

THE FINITE ELEMENT METHOD THEORY
AND APPLICATIONS

有限单元法原理与应用

第二版

朱伯芳
著



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn





有限单元法原理与应用

(第 二 版)

朱伯芳 著

水利部科技专著出版基金资助项目

中国水利水电出版社

内 容 提 要

该书系统地阐述了有限单元法的基本原理及其在工程问题中的应用,包括弹性力学平面问题和空间问题、薄板、薄壳、厚板、厚壳、弹性稳定、塑性力学、大位移、断裂、动力反应、徐变、岩土力学、混凝土与钢筋混凝土、流体力学、热传导、工程反分析、仿真计算、网格自动生成、误差估计及自适应技术。

该书内容丰富,取材新颖,概念清晰提出了不少新的计算方法,并特别重视理论联系实际,兼有科学性和实用性,可供土木、水利、机械等工程专业的设计、科研人员使用,并可供高等院校有关专业的师生学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

有限单元法原理与应用/朱伯芳著.-2版.-北京:中国水利水电出版社,1998

ISBN 7-80124-701-9

I. 有… I. 朱… III. 有限元法-基本知识 IV. 0242.21

中国版本图书馆CIP数据核字(98)第07951号

书 名	有限单元法原理与应用 (第二版)
作 者	朱伯芳 著
出版、发行	中国水利水电出版社(北京市三里河路6号 100044)
经 售	全国各地新华书店
排 版	北京密云红光照排厂
印 刷	北京市朝阳区小红门印刷厂
规 格	787×1092毫米 16开本 39.25印张 913千字
版 次	1979年8月第一版 1998年10月第二版 1998年10月北京第二次印刷
印 数	23251—25280册
定 价	80.00元

出 版 说 明

书籍是人类进步的阶梯。科技图书集聚着科学研究和发明创造的成果，凝结着人们生产活动、科学实验的实践经验和聪明才智。当今，在振兴中华的“四化”建设中，要把科学技术转化为现实的生产力，科技图书的出版是一个重要的环节。它担负着传播科技信息，扩大科技交流，推广科技成果，普及科技知识，培养科技人才，积累科学文化，提高全民族科技意识和劳动者素质的重任，是科技事业的一个重要组成部分。

改革开放以来，我国的科技出版事业取得了飞速的发展。但在还很不完善的社会主义市场经济中，科技图书出版的合理经营机制尚未形成，“出书难、买书难、卖书难”一直困扰着许多科技人员和出版工作者。特别是一些专业性很强的科学专著，发行范围有限，出版更为困难，影响了科学技术的发展。广大知识分子在不断呼吁，出版界也竭力探索解决这一问题的途径。1985年以来，中央领导同志和中宣部曾多次指示，要求国家和各主管部门筹款，为专家学者撰写学术专著建立出版基金。其后，从中央到地方各类出版基金陆续建立，有力地推动了学术专著的出版。

水利在我国具有悠久的历史，对治国安邦起着重要的作用。新中国建立40多年来，水利建设事业取得了举世瞩目的成就，已成为我国国民经济的基础设施和基础产业，是发展工农业生产的命脉。为了支持水利科技专著的出版，以适应我国水利科研、设计、建设、管理、教学的需要，水利部于1991年9月5日向全国发布了《水利部科技专著出版基金试行条例》，拨出专款用于资助科技专著的出版，并相应地建立了出版基金评审委员会和办公室。

本出版基金主要用于资助有明显社会效益而印数较少的水利优秀科技著作的出版，包括：学术水平高、内容有创见、在学科上居领先地位的水利基础学科理论专著；反映水利重大科研成果或填补我国水利科技某个空白领域的学术专著；在水利工程技术和经济管理方面有重大科学和实用价值的专著；对我国水利科技发展有重要参考价值的国外水利科技著作的中译本。申请者在已有详细编写提纲和部分样稿时，即可向本基金办公室提出申请。

本出版基金申请项目的评审，坚持“专家评议，公平竞争，择优支持”的原则，其做法是：对所有申请项目，先由基金办送请三名同行专家评议，然后再提交评审委员会讨论、评选。对被通过的申请项目，即转入中国水利水电出

出版社的计划，由基金赞助出版。

我们希望本出版基金的实施对推动水利科技的进步和人才培养，对促进水利建设事业的发展，会起到积极的作用。为此，我们热切地希望水利界的学者、专家，能潜心将自己的创见和经验撰写成专著，踊跃向本出版基金提出申请出版，为繁荣我国的水利科技事业添砖加瓦，奉献自己的才智和力量。

