代數整式

劉尼著

中国青年出版社

代數整式

劉尼著

中国青年出版社
一九五五年·北京

內 容 提 要

本書是供初級中學二年級學習代數整式四則運算作參考用的。首先講述代數式所用到的各種概念，以及加法和乘法運算的基本定律和它們的推廣。對於乘法和除法更加特別注意，爲的是給接下去學習因式分解打下基礎。

書號 625　數理化 63

代數整式

著　者　劉　　尼

青年·開明聯合組織

出版者　中國青年出版社

北京東四12條老君堂11號

總經售　新華書店

印刷者　北京市印刷二廠

開本 787×1092 1/32　　一九五五年二月北京第一版

印張 2 5/8　字數 50,000　　一九五五年二月北京第一次印刷

定價 2,700 元　　印數 1—70,000

北京市書刊出版業營業許可證出字第036號

目　次

一　單項式和多項式

加法的兩個定律

在代數中，加法的運算有兩個基本定律，交換律和結合律，這和在算術中一樣．為了明確認識這兩個定律的意義，我們舉例說明如下：

（1）交換律　假若有兩隻口袋，甲口袋裝有7斤麵粉，乙口袋裝有5斤麵粉，要把這兩口袋麵粉併作一口袋，我們就有兩種辦法：第一，把甲口袋的麵粉倒進乙口袋去．這時乙口袋所裝的麵粉是5斤+7斤=12斤．第二，把乙口袋的麵粉倒進甲口袋去．這時甲口袋所裝的麵粉是7斤+5斤=12斤．不管是併到乙口袋或甲口袋，合併以後口袋裏的麵粉都是12斤．這就是說，

$$5\text{斤}+7\text{斤}=7\text{斤}+5\text{斤}=12\text{斤}.$$

再舉一個例．你由你的家（圖1，比如說在O點）動身，向東走2里，再向東走3里，結果你到了A，你一共走的是（+2里）+（+3里）=+5里，就是在你家的東邊5里．倘若你先向東走3里，然後再向東走2里，結果你仍然一共走了（+3里）+（+2里）=+5里，還是在你家東邊5里的地方A．這就是說，

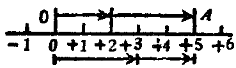


圖1.

$$(+2\text{里})+(+3\text{里})=(+3\text{里})+(+2\text{里})=+5\text{里}.$$

又若你先向東走3里，折回頭向西走5里，結果你到了B(圖2)，你一共走的是$(+3里)+(-5里)=-2里$，就是在你家的西邊2里．倘若你先向西走5里，然後向東走3里，結果你仍然一共走了$(-5里)+(+3里)=-2里$，還是在你家西邊2里的地方B．這就是說，

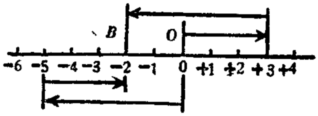


圖2.

$$(+3\text{里})+(-5\text{里})=(-5\text{里})+(+3\text{里})=-2\text{里}.$$

末了，若你先向西走2里，再向西走3里，結果你到了C(圖3)，你一共走的是$(-2里)+(-3里)=-5里$，就是在你家的西邊5里．倘若你先向西走3里，然後再向西走2里，結果你仍然一共走了$(-3里)+(-2里)=-5里$，還是在你家西邊5里的地方C．這就是說，

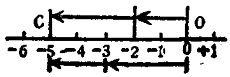


圖3.

$$(-2\text{里})+(-3\text{里})=(-3\text{里})+(-2\text{里})=-5\text{里}.$$

綜合上面所舉的例，我們得出一個定律：

兩個數相加，將這兩個數的位置交換，所得的和不變．

若用a和b表示任意兩個數，這個定律就可以寫成

$$a+b=b+a.$$

這就是加法的交換律．

(2)結合律　假若有甲、乙、丙三隻口袋，裝的麵粉分別是5斤，7斤，4斤．我們要把這三口袋麵粉合併裝在一隻口袋裏，我們可以先把乙口袋的麵粉倒進甲口袋，再把丙口袋的麵粉也倒進去．這樣甲口袋所裝的麵粉一共是5斤+7斤+

4 斤=16 斤．但是我們也可以先把乙、丙兩口袋的麵粉合併裝在一隻口袋裏，然後倒進甲口袋．那末，這隻口袋所裝的麵粉一共是 5 斤+(7 斤+4 斤)=16 斤．我們還可以先把甲、丙兩口袋的麵粉合併裝在一隻口袋裏，然後倒進乙口袋．這就得 7 斤+(5 斤+4 斤)=16 斤．無論我們所用的方法是哪一種，最後併在一隻口袋裏的麵粉都是 16 斤．由此可見，

$$5\text{ 斤}+7\text{ 斤}+4\text{ 斤}=5\text{ 斤}+(7\text{ 斤}+4\text{ 斤})$$
$$=7\text{ 斤}+(5\text{ 斤}+4\text{ 斤})=16\text{ 斤}.$$

