普通高等教育管理工程类规划教材

修订版

运筹学

习题集

胡运权 主编

YUN CHOU XUE XI TI JI

清华大学出版社

普通高等教育管理工程类规划教材

运筹学习题集

（修订版）

胡运权　主编

清华大学出版社

(京)新登字 158 号

内 容 简 介

本书是国家教委管理工程类教学指导委员会统一组织编写的高等学校试用教材，也是清华大学出版社已出版的《运筹学》的配套书籍。

在第一版的基础上，本书除进一步扩大习题的数量、类型外，在每章前分别增加了复习思考题和测试对基本概念理解掌握程度的是非判断题，以便帮助读者消化教材内容。

本书共含线性规划、目标规划、整数规划、非线性规划、动态规划、图与网络分析、排队论、存贮论、对策论、决策和多目标决策共 16 章的习题计七百余题，分别给出答案，证明或题解。本书可作为高等学校各专业的教材，也可作为各类经济管理干部学院和广大工程技术人员的自学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

运筹学习题集/胡运权编. 一修订版. 一北京：清华大学出版社，1994
ISBN 7-302-01717-4

Ⅰ. 运…　Ⅱ. 胡…　Ⅲ. 运筹学-习题　Ⅳ. 022-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(94)第 15103 号

出版者：清华大学出版社（北京清华大学校内，邮编 100084）
责任编辑：魏荣桥
印刷者：科学院印刷厂
发行者：新华书店总店北京科技发行所
开　本：787×1092 1/16　印张：16.75　字数：392 千字
版　次：1995 年 5 月第 2 版　1995 年 5 月第 1 次印刷
书　号：ISBN 7-302-01717-4/F・103
印　数：0001—5000
定　价：9.80 元

修订版前言

本习题集是根据国家教委管理工程类专业教学指导委员会制订的教材规划组织编写的。鉴于清华大学出版社出版的《运筹学》于 1987 年被确定为高等学校试用教材，并于 1990 年出版了修订本，因此本习题集按该教材修订版的内容体系编写，并作为其配套书籍。

习题是消化领会教材的一个重要环节，也是学习掌握运筹学理论和方法的必不可少的手段。同第一版比较，这次修订时侧重扩大题量，增加题型，其中汇集了不少经教学试用效果良好的较具综合性和启发性的习题；此外在每章开头都加了一部分复习思考题，以帮助读者回顾全章内容要点，测试对该章主要概念的理解程度。为方便读者自学，书中仍对每道习题分别给出答案、证明或题解，答案中习题的编号同前面各章练习题编号完全相同，并一一对应。

本书各章的编写分工如下：胡运权（哈尔滨工业大学）编第一、二、三、五、十、十二、十三、十四章，钱国明（哈尔滨工业大学）编第四章，郭耀煌（西南交通大学）、胡运权编第六、七章，甘应爱（华中理工大学）编第八、九章，李英华（吉林工学院）编第十一章，胡祥培（哈尔滨工业大学）、胡运权编第十五章，钱国明、胡运权编第十六章。全书由胡运权主编，天津大学李维铮主审。

本书编写过程中得到了国家教委管理工程类专业教学指导委员会管理信息教学指导组和《运筹学》教材很多编者的关心指导，西南交通大学赵冬梅、肖建两位老师提供了部分资料，谨在此表示感谢！