水利部科技专著出版基金委员会

1997年11月

序

在近代工程科学技术的发展中，由于飞行器、船舶、车辆、机械、水坝、桥梁、房屋等工程设计上的需要，固体力学始终受到人们的重视。在 20 世纪 40 年代以前，虽然已提出了变分法、差分法、松弛法等计算方法，但它们只能用于分析形状简单的结构，对于实际工程中很复杂的结构，事实上很难进行比较精确的分析。当时在设计上往往只进行一些近似的分析，然后依靠设计者的经验、已建工程的类比、模型试验和适当加大安全系数等办法来保证工程的安全；到了 40 年代中期电子计算机出现以后，人们首先想到用计算机求解杆件结构力学中力法和变位法的基本方程，形成了矩阵力法和矩阵位移法，效果不错。在类似思想的指引下，到了 50 年代中期，人们提出了有限单元法，把连续介质离散成一组单元，使无限自由度问题转化成有限自由度问题，再用计算机求解。这一方法可用以分析形状十分复杂的结构，所以它一出现就受到人们普遍的重视，很快扩展到固体力学的各个分支，又从固体力学扩展到流体力学、热传导学、电磁学等各个领域，发展成为一个十分重要的工程计算方法。

有限单元法的优点是：①可以分析形状十分复杂的、非均质的各种实际的工程结构；②可以在计算中模拟各种复杂的材料本构关系、荷载和条件，例如可以模拟岩体中的渗流和初始地应力场、混凝土的不均匀温度场等，这些因素在物理模型中往往是难以模拟的；③可以进行结构的动力分析；④由于前处理和后处理技术的发展，可以进行大量方案的比较分析，并迅速用图形表示计算结果，从而有利于对工程方案进行优化。由于具有上述优点，有限单元法在工程设计和研究中得到了广泛的应用。

该书第一版早已脱销，水利图书出版基金委员会决定资助本书再版。由于近 20 年有限元法有了很大发展，在第二版中，作者对书的内容进行了大幅度的更新，大约 70% 的内容都是新写的，目前有限单元法的应用非常广泛，由于篇幅所限，要把各方面的内容都纳入一书中实际上已不可能。该书作者是从事水利工程设计和研究的工程师，所以该书的取材，除了有限元的基本原理外，应用部分主要着眼于土木、水利工程。全书共 27 章：第 1~4 章，主要以杆件结构和弹性力学平面问题为例介绍有限元法的基本原理；第 5~13 章阐述等参数单元、弹性力学空间问题及板、壳问题的解法；第 14~15 章说明场问题（流场和温度场）的解法；第 16~20 章说明非线性问题（塑性、徐变、失稳、大位移）的解法；第 21、22 章阐述断裂和动力问题的解法；第 23~25 章说明岩石力学、土力学、混凝土及钢筋混凝土结构的解法；第 26 章阐明工程反分析问题的解法；第 27 章阐述网格自动生成、误差估计及自适应技术。

在该书写作中，除了广泛总结国内外文献外，作者也提出了不少自己的研究成果，如混凝土坝仿真应力并层算法、徐变应力场和温度场的分区异步长解法、非均质弹性徐变体

的两个基本定理、弹性徐变应力的隐式解法、简谐徐变应力的等效模量法、岩体高次节理单元、混凝土人工冷却有限元解法、混凝土弹性模量、徐变度及松弛系数表达式、岩体节理劲度系数表达式等。

虽然有限单元法的分析能力很强，但实际工程问题有时是很复杂的，计算分析之前仍需要进行一定的概化和假定；另外，有关的计算参数和设计荷载也有一定的近似性，这些都对计算精度有影响。在用有限单元法分析工程问题时，我们应对这点有充分的认识。一方面要设法使计算中采用的概化假定、计算参数和设计荷载等尽量符合实际情况；另一方面，在选取计算网格和分析计算结果时，也要注意这些因素的不确定性所产生的影响。举个简单的例子，近 20 年来有限单元法在岩石力学中的发展很快，但对于一个复杂的岩体工程问题，可以说关键往往并不在于采用非常复杂而精细的计算方法，而在于如何搞清楚地下岩体的主要构造和有关参数。当然，在这里，我只是强调掌握工程的物理特性的重要，并无意否定在岩石力学中发展有限元方法的意义。