再拿走路來做例．你第一天先由家向東走 5 里，再折回頭向西走 4 里，第二天又向西走 3 里，那末你兩天走的路一共就是

$$(+5\text{ 里})+(-4\text{ 里})+(-3\text{ 里})$$
$$=(+1\text{ 里})+(-3\text{ 里})=-2\text{ 里}.$$

結果你是在你家西邊 2 里的地方．

假若你第一天先由家向東走 5 里，第二天折回頭向西走 4 里，接着再向西走 3 里，你兩天走的路一共就是

$$(+5\text{ 里})+[(-4\text{ 里})+(-3\text{ 里})]$$
$$=(+5\text{ 里})+(-7\text{ 里})=-2\text{ 里}.$$

你仍然是在你家西邊 2 里的地方．

末了，假若你第一天先向西走 4 里，第二天折回頭向東走 5 里，再折回頭向西走 3 里，你兩天走的路一共就是

$$(-4\text{ 里})+[(+5\text{ 里})+(-3\text{ 里})]$$
$$=(-4\text{ 里})+(+2\text{ 里})=-2\text{ 里}.$$

你仍然是在你家的西邊 2 里．由此可見，

$$(+5\text{ 里})+(-4\text{ 里})+(-3\text{ 里})$$
$$=(+5\text{ 里})+[(-4\text{ 里})+(-3\text{ 里})]$$
$$=(-4\text{ 里})+[(+5\text{ 里})+(-3\text{ 里})]$$
$$=-2\text{ 里}.$$

綜合上面所舉的例，我們得出一個定律：

三個數相加，先將任何兩個數結合成一組，再和另外一個數相加，所得的和不變.

若用 a, b 和 c 表示任意三個數，這個定律就可以寫成

$$a+b+c=a+(b+c)=b+(a+c).$$

這就是加法的結合律.

將這兩個定律結合起來，我們可以把它們應用到若干個數相加的運算上去. 這就是：

（i）若干個數相加，無論將各個數的位置怎樣交換，所得的和不變. 如：

$$a+b+c=a+c+b=b+a+c=b+c+a$$
$$=c+a+b=c+b+a,$$

$$a+b+c+\cdots\cdots=b+a+c+\cdots\cdots=c+a+b+\cdots\cdots.$$

（ii）若干個數相加，無論將各個數怎樣結合，所得的和不變. 如：

$$a+b+c+d+e=a+(b+c)+(d+e)$$
$$=a+(b+c+d)+e$$
$$=(a+e)+(b+d)+c$$
$$=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

乘法的三個定律

和算術中一樣，乘法除了有交換律、結合律，還有分配律，現在分別說明如下：

（1）交換律　下面有兩個圖：左邊的一個（圖 4）表示許多人排成的一個長方陣，右邊的一個（圖 5）表示一個長方形的面積．

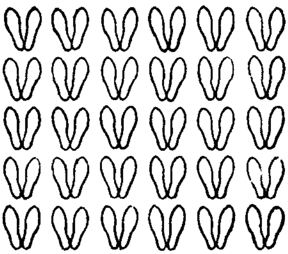


圖 4.

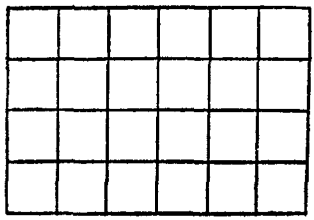


圖 5.

由左邊的方陣說：我們一個一個地數，可以數出它一共有 30 個人；但是，假若這方陣很大，就是說它的人數很多，這種方法非常不方便．我們可以數出每一排有 6 個人，一共有 5 排，用加法，6 人+6 人+6 人+6 人+6 人=30 人；我們也可以數出每一行有 5 個人，一共有 6 行，用加法 5 人+5 人+5 人+5 人+5 人+5 人=30 人．用加法自然比一個一個地數方便得多了．但用加法還不如用乘法簡捷．由每排 6 個人計算，6 人×5=30 人；由每行 5 個人計算，5 人×6=30 人；兩種算法所得的結果都和我們一個一個地數所得到的相同，可知，

