

郑宪祖 王仲春 何 平

赵更吉 姚 兵



· 高等学校自学函授教材 ·

数学分析

(下册)

陕西科学技术出版社

72556

D17
8733:2

高等学校自学函授教材

数学分析

(下册)

郑宪祖 王仲春 何平 编
赵更吉 姚兵

陕西科学技术出版社

责任编辑 赵生久

高等学校自学函授教材

数学分析

(下 册)

郑宪祖 王仲春 何 平 编
赵更吉 姚 兵

陕西科学技术出版社出版

(西安北大街 131 号)

陕西省新华书店发行 西北师范学院印刷厂印刷

787×1092 毫米 32 开本 14.625 印张 300 千字

1986 年 6 月第 1 版 1986 年 6 月第 1 次印刷

印数: 1—9000

统一书号: 7202·127 定价: 3.05 元

前 言

本书分上、下两册。上册包括：极限理论与一元函数微积分；下册包括：级数理论和多元函数微积分。根据自学为主的特点，本书精选内容，分散难点，贯彻启发式，力争对读者有一定的吸引力；在叙述上，尽力作到深入浅出、通俗易懂、便于自学；在体例上，每章由两部分组成，第一部分为教材正文，第二部分为自学指导与参考资料。

自学指导与参考资料主要内容包括：“内容结构分析与要点”，它是本章概括性的总结，利于读者从教材结构上系统地掌握所学内容，了解其重点；“基本内容、原理的补充说明”，供教师教学参考及学有余力的读者进一步钻研教材内容；“典型例题与解题方法”，通过各种类型的例题，总结一些解题方法，除供教学或解题时参考外，可为自学考试提供资料。

本书是甘肃省教育厅委托西北师范学院函授部组织人力编写的，主要供函授大学、夜大学、电大、教师进修学院、中等专业学校及有志自学成材者学习，也可作为全日制大学自学教材或教学参考书。

本书由西北师范学院郑宪祖教授主编，在编写和出版过程中，得到了陕西科学技术出版社的大力支持，在此表示感谢。

由于我们水平有限，缺点错误及疏漏之处难免，希读者批评指正。

编 者

1986. 2

目 录

第九章 数项级数	(1)
§ 9.1 数项级数的敛散性	(1)
§ 9.2 同号级数	(11)
§ 9.3 一般项级数	(23)
自学指导与参考资料	(34)
一 内容结构分析与要点	(34)
二 基本概念、原理的补充说明	(34)
三 典型例题与解题方法	(36)
四 习题答案与提示	(48)
第十章 函数列与函数项级数	(50)
§ 10.1 收敛概念	(50)
§ 10.2 一致收敛的判别法	(60)
§ 10.3 极限函数(和函数)的解析性质	(66)
自学指导与参考资料	(76)
一 内容结构分析与要点	(76)
二 基本概念、原理的补充说明	(76)
三 典型例题与解题方法	(77)
四 习题答案与提示	(90)
第十一章 幂级数	(93)
§ 11.1 幂级数的性质	(93)
§ 11.2 函数的幂级数展开	(105)
自学指导与参考资料	(116)
一 内容结构分析与要点	(116)

二	基本概念、原理的补充说明	(116)
三	典型例题与解题方法	(118)
四	习题答案与提示	(132)
第十二章	傅里叶级数	(136)
§ 12.1	傅里叶级数	(136)
§ 12.2	函数的傅里叶级数展开	(152)
	自学指导与参考资料	(163)
一	内容结构分析与要点	(163)
二	基本概念、原理的补充说明	(163)
三	典型例题与解题方法	(164)
四	习题答案与提示	(177)
第十三章	多元函数的极限与连续性	(179)
§ 13.1	多元函数的概念	(179)
§ 13.2	多元函数的极限与连续	(187)
	自学指导与参考资料	(199)
一	内容结构分析与要点	(199)
二	基本概念、原理的补充说明	(199)
三	典型例题与解题方法	(200)
四	习题答案与提示	(205)
第十四章	多元函数的微分学及其应用	(208)
§ 14.1	多元函数的偏导数与全微分	(208)
§ 14.2	多元函数的微分法	(222)
§ 14.3	偏导数的几何应用	(233)
§ 14.4	高阶微分法与二元函数的 泰勒公式	(241)
	自学指导与参考资料	(258)