由于编者水平有限，书中有不妥和错误之处，恳请广大读者批评指正。

作 者

1994 年 2 月

目　录

习　题　答　案

第一章　线性规划及单纯形法

复习思考题

1. 试述线性规划数学模型的结构及各要素的特征。

2. 求解线性规划问题时可能出现哪几种结果，哪些结果反映建模时有错误。

3. 什么是线性规划问题的标准型式，如何将一个非标准型的线性规划问题转化为标准型式。

4. 试述线性规划问题的可行解、基解、基可行解、最优解的概念以及上述解之间的相互关系。

5. 试述单纯形法的计算步骤，如何在单纯形表上去判别问题是具有唯一最优解、无穷多最优解、无界解或无可行解。

6. 如果线性规划的标准型式变换为求目标函数的极小化 $\min z$，则用单纯形法计算时如何判别问题已得到最优解。

7. 在确定初始可行基时，什么情况下要在约束条件中增添人工变量，在目标函数中人工变量前的系数为$(-M)$的经济意义是什么。

8. 什么是单纯形法计算的两阶段法，为什么要将计算分两个阶段进行，以及如何根据第一阶段的计算结果来判定第二阶段的计算是否需继续进行。

9. 简述退化的含义及处理退化的勃兰特规则。

10. 举例说明生产和生活中应用线性规划的方面，并对如何应用进行必要描述。

11. 判断下列说法是否正确

(a) 图解法同单纯形法虽然求解的形式不同，但从几何上理解，两者是一致的；

(b) 线性规划模型中增加一个约束条件，可行域的范围一般将缩小，减少一个约束条件，可行域的范围一般将扩大；

(c) 线性规划问题的每一个基解对应可行域的一个顶点；

(d) 如线性规划问题存在最优解，则最优解一定对应可行域边界上的一个点；

(e) 对取值无约束的变量 x_j，通常令 $x_j=x_j'-x_j''$，其中 $x_j'\geqslant 0, x_j''\geqslant 0$，在用单纯形法求得的最优解中有可能同时出现 $x_j'>0, x_j''>0$。

(f) 用单纯形法求解标准型式的线性规划问题时，与 $\sigma_j>0$ 对应的变量都可以被选作换入变量；

(g) 单纯形法计算中，如不按最小比值原则选取换出变量，则在下一个解中至少有一个基变量的值为负；

(h) 单纯形法计算中，选取最大正检验数 σ_k 对应的变量 x_k 作为换入变量，将使目标函数值得到最快的增长；

(i) 一旦一个人工变量在迭代中变为非基变量后，该变量及相应列的数字可以从单纯形表中删除，而不影响计算结果；

(j) 线性规划问题的任一可行解都可以用全部基可行解的线性组合表示；

(k) 若 X^1、X^2 分别是某一线性规划问题的最优解，则 $X=\lambda_1X^1+\lambda_2X^2$ 也是该线性规划问题的最优解，其中 λ_1、λ_2 为正的实数；

(l) 本章例 9 用两阶段法计算的例子中，第一阶段的目标函数也可以写成 $\min\ w=k_1x_6+k_2x_7$，其中 k_1,k_2 均为大于零的常数；

(m) 对一个有 n 个变量、m 个约束的标准型的线性规划问题，其可行域的顶点恰好为 C_n^m 个；

(n) 单纯形法的迭代计算过程是从一个可行解转换到目标函数值更大的另一个可行解。

练习题

1.1 试述线性规划问题数学模型的组成部分及特征，判别下列数学模型是否为线性规划模型。(模型中 a,b,c 为常数；θ 为可取某一常数值的参变量；x,y 为变量)

(a) $\max\ z=3x_1+5x_2+7x_3$

$$\begin{cases} x_1+2x_2-6x_3\geqslant 8 \\ 5x_1+x_2+8x_3\leqslant 20 \\ 3x_1+4x_2=12 \\ x_1,\ x_3\geqslant 0 \end{cases}$$

(b) $\min\ z=\prod_{j=1}^{n}c_jx_j$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant b_i & (i=1,\cdots,m) \\ x_j\geqslant 0 & (j=1,\cdots,n) \end{cases}$$

(c) $\min\ z=\sum_{i=1}^{m}a_i^2x_i+\sum_{j=1}^{n}b_j^2y_j$

$$x_i+y_j\leqslant c_{ij}^2 \quad (i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n)$$

(d) $\max\ z(\theta)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant b_i+a_i\theta & (i=1,\cdots,m) \\ x_j\geqslant 0 & (j=1,\cdots,n) \end{cases}$$

1.2 用图解法求解下列线性规划问题，并指出各问题是具有唯一最优解、无穷多最优解、无界解或无可行解。

(a) $\min\ z=6x_1+4x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geqslant 1 \\ 3x_1 + 4x_2 \geqslant 1.5 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

(*b*) $\max z = 4x_1 + 8x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leqslant 10 \\ -x_1 + x_2 \geqslant 8 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

(*c*) $\max z = x_1 + x_2$

$$\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 \geqslant 24 \\ 4x_1 + 6x_2 \geqslant -12 \\ 2x_2 \geqslant 4 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

(*d*) $\max z = 3x_1 - 2x_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 1 \\ 2x_1 + 2x_2 \geqslant 4 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