$$6\times5=5\times6=30.$$

再由右邊的長方形看，它一共有24個同樣大小的正方形．若我們就用這樣大小的一個正方形作為面積的單位，那末，這長方形所含單位面積的數目便是24．自然，我們可以一個一個地數，數得24個正方形．我們也可以橫着數，每一排有6個正方形，一共有4排，$6\times4=24$，得24個正方形．我們也可以直着數，每一行有4個正方形，一共有6行，$4\times6=24$，還是得24個正方形．這就是說，無論用怎樣的方法計算，只要是把同一個正方形作面積的單位，這長方形所含單位面積的數目總是24．由此可知，

$$6\times4=4\times6=24.$$

總括這兩個例，我們可以說：

兩個數相乘，將這兩個數的位置交換，所得的積不變．

若用 a 和 b 表示任意兩個數，這個定律就可以寫成

$$ab=ba.$$

這就是乘法的交換律．

（2）結合律　下圖（圖6）表示3隊人，每隊有5排，每

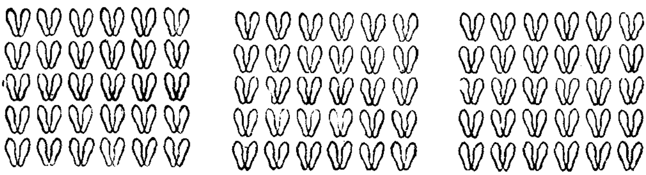


圖 6.

排有6個人．計算這三隊的總人數，我們有幾種方法：

第一，用隊做標準，一隊是6人×5＝30人，一共3隊，便是

$$6\text{人}\times5\times3=30\text{人}\times3=90\text{人}.$$

第二，用排做標準，每隊有 5 排，3 隊一共是 5 排 $\times 3=15$ 排，每排 6 個人，一共便是

$$6\text{ 人}\times(5\times3)=6\text{ 人}\times15=90\text{ 人}.$$

第三，用行做標準，每隊有 6 行，3 隊一共是 6 行 $\times 3=18$ 行，每行 5 個人，一共便是

$$5\text{ 人}\times(6\times3)=5\text{ 人}\times18=90\text{ 人}.$$

由此可知， $6\times5\times3=6\times(5\times3)=5\times(6\times3)=90.$

再舉一個例．下面（圖 7）上方是由若干個小立方體堆成的長方體．我們就用一個小立方體的體積作爲量體積的單位，試來計算這個長方體所含小立方體的個數．我們也有幾種算法：

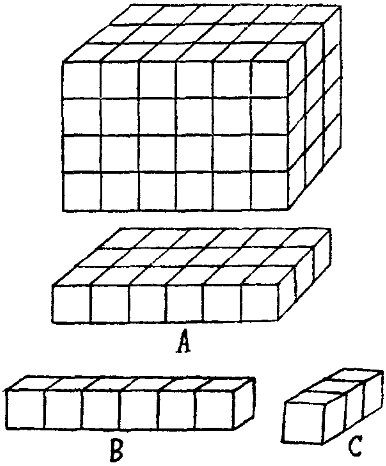


圖 7.

第一，用 A 這樣的層做標準，一共有 4 層．每層有 3 排，每排有 6 個小立方體，共有 6 個 $\times 3=18$ 個小立方體．因此，這長方體所含小立方體有

$$6\text{ 個}\times3\times4=18\text{ 個}\times4=72\text{ 個}.$$

第二，用 B 這樣的橫條做標準，每層有 3 條，四層一共是 3 條 $\times 4=12$ 條，每條有 6 個小立方體，一共便是

$$6\text{ 個}\times(3\times4)=6\text{ 個}\times12=72\text{ 個}.$$

第三，用 C 這樣的直條做標準，每層有 6 條，四層一共是 6 條×4＝24 條，每條有 3 個小立方體，一共便是

$$3\text{ 個}\times(6\times4)=3\text{ 個}\times24=72\text{ 個}.$$

由此可知，　$6\times3\times4=6\times(3\times4)=3\times(6\times4)=72.$

總括這兩個例，我們可以說：

三個數連乘，將任何兩個數結合成一組先乘，再和另外一個數相乘，所得的積不變.

若用 a,b 和 c 表示任意三個數，這個定律就可以寫成

$$abc=a(bc)=b(ac).$$

這就是**乘法的結合律**.