一	内容结构分析与要点	(258)
二	基本概念、原理的补充说明	(258)
三	典型例题与解题方法	(259)
四	习题答案与提示	(267)
第十五章	二重积分	(274)
§ 15.1	二重积分的概念	(274)
§ 15.2	二重积分的计算	(281)
§ 15.3	三重积分	(299)
§ 15.4	重积分的应用	(312)
自学指导与参考资料		(323)
一	内容结构分析与要点	(323)
二	基本概念、原理的补充说明	(323)
三	典型例题与解题方法	(325)
四	习题答案与提示	(332)
第十六章	曲线积分与曲面积分	(337)
§ 16.1	第一型曲线积分	(337)
§ 16.2	第二型曲线积分	(345)
§ 16.3	格林公式、曲线积分与路线 无关的条件	(359)
§ 16.4	曲面积分	(374)
§ 16.5	奥高公式与斯托克斯公式	(388)
自学指导与参考资料		(397)
一	内容结构分析与要点	(397)
二	基本概念、原理的补充说明	(397)
三	典型例题与解题方法	(399)
四	习题答案与提示	(407)

第十七章 广义积分与含参变量积分	(409)
§ 17.1 无穷积分	(409)
§ 17.2 瑕积分	(421)
§ 17.3 含参变量积分	(429)
自学指导与参考资料	(448)
一 内容结构分析与要点	(448)
二 基本概念、原理的补充说明	(448)
三 典型例题与解题方法	(449)
四 习题答案与提示	(458)

第九章 数项级数

无穷级数的理论不仅是研究函数的一个重要工具，而且对微积分学的进一步发展及讨论微分方程的解都是十分重要的。

§9.1 数项级数的敛散性

一 级数的收敛与发散概念

把一个数列 $\{u_n\}$:

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$$

的项依次用加号连接起来，得到的表达式

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots, \quad (1)$$

简写为

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots,$$

称为无穷数项级数，简称级数，其中 $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ 称为级数(1)的项， u_n 为通项。

这里要特别注意，级数(1)仅是一个数学表达式，也就是说级数(1)还是一个未定义的新概念。

下面我们借用数列极限给出无限项“和”的定义。具体做法是：作级数(1)的前 n 项和 S_n ，即

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n,$$

称 S_n 为级数 (1) 的 n 项部分和, 于是由级数 (1) 的 n 项部分和 S_n , 当 n 趋于无限大时, 可构造出另一个无穷数列 $\{S_n\}$, 即

$$S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots, \quad (2)$$

现在我们根据这个数列有无极限, 可以引进无穷级数 (1) 的收敛与发散的概念.

定义 如果无穷级数 (1) 的部分和数列 (2) 收敛, 并设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S,$$

则称级数 (1) 收敛, 其和为 S , 记作 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

若部分和数列 (2) 发散, 则称无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散. 这

时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 没有和.

例 1 讨论几何级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

的敛散性^{〔1〕}. 其中 r 是公比, $a \neq 0$.

解 1) 当 $|r| \neq 1$ 时, 已知几何级数的前 n 项和 S_n 是

$$S_n = \sum_{k=1}^n ar^{k-1} = a + ar + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r},$$

〔1〕 敛散性指收敛或发散的性质

这时, 有

(i) 当 $|r| < 1$ 时, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$, 所以

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r} \right) \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r} \lim_{n \rightarrow \infty} r^n \\&= \frac{a}{1-r}.\end{aligned}$$

因此, 当 $|r| < 1$ 时, 几何级数收敛, 其和是 $\frac{a}{1-r}$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

(ii) 当 $|r| > 1$ 时, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a - ar^n}{1-r} = \infty,$$

因此, 当 $|r| > 1$ 时, 几何级数发散.

2) 当 $|r| = 1$ 时, 也分两种情形讨论:

(i) 若 $r = 1$, 级数的前 n 项和是

$$S_n = a + a + \cdots + a = na,$$

因为 a 为非零常数, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} na = \infty$, 因此, 当 $r = 1$ 时, 几何级数发散.

(ii) 若 $r = -1$, 几何级数变成为

$$a - a + a - a + a - a + \cdots,$$

其前 n 项和是

$$S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} a = \frac{[1 + (-1)^{n-1}]a}{2} = \begin{cases} a, n \text{ 为奇数,} \\ 0, n \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

因此, 当 $r = -1$ 时, 几何级数也发散.

综上所述, 当 $|r| < 1$, 几何级数收敛, 其和是 $\frac{a}{1-r}$;
当 $|r| \geq 1$ 时, 几何级数发散。

例 2 证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

收敛, 并求其和。

证 因为对任何 n , 有

$$\frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right),$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

从而有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

故级数收敛, 且其和是 1。

例 3 证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1} = 1 + 2r + 3r^2 + \cdots + nr^{n-1} + \cdots, \quad |r| < 1$$