(*e*) $\max z = 3x_1 + 9x_2$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leqslant 22 \\ -x_1 + x_2 \leqslant 4 \\ x_2 \leqslant 6 \\ 2x_1 - 5x_2 \leqslant 0 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

(*f*) $\max z = 3x_1 + 4x_2$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 12 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 16 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

1.3 某炼油厂根据计划每季度需供应合同单位汽油 15 万吨、煤油 12 万吨、重油 12 万吨。该厂从 A,B 两处运回原油提炼,已知两处原油成分如表 1-1 所示。又如从 A 处采购原油每吨价格(包括运费、下同)为 200 元,B 处原油每吨为 310 元,(*a*) 选择该炼油厂采购原油的最优决策;(*b*) 如 A 处价格不变,B 处降为 290 元/吨,则最优决策有何改变?

表 1-1

	A	B
含 汽 油	15%	50%
含 煤 油	20%	30%
含 重 油	50%	15%
其 它	15%	5%

1.4 将下列线性规划问题变换成标准型，并列出初始单纯形表

(a) $\min z=2x_1-x_2+2x_3$

$$\begin{cases}-x_1+x_2+x_3=4\\-x_1+x_2-x_3\leqslant 6\\x_1\leqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\quad x_3\text{ 无约束}\end{cases}$$

(b) $\max z=2x_1+x_2+3x_3+x_4$

$$\begin{cases}x_1+\ \ x_2+\ \ x_3+\ \ x_4\leqslant 7\\2x_1-3x_2+5x_3\qquad\quad=-8\\x_1\qquad\ -2x_3+2x_4\geqslant 1\\x_1,\ x_3\geqslant 0,x_2\leqslant 0,\quad x_4\text{ 无约束}\end{cases}$$

1.5 列出下述线性规划问题的初始单纯形表

(a) $\max z=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{m}a_{ik}x_{ik}/p_k$

$$\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{m}x_{ik}\leqslant b_i\quad(i=1,\cdots,n)\\\sum\limits_{i=1}^{n}c_{ik}x_{ik}=d_k\quad(k=1,\cdots,m)\\x_{ik}\geqslant 0\quad(i=1,\cdots,n;\ k=1,\cdots,m)\end{cases}$$

(b) $\min z=\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}\leqslant a_i\quad(i=1,\cdots,m)\\\sum\limits_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j\quad(j=1,\cdots,n)\\x_{ij}\geqslant 0\quad(i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n)\end{cases}$$

(c) $\max z=\sum\limits_{j=1}^{N}\sum\limits_{k=1}^{n_j}(C_jX_{jk})\rho_{jk}$

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{N}\sum\limits_{k=1}^{n_j}(A_jX_{jk})\rho_{jk}+X_s=b_0\\\sum\limits_{k=1}^{n_j}\rho_{jk}=1\quad(j=1,\cdots,N)\\\rho_{jk}\geqslant 0\quad(j=1,\cdots,N;\ k=1,\cdots,n_j)\end{cases}$$

1.6 判断下列集合是否为凸集

(a) $X=\{[x_1,x_2]\,|\,x_1x_2\geqslant 30,x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0\}$

(b) $X=\{[x_1,x_2]\,|\,x_2-3\leqslant x_1^2,x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0\}$

(c) $X=\{[x_1,x_2]\,|\,x_1^2+x_2^2\leqslant 1\}$

1.7 在下列线性规划问题中，找出所有基本解。指出哪些是基本可行解并分别代入目标函数，比较找出最优解。

(a) $\max z=3x_1+5x_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 4 \\ 2x_2 + x_4 = 12 \\ 3x_1+2x_2 + x_5 = 18 \\ x_j \geqslant 0\ (j=1,\cdots,5) \end{cases}$$

(b) $\min z=4x_1+12x_2+18x_3$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_2+2x_3 - x_5 = 5 \\ x_j \geqslant 0 \quad (j=1,\cdots,5) \end{cases}$$

1.8 已知线性规划问题

$\max z=x_1+3x_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 5 \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ x_1+2x_2 + x_4 = 10 \cdots\cdots\cdots\cdots ② \\ x_2 + x_5 = 4 \cdots\cdots\cdots\cdots ③ \\ x_1, \cdots, x_5 \geqslant 0 \cdots\cdots\cdots\cdots ④ \end{cases}$$