有限单元法应用于实际工程还碰到一个设计准则问题。现有设计规范是以过去积累的工程经验为基础的，而过去不少工程是用简化的计算方法进行设计的。简化方法与有限元法计算的结果当然不同，设计工程师做设计必须遵循设计规范，在设计准则修改以前，有限元计算的结果实际上只能起到参考作用，真正决定结构断面尺寸的有时还是老的简化计算方法。因此，为了使有限元法在工程设计中发挥更大的作用，还需要在修改设计准则方面花大力气，做大量艰巨的工作。

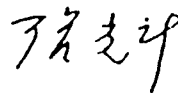
该书十分重视理论联系实际，对于有限单元法的工程应用，注意工程的物理特性，要求采用的概化假定、计算参数和计算荷载等尽量接近实际，计算方法的精度与这些条件相适应。该书还重视有限单元法的计算结果与实际观测资料相验证。

该书第一版写于十年动乱期间，1969 年作者从北京下放到黄河三门峡水电站工地，地处山区，工作条件和生活条件的改变是很大的，作者到工地以后仍夜以继日地工作着。先是积极地参加了三门峡改建工程的科研工作，后来组织了一个三人班子，积极从事有限元法的研究和推广。先后编制了五个有限元程序，为当时我国不少水利工程的设计和施工提供了大量计算成果。工地缺乏图书资料，他趁出差机会，广泛收集国内外资料，结合本人的心得体会，写出了该书第一版，对于在我国推广有限单元法发挥了一定的作用。该书作者在 10 年下放期间还出版了其他科技著作和论文，可以看到作者在十分困难的条件下，辛勤地工作，出了大量成果，这种精神值得我们学习。

该书作者于建国初期从大学土木系毕业，毕业以后长期从事工程设计和生产性科研工作。从本书内容可以看出，作者运用了大量近代数学力学手段，这些完全是作者自学的。从这里可以看到，一个科技工作者，必须通过自学，才能不断更新自己的知识结构，增强自己的工作能力。当然，对于工程师来说，数学力学只是解决问题的工具，关键还在于把握问题的实质。该书在取材上，特别重视实用，在写作过程中，十分重视物理概念的阐述，书中作者自己提出的并层算法、分区异步长解法等许多新的解法，实质上也都是由于物理概念上的创新而得到的。

该书内容丰富，取材新颖而实用，它的出版无疑将为有限元法在我国的进一步应用和发展而产生积极的推动作用，故乐为之序。

中国科学院院士、中国工程院院士、主席团成员

Handwritten signature in black ink, appearing to read '张震' (Zhang Zhen).

1997年7月2日

第二版前言

有限单元法是在六七十年代发展起来的强有力的数值分析方法，它使许多复杂的工程分析问题迎刃而解，而且由于前、后处理技术的发展，计算效率非常高，实际应用越来越广泛。

有限单元法的广泛应用，对工程的研究、设计甚至监测工作都有重要影响。在工程研究方面，过去主要依靠模型试验，现在有限单元法已成为一个重要的研究手段，并已取代了部分模型试验工作。例如，过去在水利工程科研中得到广泛应用的光弹性实验，目前已为有限单元法所取代。在工程设计方面，由于有限单元法的应用，对一些复杂的工程问题加深了认识，从而有利于提高设计的质量。有限单元法在工程监测方面的应用，也提高了监测的水平。

本书初稿写于1973~1975年，当时本人的工作单位水利水电科学研究院被撤消，本人被下放到黄河三门峡水电工地。全部书稿是在一间土坯砌筑的工棚内写成的。因地处山区，图书资料十分缺乏，虽然写作过程中作了很大努力，但限于客观条件和本人的水平，对书的质量很难有太高的期望。当初本人写书的主要目的是为土木水利工程技术人员提供一本参考书，但因本书第一版是国内出版较早的有限单元法书籍之一，出版后，除了工程技术人员外，实际上已成为工科高等院校教师和研究生的一本参考书，并被一些工科高等院校用作研究生教材，在科技期刊和学术著作中被广泛引用。这一情况使本人在欣慰之余，感到不胜惶恐。

从本书第一版脱稿到现在已近20年了，在这段时间内，有限单元法又有了很大的进展，为了反映这些新的进展，水利图书出版基金委员会决定资助本书再版。由于过去20年中有限单元法进展很大，这次修改的幅度较大，全书70%以上篇幅都是新写的。