將這兩個定律結合起來，我們也可以把它們應用到若干個數連乘的運算上去．這就是：

(i) **若干個數連乘，無論將各個數的位置怎樣交換，所得的積不變.** 如：

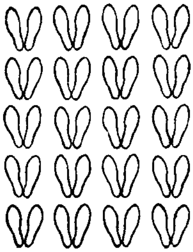
$$abc\cdots\cdots=bac\cdots\cdots=cab\cdots\cdots.$$

(ii) **若干個數連乘，無論將各個數怎樣結合，所得的積不變.** 如：

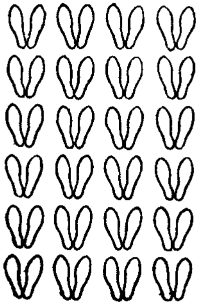
$$abcde=a(bc)(de)=a(bcd)e$$
$$=(ae)(bd)c=\cdots\cdots.$$

(3) **分配律**　假若有甲乙 2 隊人，都排成 4 行，每行甲隊 5 個人，乙隊 6 個人，我們來計算這兩隊一共有多少人．我們可以把兩隊分開來算，甲隊有 5 人×4＝20 人，乙隊有 6 人×4＝24 人，所以兩隊的人數一共是

$$5\text{ 人}\times4+6\text{ 人}\times4=20\text{ 人}+24\text{ 人}=44\text{ 人}.$$



(甲)



(乙)

圖 8.

但是我們也可以用另外一種方法計算，甲乙兩隊的行數既是一樣多，我們就可以先看一看兩隊接在一起，每行有多少人，然後再計算一共是多少人．這就是

$$(5\text{ 人}+6\text{ 人})\times 4=11\text{ 人}\times 4=44\text{ 人}.$$

由此可知，$(5+6)\times 4=5\times 4+6\times 4=44$.

又如，甲乙兩個人一同做 3 天的工，每天甲做 5 件貨品，乙做 4 件貨品，我們試計算他們一共做了多少貨品．

甲一天做 5 件，3 天就做 5 件 $\times 3=15$ 件．

乙一天做 4 件，3 天就做 4 件 $\times 3=12$ 件．

所以，他們一共做的是

$$5\text{ 件}\times 3+4\text{ 件}\times 3=15\text{ 件}+12\text{ 件}=27\text{ 件}.$$

但是我們也可以先計算他們一天做的一共是多少件，再算他們 3 天一共做多少件．這就是

$$(5\text{ 件}+4\text{ 件})\times 3=9\text{ 件}\times 3=27\text{ 件}.$$

由此可知， $(5+4)\times 3=5\times 3+4\times 3=27$.

總括這兩個例，我們可以說：

用一個數去乘兩個數的和，等於用這個數分別去乘兩個數所得的兩個積的和．

若用 a, b 和 c 表示任意三個數，這個定律就可以寫成

$$(a+b)c=ac+bc.$$

很明白，這個定律可以應用到用同一個數去乘兩個數的差．如：

$$(a-b)c=ac-bc.$$

又可以由兩個數的和推廣到若干個數的代數和．如：

$$(a+b-c\cdots\cdots)\times m=am+bm-cm\cdots\cdots.$$

同乘法的交換律相結合，還可以得：

$$m(a+b-c\cdots\cdots)=ma+mb-mc\cdots\cdots.$$

綜合起來，就是：

一個數和若干個數的和（或代數和）相乘所得的積，等於用這個數分別和各個相加的數相乘所得的積的和．

這就是乘法的分配律．

單項式和多項式

我們知道算術或代數裏所用的運算法，不外乎加、減、乘、除、乘方、開方．這六種運算法可以分成三級：第一級，加法和減法；第二級，乘法和除法；第三級，乘方和開方．依照這樣的分級法，我們可以規定：

一個代數式依照順序計算，若最後的運算屬於第二級或第三級，這樣的代數式就叫做單項式．

例如：$3,\ a,\ 2a,\ xy,\ x^2y,\ (xy)^3,\ (a+b)c,\ (a+b)^2,$

$$x(z-2y)^3,\ \frac{x+y}{a},\ \frac{xy}{a-b},$$

都是單項式．這裏後面五個代數式裏雖然有加減（第一級）運算，但是這種加減運算不是最後的運算，如$(a+b)c$是a和b先

論運算順序，也( )-( ) 代數和
整數和分數 之及

掌字母如順序

相加，再用 c 去乘它們的和，最後的運算是乘法(第二級)．

我們已經熟悉演算一個式子的順序是先乘除(包括乘方和開方)後加減，若一個代數式是由加號‘+’或減號‘−’連結若干個單項式而構成的，它就表示：這個式子的值是它所含的各個單項式的值的代數和．這樣的式子叫做多項式．當然，和單項式相對，也可以這樣說：