表 1-2 中所列的解(a)－(f)均满足约束条件①②③，试指出表中哪些解是可行解，哪些是基本解，哪些是基本可行解。

表 1-2

序号	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
(a)	2	4	3	0	0
(b)	10	0	−5	0	4
(c)	3	0	2	7	4
(d)	1	4.5	4	0	−0.5
(e)	0	2	5	6	2
(f)	0	4	5	2	0

1.9 分别用图解法和单纯形法求解下列线性规划问题，并对照指出单纯形法迭代的每一步相当于图解法可行域中的哪一个顶点。

(a) $\max z=10x_1+5x_2$

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2 \leqslant 9 \\ 5x_1+2x_2 \leqslant 8 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

(b) $\max z=100x_1+200x_2$

$$\begin{cases} x_1+x_2 \leqslant 500 \\ x_1 \leqslant 200 \\ 2x_1+6x_2 \leqslant 1200 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

1.10 已知某线性规划问题的约束条件为

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 25 \\ x_1 + 3x_2 - x_4 = 30 \\ 4x_1 + 7x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5 = 85 \\ x_j \geqslant 0 \ (j = 1, \cdots, 5) \end{cases}$$

判断下列各点是否为该线性规划问题可行域的凸集的顶点：

(a) $X=(5,15,0,20,0)$

(b) $X=(9,7,0,0,8)$

(c) $X=(15,5,10,0,0)$

1.11 已知下述线性规划问题具有无穷多最优解，试写出其最优解的一般表达式

$$\max z = 10x_1 + 5x_2 + 5x_3$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 9x_3 \leqslant 9 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 8 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

1.12 线性规划问题

$$\min z = CX$$

$$\begin{cases} AX = b \\ X \geqslant 0 \end{cases}$$

其可行域为 R，目标函数最优值为 z^*，若分别发生下列情形之一时，其新的可行域为 R'，新的目标函数最优值为 $(z^*)'$，试分别回答(a)(b)(c)三种情况下 R 与 R' 及 z^* 与 $(z^*)'$ 之间的关系：

(a) 增添一个新的约束条件；

(b) 减少一个原有的约束条件；

(c) 目标函数变为 $\min z = \dfrac{CX}{\lambda}$，同时约束条件变为 $AX = \lambda b$, $X \geqslant 0$ $(\lambda > 1)$

1.13 在单纯形法迭代中，任何从基变量中替换出来的变量在紧接着的下一次迭代中会不会立即再进入基变量，为什么？

1.14 会不会发生在一次迭代中刚进入基变量的变量在紧接着的下一次迭代中立即被替换出来？什么情况下有这种可能，试举例说明。

1.15 已知线性规划问题

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2$$

$$\begin{cases} 5x_2 \leqslant 15 \\ 6x_1 + 2x_2 \leqslant 24 \\ x_1 + x_2 \leqslant 5 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

用图解法求解时，得其可行域顶点分别为 0，Q_1, Q_2, Q_3, Q_4（见图 1-1）。试问 c_1，c_2 如何变化时，目标函数值在上述各顶点实现最优。

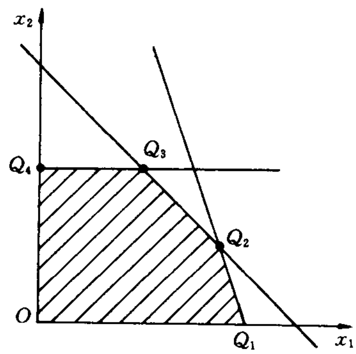

图 1-1

1.16 求解线性规划问题当某一变量 x_j 的取值无约束时，通常用 $x_j=x_j'-x_j''$ 来替换，其中 $x_j'\geqslant 0, x_j''\geqslant 0$。试说明 x_j'、x_j'' 能否在基变量中同时出现，为什么。

1.17 下述线性规划问题中，分别求目标函数值 z 的上界 $\overline{z^*}$ 和下界 $\underline{z^*}$

(a) $\max z=c_1x_1+c_2x_2$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2\leqslant b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2\leqslant b_2 \\ x_1,\ x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

式中：$1\leqslant c_1\leqslant 3$，$4\leqslant c_2\leqslant 6$；$8\leqslant b_1\leqslant 12$，$10\leqslant b_2\leqslant 14$；

$-1\leqslant a_{11}\leqslant 3$，$2\leqslant a_{12}\leqslant 5$；$2\leqslant a_{21}\leqslant 4$，$4\leqslant a_{22}\leqslant 6$