在维持原书篇幅不变的条件下，为了纳入大量新内容，必须删去大量老内容。第一版第23~26章介绍矩阵、线性代数、变分法和加权余量法，这在当时是必要的，因为那时一般工程技术人员不熟悉这些内容。现在工科高等院校已讲授这些内容，所以这次全部删去，只在附录中列入矩阵和变分法的简略内容备查。此外，本人已另有《结构优化设计原理与应用》一书出版，所以第22章结构优化设计也删去。

本书第一版第1~7章阐述有限单元法的基本原理，这次基本保留了原来的内容，只进行了局部修改。从第8章开始，内容更新较多，新加了轴对称壳、大位移问题、混凝土与钢筋混凝土结构、工程反分析、网格自动生成、误差估计与自适应技术等章；塑性力学问题原来只是一节，这次扩充为一章。第一版第8~21章（第二版第8~11、13~16、18、19、21~24章）在内容上也有较大的更新，增加了大量新的内容，如统一形函数、非协调单元、小片检验、无限单元、挠度与转动分别插值的曲边板单元、子结构法在非线性分析中的应

用、多层混凝土结构仿真应力分析的并层算法、里兹向量叠加法、钝裂缝带模型、双屈服面弹塑性土体模型等等。不少章节虽保留了原来的名称，内容已全部更新。由于有限单元法已广泛应用于工程的各个领域，限于篇幅，本书不可能包罗万象，而只能有所侧重。总体说来，有限单元法的基本原理以及在土木、水利工程中实用价值较大的计算方法基本上都已纳入本书。

需要特别指出的是，中国科学院院士、中国工程院院士及主席团成员、国际著名工程专家张光斗先生在百忙之中拨冗为本书作序，并就工程计算方法的发展提出了十分重要的意见。本书的部分内容承陈重华教授（第16~18章）、张世雄高级工程师（第14章）和饶斌高级工程师（第22章）细心审阅，并提出了许多宝贵意见。中国水利水电出版社阳森同志为本书的编辑付出了辛勤劳动，特致谢忱！

本书内容主要取材于国内外有关文献和专著，一部分系作者本人的研究成果。因工作较忙，只能利用业余时间写作；加之本书内容非常广泛，限于本人水平，书中难免有许多缺点和错误，热情欢迎读者批评指正。

作者

1997年7月13日夜于北京

第一版前言

这是为我国水电、土建等专业工程技术人员而写的一本书。它系统地介绍了有限单元法的基本原理及其在工程问题中的应用。

本书取材，力求实用。对于有限单元法的基本原理，着重阐述基本概念及推导计算公式所必须的原理和方法。至于收敛性等问题，只说明一些主要结论，不作详细推导。对于在实际工程中有用的计算方法，进行了全面、系统的阐述，并力求讲述清楚、给出具体计算公式，以便读者掌握必要的计算方法，俾使在实际工作中加以应用。

在写作方法上，尽量做到由浅入深，先易后难，便于自学。例如，先讲杆系结构，后讲连续介质；先用直观方法讲述平面三角形单元，待读者建立初步的力学概念后，再讲述比较严密的能量方法。

本书内容大致是这样安排的：

第1章杆系结构和第2章弹性力学平面问题是全书的导引。用直观方法讲述有限单元法的基本概念，并推导有关公式，以利于读者对有限单元法建立初步的力学概念。当然，这两章所介绍的计算方法在实际工程中也是经常用到的。

第3章单元分析和第4章整体分析，讲述有限单元法的基本原理，说明如何用能量方法进行单元和整体分析。不但对虚位移原理作了详细阐述，而且根据当前发展趋势，对最小势能原理、最小余能原理及混合能量原理也作了适当介绍。

第5~9章，讲述弹性力学问题，比较全面地介绍了各种平面和空间单元的计算方法，对各种单元的特性和优缺点进行了比较，说明了在实际工作中如何选择单元，列举了应用实例。

第10~12章讲述板壳力学问题，除了一般有限单元书籍中所介绍的矩形和三角形单元外，根据近年有限单元发展情况，还介绍了混合薄板单元、曲面薄壳单元、厚板和厚壳曲面单元、弹性半空间上的板等等。根据水工上的需要，还介绍了边界由弹性基础支承的壳体计算方法。

