郑宪祖　王仲春　何　平

赵更吉　　姚　兵

·高等学校自学函授教材·

数学分析

（下册）

陕西科学技术出版社

高等学校自学函授教材

数学分析

（下 册）

郑宪祖 王仲春 何 平
赵更吉 姚 兵 编

陕西科学技术出版社

责任编辑　赵生久

高等学校自学函授教材

数学分析

（下　册）

郑宪祖　王仲春　何　平
赵更吉　姚　兵　　编

陕西科学技术出版社出版

（西安北大街131号）

陕西省新华书店发行　西北师范学院印刷厂印刷

787×1092毫米 32开本 14.625印张 300千字

1986年6月第1版　1986年6月第1次印刷

印数：1—9000

统一书号：7202·127　定价：3.05元

前　言

本书分上、下两册。上册包括：极限理论与一元函数微积分；下册包括：级数理论和多元函数微积分。根据自学为主的特点，本书精选内容，分散难点，贯彻启发式，力争对读者有一定的吸引力；在叙述上，尽力作到深入浅出、通俗易懂、便于自学；在体例上，每章由两部分组成，第一部分为教材正文，第二部分为自学指导与参考资料。

自学指导与参考资料主要内容包括："内容结构分析与要点"，它是本章概括性的总结，利于读者从教材结构上系统地掌握所学内容，了解其重点；"基本内容、原理的补充说明"，供教师教学参考及学有余力的读者进一步钻研教材内容；"典型例题与解题方法"，通过各种类型的例题，总结一些解题方法，除供教学或解题时参考外，可为自学考试提供资料。

本书是甘肃省教育厅委托西北师范学院函授部组织人力编写的，主要供函授大学、夜大学、电大、教师进修学院、中等专业学校及有志自学成材者学习，也可作为全日制大学自学教材或教学参考书。

本书由西北师范学院郑宪祖教授主编，在编写和出版过程中，得到了陕西科学技术出版社的大力支持，在此表示感谢。

由于我们水平有限，缺点错误及疏漏之处难免，希读者批评指正。

编　者

1986．2

目　　录

第九章　数项级数

无穷级数的理论不仅是研究函数的一个重要工具，而且对微积分学的进一步发展及讨论微分方程的解都是十分重要的.

§9.1　数项级数的敛散性

一　级数的收敛与发散概念

把一个数列$\{u_n\}$：

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \cdots,\ u_n,\ \cdots$$

的项依次用加号连接起来，得到的表达式

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots, \qquad (1)$$

简写为

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots,$$

称为无穷数项级数，简称级数，其中u_1，u_2，$\cdots$，u_n，$\cdots$称为级数(1)的项，u_n为通项.

这里要特别注意，级数(1)仅是一个数学表达式，也就是说级数(1)还是一个未定义的新概念.

下面我们借用数列极限给出无限项“和”的定义.具体做法是：作级数(1)的前n项和S_n，即

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n,$$

称S_n为级数（1）的n项部分和，于是由级数（1）的n项部分和S_n，当n趋于无限大时，可构造出另一个无穷数列$\{S_n\}$，即

$$S_1,\ S_2,\ S_3 \cdots,\ S_n,\ \cdots, \qquad (2)$$

现在我们根据这个数列有无极限，可以引进无穷级数（1）的收敛与发散的概念。

定义 如果无穷级数（1）的部分和数列（2）收敛，并设

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

则称级数（1）收敛，其和为S，记作$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = \lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

若部分和数列（2）发散，则称无穷级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$发散。这时级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$没有和。

例 1 讨论几何级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + \cdots + ar^n + \cdots$$

的敛散性[1]。其中r是公比，$a \neq 0$。

解 1）当$|r| \neq 1$时，已知几何级数的前n项和S_n是

$$S_n = \sum_{k=1}^{1} ar^{k-1} = a + ar + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r},$$

---

〔1〕 敛散性指收敛或发散的性质

这时，有

(i) 当$|r|<1$时，因为$\lim\limits_{n\to\infty}r^n=0$，所以

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{1-r}-\frac{a}{1-r}\lim_{n\to\infty}r^n$$

$$=\frac{a}{1-r}.$$

因此，当$|r|<1$时，几何级数收敛，其和是$\frac{a}{1-r}$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=\frac{a}{1-r}$$

(ii) 当$|r|>1$时，因为$\lim\limits_{n\to\infty}r^n=\infty$，所 以

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a-ar^n}{1-r}=\infty,$$

因此，当$|r|>1$时，几何级数发散。

2) 当$|r|=1$时，也分两种情形讨论：

(i) 若$r=1$，级数的前n项和是

$$S_n=a+a+\cdots+a=na,$$

因为a为非零常数，所以$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}na=\infty$，因此，当$r=1$时，几何级数发散。

(ii) 若$r=-1$，几何级数变成为

$$a-a+a-a+a-a+\cdots,$$

其前n项和是

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a=\frac{[1+(-1)^{n-1}]a}{2}=\begin{cases}a, & n\text{为奇数},\\ 0, & n\text{为偶数}.\end{cases}$$

因此，当$r=-1$时，几何级数也发散。

综上所述，当$|r|<1$，几何级数收敛，其和是$\frac{a}{1-r}$；当$|r|\geqslant 1$时，几何级数发散。

例 2 证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

收敛，并求其和。

证 因为对任何n，有

$$\frac{1}{n(n+1)}=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),$$

所以 $S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n(n+1)}$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1},$$