(b) $\max z=c_1x_1-c_2x_2$

$$\begin{cases} -a_{11}x_1+a_{12}x_2\leqslant b_1 \\ a_{21}x_1-a_{22}x_2\leqslant b_2 \\ x_1,x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

式中：$2\leqslant c_1\leqslant 3$，$4\leqslant c_2\leqslant 6$；$8\leqslant b_1\leqslant 12$，$10\leqslant b_2\leqslant 15$；

$-1\leqslant a_{11}\leqslant 1$，$2\leqslant a_{12}\leqslant 4$；$2\leqslant a_{21}\leqslant 5$，$4\leqslant a_{22}\leqslant 6$

1.18 用单纯形法求解下列线性规划问题，并指出问题的解属于哪一类：

(a) $\max z=3x_1+5x_2$

$$\begin{cases} x_1\leqslant 4 \\ 2x_2\leqslant 12 \\ 3x_1+2x_2\leqslant 18 \\ x_1,\ x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

(b) $\max z=2x_1-x_2+x_3$

$$\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3\leqslant 60 \\ x_1-x_2+2x_3\leqslant 10 \\ x_1+x_2-x_3\leqslant 20 \\ x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0 \end{cases}$$

(c) $\max z=6x_1+2x_2+10x_3+8x_4$

$$\begin{cases} 5x_1+6x_2-4x_3-4x_4\leqslant 20 \\ 3x_1-3x_2+2x_3+8x_4\leqslant 25 \\ 4x_1-2x_2+x_3+3x_4\leqslant 10 \\ x_{1-4}\geqslant 0 \end{cases}$$

(d) $\max z=x_1+6x_2+4x_3$

$$\begin{cases} -x_1+2x_2+2x_3\leqslant 13 \\ 4x_1-4x_2+x_3\leqslant 20 \\ x_1+2x_2+x_3\leqslant 17 \\ x_1\geqslant 1,\ x_2\geqslant 2,\ x_3\geqslant 3 \end{cases}$$

(e) $\max z=2x_1+3x_2+5x_3$

$$\begin{cases}2x_1+2x_2+3x_3\leqslant 12\\ x_1+2x_2+2x_3\leqslant 8\\ 4x_1\qquad+6x_3\leqslant 16\\ \qquad 4x_2+3x_3\leqslant 12\\ x_1,x_2,x_3\geqslant 0\end{cases}$$

(*f*) $\max z=90x_1+160x_2+40x_3+100x_4$

$$\begin{cases}2x_1+8x_2+4x_3+2x_4\leqslant 480\\ 5x_1+4x_2+8x_3+5x_4\leqslant 800\\ 7x_1+8x_2+3x_3+5x_4\leqslant 900\\ x_1,x_2,x_3,x_4\geqslant 0\end{cases}$$

1.19 分别用大 M 法和两阶段法求解下列线性规划问题,并指出问题的解属于哪一类:

(*a*) $\max z=4x_1+5x_2+x_3$

$$\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3\geqslant 18\\ 2x_1+x_2\qquad\leqslant 4\\ x_1+x_2-x_3=5\\ x_j\geqslant 0\ (j=1,2,3)\end{cases}$$

(*b*) $\max z=2x_1+x_2+x_3$

$$\begin{cases}4x_1+2x_2+2x_3\geqslant 4\\ 2x_1+4x_2\qquad\leqslant 20\\ 4x_1+8x_2+2x_3\leqslant 16\\ x_j\geqslant 0\ (j=1,2,3)\end{cases}$$

(*c*) $\max z=x_1+x_2$

$$\begin{cases}8x_1+6x_2\geqslant 24\\ 4x_1+6x_2\geqslant -12\\ 2x_2\geqslant 4\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

(*d*) $\max z=x_1+2x_2+3x_3-x_4$

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3\qquad=15\\ 2x_1+x_2+5x_3\qquad=20\\ x_1+2x_2+x_3+x_4=10\\ x_j\geqslant 0\ (j=1,\cdots,4)\end{cases}$$

(*e*) $\max z=4x_1+6x_2$

$$\begin{cases}2x_1+4x_2\leqslant 180\\ 3x_1+2x_2\leqslant 150\\ x_1+x_2=57\\ x_2\geqslant 22\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