收敛, 并求其和。

证 因为

$$S_n = \sum_{k=1}^n kr^{k-1} = 1 + 2r + 3r^2 + \cdots + nr^{n-1}, \quad (3)$$

对 (3) 式两边同乘以 r , 得

$$rS_n = \sum_{k=1}^n kr^k = r + 2r^2 + 3r^3 + \cdots + nr^n \quad (4)$$

由(3)式两边分别减去(4)式两边,得

$$\begin{aligned} S_n - rS_n &= 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} - nr^n \\ &= \frac{1-r^n}{1-r} - nr^n, \end{aligned} \quad (5)$$

由(5)式得

$$S_n = \frac{1-r^n}{(1-r)^2} - \frac{nr^n}{1-r}.$$

又因 $|r| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} nr^n = 0$, 所以有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1-r^n}{(1-r)^2} - \frac{nr^n}{1-r} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-r^n}{(1-r)^2} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nr^n}{1-r} = \frac{1}{(1-r)^2}, \end{aligned}$$

故级数收敛, 且其和是 $\frac{1}{(1-r)^2}$.

二 收敛级数的基本性质

根据收敛级数的定义, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛与它的部分和数列 $\{S_n\}$ 的收敛是等价的, 因而级数理论的任何结果都可以用相应的数列理论来叙述.

下面我们根据收敛数列的运算性质推得收敛级数的运算性质.

定理 1 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 其和是 S , 则对任意常数 c , 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = cu_1 + cu_2 + \cdots + cu_n + \cdots$$

也收敛, 其和是 cS .

证 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ 的前 n 项和分别是 S_n 与 S'_n , 于是

$$S'_n = cu_1 + cu_2 + \cdots + cu_n = c(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = cS_n.$$

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} cS_n = cS$. 即 $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ 收敛, 其和是 cS . **】**

定理1的结果也可写成 $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = c \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 这表明无穷收敛级数对实数乘法具有分配性。

定理2 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是两个收敛级数, 其和分别是 A 与 B , 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = (u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \cdots + (u_n \pm v_n) + \cdots$$

也收敛, 其和是 $A \pm B$.

证 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 的前 n 项和分别是 A_n , B_n 与 C_n , 于是有

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{k=1}^n (u_k \pm v_k) \\ &= (u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \cdots + (u_n \pm v_n) \\ &= (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) \pm (v_1 + v_2 + \cdots + v_n) \\ &= \sum_{k=1}^n u_k \pm \sum_{k=1}^n v_k = A_n \pm B_n. \end{aligned}$$

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B$, 所以, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n \pm B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = A \pm B,$$

即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (v_n \pm u_n)$ 收敛，其和是 $A \pm B$ 。】

同样，由数列收敛的哥西准则可得到级数收敛的哥西准则。

定理 3 （收敛级数的哥西准则）级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是，对任给正数 ε ，存在自然数 N ，当 $m > n \geq N$ 时，有

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_m| < \varepsilon;$$

或对任何 $n \geq N$ 及任意自然数 p ，有

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon.$$

证 因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛是用它的前 n 项和数列 $\{S_n\}$ 收敛来定义的，所以数列 $\{S_n\}$ 收敛的充分必要条件也就是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件，而数列 $\{S_n\}$ 收敛的充分必要条件是，对任给正数 ε ，存在自然数 N ，当 $m > n \geq N$ 时，有

$$|S_m - S_n| < \varepsilon; \quad (6)$$

或当 $n \geq N$ 时，对任意的自然数 p ，有

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon. \quad (7)$$

由于

$$S_m = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + u_{n+1} + \cdots + u_m,$$

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n,$$

从而，有

$$|S_m - S_n| = |u_{n+1} + \cdots + u_m|,$$

所以, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件也可陈述为: 对任给

正数 ε , 存在自然数 N , 当 $m > n \geq N$ 时, 有

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_m| < \varepsilon,$$

或对任给正数 ε , 当 $n \geq N$ 时, 对任意自然数 p , 有

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon.$$

故定理得证. 】

推论 1 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要条件是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

这只要在定理 3 中取 $m = n + 1$, 或 $p = 1$ 即可得证.

推论 2 去掉、增加或改变级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的有限项, 不会改变级数的敛散性.

其实, 定理 3 表明一个级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛或者发散决定于它的任何一个“无穷远片段”的和是否可以变得任意小, 而与其前有限项的值毫无关系.

例 4 利用哥西收敛准则证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

收敛.

证 由 $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, 有

$$\begin{aligned} & |u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \\
&= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} \right) \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

于是, 对任给正数 ε , 只要取 $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$, 当 $n > N$ 时, 对任意自然数 p , 有

$$\begin{aligned}
&|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| \\
&= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} \\
&< \frac{1}{n} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

根据哥西收敛准则, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛.

例 5 利用哥西收敛准则证明调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

发散.

证 因为

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p},$$

于是令 $p=n$, 有

$$\begin{aligned}
&|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| \\
&= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \\
&> \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}
\end{aligned}$$