一個代數式依照順序計算，若最後的運算屬於第一級，這樣的代數式就叫做多項式．

$$\text{例如：}a+b,\ a-b,\ ab-3,\ a+\frac{ab}{c},$$

$$3+a+xy-(a+b)c+\frac{x+y}{a},$$

都是多項式．

我們應當注意：第一，多項式中，由‘+’‘−’號分隔開的部分就叫做這代數式的項；在上面的例子中，前四個各有兩項，末一個却有五項．第二，多項式中的一項是連同它前面的符號‘+’‘−’算的，但是第一項前面的‘+’號常常省略不寫．上面的例子中，末一個代數式所含的五項是：3(就是 $+3$)，$+a$，$+xy$，$-(a+b)c$，$+\frac{x+y}{a}$．

分式和整式

代數式中含有文字作除數的叫做分式；不含有文字作除數的叫做整式．

例如：$\frac{5}{a}$，$\frac{y}{x}$，$\frac{a+b}{c}$，$\frac{x-y}{a+b}$，都是分式；

$5a$，xy，$\frac{a^2b}{3}$，$a(a^2-b^2)$，$\frac{ab(x+y)^2}{37}$，都是整式．

這裏$\frac{a^2b}{3}$和$\frac{ab(x+y)^2}{37}$也是整式，因爲3和37是數字不是文字.

一個整式所成的單項式，叫做整式單項式；上面的各個整式都是整式單項式．一個分式所成的單項式，叫做分式單項式；上面的各個分式都是分式單項式.

由若干個整式單項式所組成的多項式，叫做整式多項式.

例如： $a+b$，$a-b$，$2x+y^2-3$，$3+2x+xy-(a+b)c$，都是整式多項式.

含有分式單項式的多項式，叫做分式多項式.

例如：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$，$\frac{x}{a}+\frac{x-y}{b^2}$，$3+ax+\frac{xy}{c}$，$a(a+b)-\frac{a-b}{c}$，都是分式多項式.

無論是整式多項式或分式多項式，都依照它所含的項數是2、3、4、……n分別叫做二項式、三項式、四項式、……n項式.

數係數和係數

整式單項式，如$3a$是由3和a相乘而得的，$a(-2)b$是由a、-2、b相乘而得的，$a5b(-3)x$是由a、5、b、-3、x相乘而得的，$xyxa$是由x、y、x、a相乘而得的．在這些單項式中，相乘各數有由數字3、2、5表示的，也有由字母a、b、x、y表示的．若我們應用乘法的交換律和結合律分別將它們整理一下，可以寫得簡單些：

$$3a=3a,\ a(-2)b=-2ab,$$

$$a5b(-3)x=5(-3)abx=-15abx,$$

$$xyxa=a(xx)y=ax^2y.$$

上面各個整式單項式的整理：第一，是將相乘各數中用數字表示的各數相乘，把所得的積作爲整理後的一個乘數；第二，是將相乘各數中同一個字母所表的數結合起來，用乘方的形式表示；第三，先寫數字，後依拉丁字母的順序寫各字母所表的數（這是一般的情況，若有必要也可以不依字母的順序）．經過整理後的整式單項式，是這種單項式的標準形式．

在整式單項式的相乘各數中，用數字所表的那一個數連同它前面的符號，叫做這單項式的數係數；上面所舉的四個整式單項式中，前三個的數係數依次是 3（就是 $+3$）、-2、-15，末一個的數係數可以看作是 1．

這幾個數係數都是整數，由乘法的定律和定義我們知道：

$$3a=a\times 3=a+a+a,$$

$$4ab=(ab)\times 4=ab+ab+ab+ab.$$

這就是說，正整數係數表示它後面的文字乘式相加的個數．

又 $$-3a=-(+3a)=-(a+a+a)=-a-a-a,$$

$$-3ax^2y^3=-ax^2y^3-ax^2y^3-ax^2y^3.$$

這就是說，負整數係數表示它後面的文字乘式相減的個數．

數係數並不限定是整數，也可以是分數，如 $\frac{1}{2}a$、$\frac{3}{5}xy^2$ 等，這時，數係數就表示這個單項式的值是這個數係數後面文字乘式的值的幾分之幾：$\frac{1}{2}a$ 的值是 a 的 $\frac{1}{2}$，$\frac{3}{5}x^2y$ 的值是 x^2y 的 $\frac{3}{5}$．

在代數的初步運算中，我們常用的是數係數，但更進一步就不能這樣限制了．如 $5ab$，5 是這一個單項式的數係數；但這一個單項式也可以看成是由 $5a$ 和 b 或 $5b$ 和 a 兩個數相乘得