(*f*) $\max z=5x_1+3x_2+6x_3$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3\leqslant 18 \\ 2x_1+x_2+3x_3\leqslant 16 \\ x_1+x_2+x_3=10 \\ x_1,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\ \text{无约束} \end{cases}$$

1.20 下表(表 1-3)为用单纯形法计算时某一步的表格。已知该线性规划的目标函数为$\max z=5x_1+3x_2$，约束形式为$\leqslant$，x_3，x_4为松弛变量，表中解代入目标函数后得$z=10$

表 1-3

		x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	2	c	0	1	1/5
x_1	a	d	e	0	1
c_j-z_j		b	-1	f	g

(*a*) 求$a-g$的值；

(*b*) 表中给出的解是否为最优解。

1.21 表1-4 中给出某线性规划问题计算过程中的一个单纯形表，目标函数为$\max z=28x_4+x_5+2x_6$，约束条件为$\leqslant$，表中x_1，x_2，x_3为松弛变量，表中解的目标函数值为$z=14$。

表 1-4

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_6	a	3	0	$-14/3$	0	1	1
x_2	5	6	d	2	0	5/2	0
x_4	0	0	e	f	1	0	0
c_j-z_j		b	c	0	0	-1	g

(*a*) 求$a-g$的值；

(*b*) 表中给出的解是否为最优解。

1.22 表1-5 为某求极大值线性规划问题的初始单纯形表及迭代后的表，x_4，x_5为松弛变量，试求表中$a-l$的值及各变量下标$m-t$的值。

表 1-5

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_m	6	b	c	d	1	0
x_n	1	-1	3	e	0	1
c_j-z_j		a	1	-2	0	0
x_s	f	g	2	-1	1/2	0
x_t	4	h	i	1	1/2	1
c_j-z_j		0	7	j	k	l

1.23 求下述线性规划问题的解

$$\max z=c_1x_1+\cdots+c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_1x_1+\cdots+a_nx_n\leqslant b \\ 0\leqslant x_j\leqslant u_j \quad (j=1,\cdots,n) \end{cases}$$

假定模型中所有常数 c_j, a_j, $u_j(j=1,\cdots,n)$ 均为正,且有

$$\frac{c_1}{a_1}\geqslant\frac{c_2}{a_2}\geqslant\cdots\geqslant\frac{c_n}{a_n}$$

1.24 线性规划问题 $\max z=CX$, $AX=b$, $X\geqslant 0$,如 X^* 是该问题的最优解,又 $\lambda>0$ 为某一常数,分别讨论下列情况时最优解的变化。

(a) 目标函数变为 $\max z=\lambda CX$;

(b) 目标函数变为 $\max z=(C+\lambda)X$;

(c) 目标函数变为 $\max z=\frac{C}{\lambda}X$,约束条件变为 $AX=\lambda b$。

1.25 试将下述问题改写成线性规划问题

$$\max_{x_i}\left\{\min\left(\sum_{i=1}^{m}a_{i1}x_i,\ \sum_{i=1}^{m}a_{i2}x_i,\cdots,\ \sum_{i=1}^{m}a_{in}x_i\right)\right\}$$

$$\text{约束于}\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_m=1 \\ x_i\geqslant 0,\ i=1,\cdots,m \end{cases}$$

1.26 讨论如何用单纯形法求解下述线性规划问题

$$\max z=\sum_{j=1}^{n}c_j|x_j|$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i \quad (i=1,\cdots,m) \\ x_j\ \text{取值无约束} \end{cases}$$

1.27 线性回归是一种常用的数理统计方法,这个方法要求对图上的一系列点 $(x_1, y_1)(x_2,y_2)\cdots(x_n, y_n)$ 选配一条合适的直线拟合。方法通常是先定直线方程为 $y=a+bx$,然后按某种准则求定 a, b。通常这个准则为最小二乘法,但也可用其它准则。试根据以下准则建立这个问题的线性规划模型:

$$\min\sum_{i=1}^{n}|y_i-(a+bx_i)|$$

1.28 表 1-6 中给出某求极大化问题的单纯形表,问表中 a_1,a_2, c_1, c_2, d 为何值时以及表中变量属哪一种类型时有:

(a) 表中解为唯一最优解;

(b) 表中解为无穷多最优解之一;

(c) 表中解为退化的可行解;

(d) 下一步迭代将以 x_1 替换基变量 x_5;

(e) 该线性规划问题具有无界解;

