_1$。则消去 u 后所得 y 与 x 的函数关系 $y=f[\varphi(x)]$称为由函数 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$复合而成的复合函数，其中 u 称为中间变量

表 1－1.3　函数的几种特性

名称	定　义	几何意义
有界性	设 $f(x)$的定义域为 D。 ①如存在 k_1，使对$\forall x\in D$，恒有 $f(x)\leqslant k_1$ 则称 $f(x)$有上界	图像位于直线 $y=k_1$ 下方
	②如存在 k_2，使对$\forall x\in D$，恒有 $f(x)\geqslant k_2$ 则称 $f(x)$有下界	图像位于直线 $y=k_2$ 上方
	③如存在 $M>0$，使对$\forall x\in D$，恒有 $\lvert f(x)\rvert\leqslant M$ 则称 $f(x)$有界	图像介于两直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间

单调性	设 $f(x)$ 在区间 I 内有定义，如对 I 内的任意两点 x_1, x_2。 当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$ 则称 $f(x)$ 在 I 内单调增加； $f(x_1)>f(x_2)$ 则称 $f(x)$ 在 I 内单调减少	图像从左至右往上升 图像从左至右往下降
奇偶性	设 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称。如对 $\forall x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$ 则称 $f(x)$ 为偶函数； $f(-x)=-f(x)$ 则称 $f(x)$ 为奇函数	图像关于 y 轴对称 图像关于原点对称
周期性	如存在常数 $l\neq 0$，使对 $\forall x$，恒有 $f(x+l)=f(x)$ 则称 $f(x)$ 为周期函数	每隔一个周期图像形状相同

表 1－1.4　基本初等函数与初等函数

基本初等函数	①幂函数　$y=x^{\alpha}$　$(\alpha\in R)$ ②指数函数　$y=a^{x}$　$(a>0, a\neq 1)$ ③对数函数　$y=\log_a x$　$(a>0, a\neq 1)$ ④三角函数　$y=\sin x, y=\cos x$ $y=\mathrm{tg}x, y=\mathrm{ctg}x$ $y=\sec x, y=\csc x$ ④反三角函数　$y=\arcsin x, y=\arccos x$ $y=\mathrm{arctg}x, y=\mathrm{arcctg}x$
初等函数	由常数和基本初等函数经有限次的四则运算及有限次的复合运算所构成并用一个解析式表示的函数统称为初等函数

二、例题解析精要

例 1. 设

$$f(x)=\begin{cases}2^x, & -1<x<0\\ 2, & 0\leqslant x<1\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$$

求 $f(2)$, $f(\frac{1}{2})$, $f(-\frac{1}{2})$

解: 由于 $2\in[1,3]$,由定义知 $f(2)=2-1=1$

$\frac{1}{2}\in[0,1)$,由定义知 $f(\frac{1}{2})=2$

$-\frac{1}{2}\in(-1,0)$,知 $f(-\frac{1}{2})=2^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

例 2. 已知 $f(x-1)=x^2+x+1$,求 $f(\frac{1}{x-1})$

解: 本题为复合函数问题,关键在于求得 $f(u)$,故引入中间变量,令 $u=x-1$,则 $x=u+1$,得

$$f(u)=(u+1)^2+(u+1)+1=u^2+3u+3$$

故 $f(\frac{1}{x-1})=\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{3}{x-1}+3$

例 3. 下列函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同?

(1) $f(x)=\frac{x-1}{x^2-1}$, $g(x)=\frac{1}{x+1}$;

(2) $f(x)=\sqrt{(1-x)^2}$, $g(x)=1-x$;

(3) $f(x)=x$, $g(x)=\ln e^x$

解: (1) $f(x)$ 与 $g(x)$ 虽然对应法则相同,而 $f(x)$ 的定义域为 $x\neq\pm1$, $g(x)$ 的定义域为 $x\neq-1$,故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是不同函数。

(2) $f(x)=\sqrt{(1-x)^2}=|1-x|$

所以当 $x>1$ 时, $f(x)\neq g(x)$,即 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的对应法则不相同,故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是不同函数。

(3) 对 $\forall x$, $\ln e^x=x$

所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的对应法则相同且定义域也相同,故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同一函数。