第13、14章，讲述场问题，说明了流体力学和热传导问题的主要算法，详细阐述了实际工程中经常遇到的各种边界条件的处理，如流场的自由面和温度场的放热边界等等。

第15~21章主要讲述有限单元法在各种非线性和复杂工程问题中的应用，包括塑性力学、岩石力学、土力学、徐变、结构动力学、弹性稳定及断裂力学等。有限单元法在这些方面的应用是十分成功的。这些问题都十分复杂，过去因缺乏有效的计算方法，只能在过分简化的条件下求出一些简单解答，计算条件与实际工程相差很远。应用有限单元法以后，已经可以针对实际的工程结构和实际的边界条件进行定量的分析计算了。因此可以为工程设计提供丰富的、能反映实际情况的计算成果，有利于设计质量的提高。

作者本人是一个从事水利水电建设的工程师，本书读者对象又是土木水利专业的工程技术人员，所以本书的重点是工程应用。

本书内容，一部分取材于国内外有关文献和专著，一部分系作者本人的心得体会。书稿主要写于1973~1975年，作者在一个水电工地工作，地处山区，图书资料十分缺乏，写作时间也比较少，而本书涉及范围又非常广泛，加之限于作者水平和精力，书中难免有许多缺点乃至错误，热情欢迎读者批评指正。

作 者

1978年11月于黄河三门峡水电站



作者

简介

朱伯芳，1928年10月出生，江西省余江县人，1951年毕业于上海交通大学土木工程系，1984年获首批国家级有突出贡献专家称号，1995年当选为中国工程院院士。现任中国水利水电科学研究院教授级高级工程师、博士生导师，中国土木工程学会理事，中国土木工程计算机应用学会理事长，国际土木与结构工程计算机应用学会理事，《土木工程学报》、《计算力学学报》、《工程力学》、《水力发电》等期刊编委，第八届、第九届全国政协委员。

1961年参加治淮工程，先后担任佛子岭连拱坝、梅山连拱坝、响洪甸拱坝等我国第一批混凝土坝的设计，1957年调至中国水利水电科学研究院从事混凝土高坝的研究，开辟了我国混凝土温度应力、混凝土徐变理论、拱坝优化、水工结构反馈设计等新的研究领域；在国内外公开发表论文120余篇；出版了《水工混凝土结构的温度应力与温度控制》、《有限单元法原理与应用》、《结构优化设计原理与应用》等专著，以及《水工结构与固体力学论文集》、《朱伯芳院士文选》等；先后获国家科技进步二等奖、国家自然科学三等奖及水利部、电力部一、二等科技进步奖共7项。

目 录

出版说明

序

第二版前言

第一版前言

第 1 章 杆系结构	1
§ 1-1 概述	1
§ 1-2 水平杆单元的刚度矩阵	3
§ 1-3 倾斜杆单元的刚度矩阵	4
§ 1-4 坐标转换	6
§ 1-5 结点平衡方程与整体刚度矩阵	7
§ 1-6 边界条件的处理	8
§ 1-7 梁单元的刚度矩阵	14
§ 1-8 梁单元荷载向结点的移置	16
§ 1-9 由位移转换矩阵建立整体刚度矩阵	17
§ 1-10 用编码法建立整体刚度矩阵	19
§ 1-11 考虑轴向力和剪切变形的梁单元刚度矩阵	21
§ 1-12 温度荷载	25
§ 1-13 空间的梁单元刚度矩阵	27
参考文献	31
第 2 章 弹性力学平面问题	33
§ 2-1 连续介质的离散化	33
§ 2-2 位移函数	35
§ 2-3 单元应变	36
§ 2-4 初应变	37
§ 2-5 单元应力	38
§ 2-6 等效结点力与单元刚度矩阵	41
§ 2-7 结点荷载	45
§ 2-8 结点平衡方程与整体刚度矩阵	47
§ 2-9 用编码法建立整体刚度矩阵	50
§ 2-10 计算实例	51
参考文献	54
第 3 章 单元分析	55
§ 3-1 虚位移原理	55
§ 3-2 单元位移	57
§ 3-3 单元应变与应力	58
§ 3-4 结点力与单元刚度矩阵	59