(f) 该线性规划问题无可行解。

表 1-6

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	d	4	a_1	1	0	0
x_4	2	-1	-5	0	1	0
x_5	3	a_2	-3	0	0	1
c_j-z_j		c_1	c_2	0	0	0

1.29 试利用两阶段法第一阶段的求解，找出下述方程组的一个可行解，并利用计算得到的最终单纯形表说明该方程组有多余方程。

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=2 \\ -x_1+3x_2+x_3=1 \\ 2x_1-3x_2+4x_3=7 \\ x_1,x_2,x_3\geqslant 0 \end{cases}$$

1.30 考虑线性规划问题

$$\max z=\alpha x_1+2x_2+x_3-4x_4$$

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_4=4+2\beta & (1) \\ 2x_1-x_2+3x_3-2x_4=5+7\beta & (2) \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\geqslant 0 \end{cases}$$

模型中 α,β 为参数，要求：

(a) 组成两个新的约束(1)′=(1)+(2)，(2)′=(2)−2(1)，根据(1)′，(2)′以 x_1，x_2 为基变量列出初始单纯形表：

(b) 假定 $\beta=0$，则 α 为何值时，x_1，x_2 为问题的最优基；

(c) 假定 $\alpha=3$，则 β 为何值时，x_1，x_2 为问题的最优基。

1.31 线性规划问题 $\max z=CX$，$AX=b$，$X\geqslant 0$，设 X° 为问题的最优解，若目标函数中用 C^* 代替 C 后，问题的最优解变为 X^*，求证

$$(C^*-C)(X^*-X^{\circ})\geqslant 0$$

1.32 用单纯形法求下列矩阵之逆矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1.33 线性规划问题 $\max z=CX$，$AX=b$，$X\geqslant 0$，如 A 是一个分块矩阵

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_K \end{bmatrix}$$

如何将此线性规划问题化成求解若干个等价的小的线性规划问题 。

1.34 某饲养场饲养动物出售，设每头动物每天至少需 700 克蛋白质、30 克矿物质、

100 毫克维生素。现有五种饲料可供选用，各种饲料每公斤营养成分含量及单价如表 1-7 所示：

表 1-7

饲　　料	蛋白质(克)	矿物质(克)	维生素(毫克)	价格(元/千克)
1	3	1	0.5	0.2
2	2	0.5	1.0	0.7
3	1	0.2	0.2	0.4
4	6	2	2	0.3
5	18	0.5	0.8	0.8

要求确定既满足动物生长的营养需要，又使费用最省的选用饲料的方案。(建立这个问题的线性规划模型，不求解)

1.35 一贸易公司专门经营某种杂粮的批发业务。公司现有库容 5000 担的仓库。一月一日，公司拥有库存 1000 担杂粮，并有资金 20000 元。估计第一季度杂粮价格如表 1-8 所示。

表 1-8

	进　货　价　(元)	出　货　价　(元)
一　　月	2.85	3.10
二　　月	3.05	3.25
三　　月	2.90	2.95

如买进的杂粮当月到货，但需到下月才能卖出，且规定“货到付款”。公司希望本季末库存为 2000 担，问应采取什么样的买进与卖出的策略使三个月总的获利最大?(列出问题的线性规划模型，不求解)

1.36 某农场有 100 公顷土地及 15000 元资金可用于发展生产。农场劳动力情况为秋冬季 3500 人日，春夏季 4000 人日，如劳动力本身用不了时可外出干活，春夏季收入为 2.1 元/人日，秋冬季收入为 1.8 元/人日。该农场种植三种作物：大豆、玉米、小麦，并饲养奶牛和鸡。种作物时不需要专门投资，而饲养动物时每头奶牛投资 400 元，每只鸡投资 3 元。养奶牛时每头需拨出 1.5 公顷土地种饲草，并占用人工秋冬季为 100 人日，春夏季为 50 人日，年净收入 400 元/每头奶牛。养鸡时不占土地，需人工为每只鸡秋冬季需 0.6 人日，春夏季为 0.3 人日，年净收入为 2 元/每只鸡。农场现有鸡舍允许最多养 3000 只鸡，牛栏允许最多养 32 头奶牛。三种作物每年需要的人工及收入情况如表 1-9 所示。

表 1-9

	大　　豆	玉　　米	麦　　子
秋冬季需人日数	20	35	10
春夏季需人日数	50	75	40
年净收入(元/公顷)	175	300	120