函数的对应法则与定义域是确定函数的本质，称为函数的两大要素；而变量的符号的选取并非函数的本质。

例 4. 求下列函数的定义域：

$$(1) y=\frac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2};\ (2) y=\ln(x^2-1)+\arcsin\frac{1}{x+1}$$

解：(1) 依题意只须 $\begin{cases}1-x^2\neq 0\\ x+2>0\end{cases}$

解得 $x\neq\pm 1$，且 $x>-2$

故定义域为 $(-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$

(2) 只须 $\begin{cases}x^2-1>0\\ x+1\neq 0\\ \left|\dfrac{1}{x+1}\right|\leqslant 1\end{cases}$

由 $x^2-1>0$，得 $x<-1$ 或 $x>1$

由 $\left|\dfrac{1}{x+1}\right|\leqslant 1$，得 $x\leqslant -2$ 或 $x\geqslant 0$

故定义域为 $(-\infty,-2]\cup(1,+\infty)$

例 5. 证明函数 $f(x)=x^3+x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加。

证明：对 $\forall x_1,x_2$，如 $x_1<x_2$，

$$\begin{aligned}f(x_2)-f(x_1)&=(x_2^3+x_2)-(x_1^3+x_1)=(x_2^3-x_1^3)+(x_2-x_1)\\&=(x_2-x_1)(x_2^2+x_1x_2+x_1^2+1)\\&=(x_2-x_1)\left[\left(x_2+\frac{1}{2}x_1\right)^2+\frac{3}{4}x_1^2+1\right]>0\end{aligned}$$

即 $f(x_1)<f(x_2)$

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加。

例 6. 证明：

(1)两个偶函数的积是偶函数；

(2)两个奇函数的积是偶函数；

(3)偶函数与奇函数的积是奇函数。

证明：(1) 设 $f(-x)=f(x)$，$g(-x)=g(x)$

令 $\varphi(x)=f(x)g(x)$

则 $\varphi(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)g(x)=\varphi(x)$

故 $\varphi(x)$ 是偶函数。

(2) 设 $f(-x)=-f(x),g(-x)=-g(x)$

令 $\varphi(x)=f(x)g(x)$

则 $\varphi(-x)=f(-x)g(-x)=[-f(x)][-g(x)]$

$=f(x)g(x)=\varphi(x)$

故 $\varphi(x)$是偶函数。

(3) 设 $f(-x)=f(x),g(-x)=-g(x)$

令 $\varphi(x)=f(x)g(x)$

则 $\varphi(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)[-g(x)]=-\varphi(x)$

故 $\varphi(x)$是奇函数。

例 7. 设函数 $f(x)$在数集 X 上有定义,证明:函数 $f(x)$在 X 上有界的充分必要条件是 $f(x)$在 X 上既有上界又有下界。

证明:(必要性)

若 $f(x)$在 X 上有界,则存在 $M>0$,使对$\forall x\in X$,有

$$|f(x)|\leqslant M$$

即 $-M\leqslant f(x)\leqslant M$

故 $f(x)$在 X 上既有上界又有下界。

(充分性)

若 $f(x)$在 X 上既有上界又有下界,则存在 K_1,K_2 使对$\forall x\in X$,有

$$K_2\leqslant f(x)\leqslant K_1$$

取 $M=\max\{|K_1|,|K_2|\}$,显然 $M>0$,从而

$$|f(x)|\leqslant M$$

故 $f(x)$在 X 上有界。

例 8. 求下列函数的反函数:

(1)$y=1+\log_4 x$;(2)$y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$

解:(1) $\log_4 x=y-1,x=4^{y-1}=\dfrac{1}{4}4^y$

故反函数为 $y=\dfrac{1}{4}4^x$

(2) $y2^x+y=2^x,2^x=\dfrac{y}{1-y},x=\log_2\dfrac{y}{1-y}$

故反函数为 $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$

例 9. 对于下列函数 $f(x)$与 $g(x)$,求复合函数 $f[g(x)]$和 $g[(f(x)]$,并确

定它们的定义域：

(1) $f(x)=\sqrt{x+1}$, $g(x)=x^4$;