从而有

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

故级数收敛，且其和是 1。

例 3 证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}nr^{n-1}=1+2r+3r^2+\cdots+nr^{n-1}+\cdots,\quad |r|<1$$

收敛，并求其和。

证 因为

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}kr^{k-1}=1+2r+3r^2+\cdots+nr^{n-1},\qquad (3)$$

对(3)式两边同乘以r，得

$$rS_n = \sum_{k=1}^{n} kr^k = r + 2r^2 + 3r^3 + \cdots + nr^n \qquad (4)$$

由(3)式两边分别减去(4)式两边，得

$$S_n - rS_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} - nr^n$$

$$= \frac{1-r^n}{1-r} - nr^n, \qquad (5)$$

由(5)式得

$$S_n = \frac{1-r^n}{(1-r)^2} - \frac{nr^n}{1-r}.$$

又因$|r|<1$时，$\lim\limits_{n\to\infty} nr^n = 0$，所以有

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1-r^n}{(1-r)^2} - \frac{nr^n}{1-r}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1-r^n}{(1-r)^2} - \lim_{n\to\infty}\frac{nr^n}{1-r} = \frac{1}{(1-r)^2},$$

故级数收敛，且其和是$\frac{1}{(1-r)^2}$.

二　收敛级数的基本性质

根据收敛级数的定义，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛与它的部分和数列$\{S_n\}$的收敛是等价的，因而级数理论的任何一个结果都可以用相应的数列理论来叙述。

下面我们根据收敛数列的运算性质推得收敛级数的运算性质。

定理1　若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，其和是$S$，则对任意常数$c$，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = cu_1 + cu_2 + \cdots + cu_n + \cdots$$

也收敛，其和是cS。

证 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与 $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$的前n项和分别是S_n与S'_n，于是

$$S'_n = cu_1 + cu_2 + \cdots + cu_n = c(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = cS_n.$$

因为 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$，所以$\lim_{n\to\infty} S_n' = \lim_{n\to\infty} cS_n = cS$。即 $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ 收敛，其和是cS。 ▌

定理 1 的结果也可写成 $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = c \sum_{n=1}^{\infty} u_n$，这表明无穷收敛级数对实数乘法具有分配性。

定理 2 设级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$是两个收敛级数，其和分别是A与B，则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = (u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \cdots + (u_n \pm v_n) + \cdots$$

也收敛，其和是$A \pm B$。

证 设级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$的前$n$项和分别是$A_n$，$B_n$与$C_n$，于是有

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{k=1}^{n} (u_k \pm v_k) \\ &= (u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \cdots + (u_n \pm v_n) \\ &= (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) \pm (v_1 + v_2 + \cdots + v_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} u_k \pm \sum_{k=1}^{n} v_k = A_n \pm B_n. \end{aligned}$$

因为 $\lim_{n\to\infty} A_n = A$，$\lim_{n\to\infty} B_n = B$，所以，有

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty}(A_n \pm B_n) = \lim_{n\to\infty} A_n \pm \lim_{n\to\infty} B_n = A \pm B,$$

即级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(v_n \pm v_n)$ 收敛，其和是 $A \pm B$。 ▌

同样，由数列收敛的哥西准则可得到级数收敛的哥西准则。

定理 3 （收敛级数的哥西准则）级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是，对任给正数 ε，存在自然数 N，当 $m > n \geqslant N$ 时，有

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_m| < \varepsilon;$$

或对任何 $n \geqslant N$ 及任意自然数 p，有

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon.$$

证 因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛是用它的前 n 项和数列 $\{S_n\}$ 收敛来定义的，所以数列 $\{S_n\}$ 收敛的充分必要条件也就是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件，而数列 $\{S_n\}$ 收敛的充分必要条件是，对任给正数 ε，存在自然数 N，当 $m > n \geqslant N$ 时，有

$$|S_m - S_n| < \varepsilon; \tag{6}$$

或当 $n \geqslant N$ 时，对任意的自然数 p，有

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon. \tag{7}$$

由于

$$S_m = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + u_{n+1} + \cdots + u_m,$$
$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n,$$

从而，有

$$|S_m - S_n| = |u_{n+1} + \cdots + u_m|,$$

所以，级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的充分必要条件也可陈述为：对任给正数ε，存在自然数N，当$m>n\geqslant N$时，有

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_m|<\varepsilon,$$

或对任给正数ε，当$n\geqslant N$时，对任意自然数p，有

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon.$$

故定理得证。 ▌

推论 1 级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的必要条件是

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0.$$

这只要在定理 3 中取$m=n+1$，或$p=1$即可得证。

推论 2 去掉、增加或改变级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的有限项，不会改变级数的敛散性。

其实，定理 3 表明一个级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛或者发散决定于它的任何一个“无穷远片段”的和是否可以变得任意小，而与其前有限项的值毫无关系。

例 4 利用哥西收敛准则证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

收敛。

证 由 $\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，有

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|$$

$$=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}$$

$$<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}$$

$$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}.$$

于是，对任给正数ε，只要取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当$n>N$时，对任意自然数$p$，有

$$\begin{aligned}&|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|\\&=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}\\&<\frac{1}{n}<\varepsilon.\end{aligned}$$

根据哥西收敛准则，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛。

例 5 利用哥西收敛准则证明调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

发散。

证 因为

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p},$$

于是令$p=n$，有

$$\begin{aligned}&|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|\\&=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\\&>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}\end{aligned}$$