§ 3-5 结点荷载	60
§ 3-6 虚位移原理应用实例——梁单元	61
§ 3-7 应变能和余应变能	64
§ 3-8 最小势能原理	64
§ 3-9 最小余能原理	67
§ 3-10 杂交单元	68
§ 3-11 杂交单元实例——平面矩形单元	70
§ 3-12 混合能量原理	72
§ 3-13 复合单元	74
参考文献	75
第 4 章 整体分析	76
§ 4-1 结点平衡方程	76
§ 4-2 最小势能原理的应用	77
§ 4-3 最小势能解答的下限性质	78
§ 4-4 解答的收敛性	79
§ 4-5 子结构分析	81
参考文献	84
第 5 章 平面问题高次单元	86
§ 5-1 矩形单元	86
§ 5-2 面积坐标	90
§ 5-3 高次三角形单元	92
参考文献	95
第 6 章 弹性力学轴对称问题	96
§ 6-1 轴对称荷载	96
§ 6-2 非轴对称荷载	100
参考文献	103
第 7 章 弹性力学空间问题	104
§ 7-1 常应变四面体单元	104
§ 7-2 体积坐标	108
§ 7-3 高次四面体单元	110
参考文献	111
第 8 章 形函数、坐标变换、等参数单元与无限单元	112
§ 8-1 形函数定义	112
§ 8-2 一维形函数	113
§ 8-3 二维形函数	113
§ 8-4 三维形函数	119
§ 8-5 坐标变换	124
§ 8-6 位移函数	127
§ 8-7 单元应变	128

§ 8-8 刚度矩阵	132
§ 8-9 结点荷载	134
§ 8-10 等参数单元的退化	135
§ 8-11 数值积分	140
§ 8-12 数值积分阶次的选择	142
§ 8-13 应力精化与应力修匀	146
§ 8-14 单元形态与单元布置	150
§ 8-15 非协调单元	151
§ 8-16 小片检验	154
§ 8-17 三角形、四面体与三棱体曲边单元	157
§ 8-18 等参数单元中的向量计算	160
§ 8-19 等参数单元算例	163
§ 8-20 杆件一块体连接单元	165
§ 8-21 无限单元	172
参考文献	175
第 9 章 各种平面与空间单元的比较、应用实例	177
§ 9-1 各种平面单元的比较与选择	177
§ 9-2 各种空间单元的比较与选择	179
§ 9-3 拱坝应力分析	182
§ 9-4 支墩坝应力分析	186
§ 9-5 重力坝空间作用的分析	188
§ 9-6 土坝空间作用的分析	188
§ 9-7 隧洞衬砌应力分析	190
参考文献	191
第 10 章 弹性薄板	192
§ 10-1 弹性薄板的弯曲	192
§ 10-2 矩形薄板单元	197
§ 10-3 三角形薄板单元	201
§ 10-4 挠度与转动分别插值的曲边板单元	206
§ 10-5 弹性基础上的板	210
参考文献	213
第 11 章 弹性薄壳	214
§ 11-1 局部坐标系中的单元刚度矩阵	214
§ 11-2 坐标转换、整体刚度矩阵	216
§ 11-3 局部坐标的方向余弦	218
§ 11-4 曲面薄壳单元	221
§ 11-5 曲梁支承或加强的薄壳	224
§ 11-6 算例	226
参考文献	227

第 12 章 轴对称壳	228
§ 12-1 线性单元	228
§ 12-2 曲边单元	230
参考文献	233
第 13 章 弹性厚板和厚壳	234
§ 13-1 厚板曲边单元	234
§ 13-2 厚壳曲面单元	237
§ 13-3 算例	243
参考文献	246
第 14 章 流体力学问题	247
§ 14-1 稳定渗流基本方程及其离散化	247
§ 14-2 渗流自由面计算	251
§ 14-3 渗流场排水孔效果计算	255
§ 14-4 非稳定渗流	258
§ 14-5 地震时动水压力	259
§ 14-6 用势函数 ϕ 表示的势流	260
§ 14-7 用流函数 ψ 表示的势流	263
§ 14-8 自由面流动	266
参考文献	269
第 15 章 热传导问题	270
§ 15-1 热传导问题	270
§ 15-2 在空间域的离散化	272
§ 15-3 在时间域的离散化	274
§ 15-4 大体积混凝土的人工冷却	284
§ 15-5 不稳定温度场的分区异步长解法	288
参考文献	291
第 16 章 非线性有限元分析方法	292
§ 16-1 增量法	292
§ 16-2 迭代法	296
§ 16-3 混合法	301
§ 16-4 子结构法在非线性分析中的应用	301
参考文献	303
第 17 章 塑性力学问题	304
§ 17-1 单向受力的应力—应变关系	304
§ 17-2 应力张量的分解与应力不变量	305
§ 17-3 Haigh-Westergaard 应力空间	307
§ 17-4 应变张量的分解	310
§ 17-5 屈服准则	311
§ 17-6 强化条件	324