(2) $f(x)=\sqrt{1-x}$, $g(x)=\sqrt{x-1}$

解：(1) $f[g(x)]=\sqrt{x^4+1}$,定义域为$(-\infty,+\infty)$

$g[f(x)]=(\sqrt{x+1})^4=(x+1)^2$,定义域为 $x+1\geqslant 0$

即$[-1,+\infty)$

(2) $f[g(x)]=\sqrt{1-\sqrt{x-1}}$

定义域满足$\begin{cases}1-\sqrt{x-1}\geqslant 0\\ x-1\geqslant 0\end{cases}$ 即 $1\leqslant x\leqslant 2$

$g[f(x)]=\sqrt{\sqrt{1-x}-1}$

定义域满足$\begin{cases}\sqrt{1-x}-1\geqslant 0\\ 1-x\geqslant 0\end{cases}$ 即 $0\leqslant x\leqslant 1$

例 10. 证明函数 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^4+1}$在定义域$(-\infty,+\infty)$内有界。

证明： $|f(x)|=\left|\dfrac{x^2+1}{x^4+1}\right|\leqslant\dfrac{(x^2+1)^2}{x^4+1}=\dfrac{x^4+1+2x^2}{x^4+1}=1+\dfrac{2x^2}{x^4+1}\leqslant 1+1=2$

故 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有界。

例 11. 设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义,且对任意实数 x,y,有 $f(x)\neq 0$,$f(xy)=f(x)\cdot f(y)$,求 $f(x)$。

解：由于 $f(0)=f(x\cdot 0)=f(x)f(0)$

且 $f(0)\neq 0$

故 $f(x)=1$

例 12. 若函数 $f(x)$对其定义域内的一切 x 恒有$f(x)=f(2a-x)$,则称函数 $f(x)$对称于 $x=a$,证明:如果函数 $f(x)$对称于 $x=a$ 及$x=b(b>a)$,则 $f(x)$必定是周期函数。

证明： 若 $f(x)=f(2a-x)$及 $f(x)=f(2b-x)$

则 $f[x+2(b-a)]=f[2b-(2a-x)]=f(2a-x)=f(x)$

所以 $f(x)$为周期函数且 $T=2(b-a)$为最小正周期。

第二节 极　　限

一、主要内容归纳

表 1－2.1　极限的概念

数列极限 ($\varepsilon-N$ 定义)	对于数列$\{x_n\}$，如存在固定常数 A 满足： 对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，使当 $n>N$ 时，恒有$\|x_n-A\|<\varepsilon$ 则称 A 是数列$\{x_n\}$的极限或称$\{x_n\}$收敛于 A。记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 或 $x_n\to A(n\to\infty)$
函数极限	1° 有限点处的极限($\varepsilon-\delta$ 定义) 设函数 $f(x)$在 x_0 的附近有定义 ①如对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时，恒有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$ 则称 A 为 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时的极限或简称 $f(x)$在 x_0 处的极限。记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0)$ ②如对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0<x_0-x<\delta$ 时，恒有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$ 则称 A 为 $f(x)$在 x_0 处的左极限。记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$　或 $f(x_0-0)=A$ ③如对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0<x-x_0<\delta$ 时，恒有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$ 则称 A 为 $f(x)$在 x_0 处的右极限。记为 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$ 或 $f(x_0+0)=A$ 2° 无穷远处的极限($\varepsilon-X$ 定义) 设函数 $f(x)$在$\|x\|$大于某一正数时有定义，如果对$\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，使当$\|x\|>X$ 时，恒有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$ 则称 A 为 $f(x)$当 $x\to\infty$时的极限。记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to\infty)$ 类似可定义　$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$

表 1－2.2　极限的有关定理

极限的惟一性	收敛数列的极限是惟一的，对函数极限有相同的性质
收敛数列的有界性	收敛数列必有界，反之不然
子数列收敛性	如数列$\{x_n\}$收敛于 a，则$\{x_n\}$的任何子数列$\{x_{n_k}\}$也收敛，且 $x_{n_k}\to a$
局部保号性	如 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且 $A>0$(或 $A<0$) 则必存在 $\delta>0$，使当 $x\in \overset{0}{U}(x_0,\delta)$时，恒有 $f(x)>0$[或 $f(x)<0$]
保持不等式性	若在 x_0 的附近成立 $f(x)\leqslant g(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$ 则 $A\leqslant B$

表 1－2.3　极限的运算法则

四则运算	如 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则有 (1)$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$ (2)$\lim[f(x)g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=AB$ (3)$\lim[kf(x)]=k\lim f(x)=kA$($k$ 为常数) (4)$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$　$(B\neq 0)$ 以上性质对数列的极限也成立
复合运算 (变量替换)	如 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，且在 x_0 的附近 $\varphi(x)\neq u_0$， 又 $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$，令 $u=\varphi(x)$ 则 $\lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$

表 1－2.4　极限存在的两个准则及两个重要极限

夹逼准则	如数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$满足： (1) $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n \quad (n>N)$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$ 则 $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = A$ 函数的极限有类似的性质
单调有界准则	单调有界数列必有极限
两个重要极限	(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=e$，$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$，$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

表 2－2.5　无穷小与无穷大的概念及关系

无穷小	若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$（或 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$），则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时是无穷小，即以零为极限的变量称为无穷小
无穷大	若当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，$\|f(x)\|$ 无限增大，则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时是无穷大
两者关系	在同一自变量的变化过程中， (1)如 $f(x)$ 为无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小； (2)如 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大

表 1-2.6　无穷小的比较

设 α,β 是在同一自变量的变化过程中的无穷小
①若 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=0$，则称 α 是 β 的高阶无穷小，记为 $\alpha=o(\beta)$
②若 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\infty$，则称 α 是 β 的低阶无穷小
③若 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=c\neq0$，则称 α 与 β 是同阶无穷小
④若 $\lim\frac{\alpha}{\beta^k}=c\neq0$，则称 α 是 β 的 k 阶无穷小($k>0$)
⑤若 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=1$，则称 α 与 β 是等阶无穷小，记为 $\alpha\sim\beta$

表 1-2.7　无穷小的性质

性质 1	有限个无穷小的和、差、积还是无穷小
性质 2	有界函数与无穷小的乘积还是无穷小
性质 3 极限与无穷小关系	$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$，其中 α 为无穷小量，即 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\alpha=0$
性质 4 无穷小的替代	若 $\alpha\sim\alpha_1,\beta\sim\beta_1$，则 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta_1}{\alpha_1}$

二、例题解析精要

例 1.　证明：$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2})=\frac{1}{2}$

证明： 设 $x_n=\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n^2}(1+2+\cdots+n)$

$=\frac{1}{n^2}\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$

对 $\forall\,\varepsilon>0$，要使

$|x_n-\frac{1}{2}|=\frac{1}{2n}<\varepsilon$

只要 $n>\frac{1}{2\varepsilon}$，故取 $N=[\frac{1}{2\varepsilon}]+1$

当 $n>N$ 时，有 $|x_n-\frac{1}{2}|<\varepsilon$

故按定义 $\lim\limits_{n\to\infty}=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2})=\frac{1}{2}$

例 2. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}\sin(2n-1)=0$

证明： 对 $\forall\varepsilon>0$，要找 $N>0$，使当 $n>N$ 时，

$$|\frac{n}{n^2+1}\sin(2n-1)|<\varepsilon$$

只须 $|\frac{n}{n^2+1}\sin(2n-1)|\leqslant\frac{n}{n^2+1}<\frac{1}{n}<\varepsilon$

即只要 $n>\frac{1}{\varepsilon}$，故取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$

当 $n>N$ 时，有 $|\frac{n}{n^2+1}\sin(2n+1)|<\varepsilon$

按定义 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}\sin(2n+1)=0$

在 $\varepsilon-N$ 定义中，并不一定要找到一个最小的 N，经常先将 $\lvert x_n-A\rvert$ 适当放大后再小于 ε，以方便寻找 N。

例 3. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，由定义证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a$$

证明： 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 所以对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1$，当 $n>N_1$ 时，有

$$|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$$

对固定的 N_1，$|x_1-a|+|x_2-a|+\cdots+|x_{N_1}-a|=M$ 为定值

所以 $\lim\frac{|x_1-a|+|x_2-a|+\cdots+|x_{N_1}-a|}{n}=0$

则对 $\frac{\varepsilon}{2}>0$，$\exists N_2$，当 $n>N_2$ 时，有