

高等学校教材

# 微积分学

修订版 下册

华中科技大学数学系 编



高等教育出版社

17

高等学校教材

# 微积分学

修订版（下册）

华中科技大学数学系 编



高等教育出版社

HIGHER EDUCATION PRESS

### 图书在版编目(CIP)数据

微积分学(修订版)(下册)/华中科技大学数学系编. - 北京:高等教育出版社;2002.7

理工科本科生用书

ISBN 7-04-010822-4

I. 微… II. 华… III. 高等学校-教材 IV. 0172

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第038215号

责任编辑:徐可 封面设计:王凌波

版式设计:杨明 责任印制:陈伟光

微积分(修订版)(下册)

华中科技大学数学系 编

---

|      |               |      |   |
|------|---------------|------|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社       | 购书热线 | 010-64054588  |
| 社 址  | 北京市东城区沙滩后街55号 | 免费咨询 | 800-810-0598  |
| 邮政编码 | 100009        | 网 址  | <a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a> |
| 传 真  | 010-64014048  |      | <a href="http://www.hep.com.cn">http://www.hep.com.cn</a> |

经 销 新华书店北京发行所

印 刷 北京民族印刷厂

|     |               |     |              |
|-----|---------------|-----|--------------|
| 开 本 | 880×1230 1/32 | 版 次 | 2002年7月第1版   |
| 印 张 | 8.875         | 印 次 | 2002年7月第1次印刷 |
| 字 数 | 260 000       | 定 价 | 15.00元       |

---

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

**版权所有 侵权必究**

# 目 录

|                              |      |
|------------------------------|------|
| <b>第八章 向量代数与空间解析几何</b> ..... | (1)  |
| § 8.1 空间直角坐标系 .....          | (1)  |
| § 8.2 向量及其线性运算 .....         | (4)  |
| 8.2.1 向量概念 .....             | (4)  |
| 8.2.2 向量的线性运算 .....          | (4)  |
| 8.2.3 向量的坐标 .....            | (7)  |
| § 8.3 向量间的积 .....            | (10) |
| 8.3.1 数量积 .....              | (10) |
| 8.3.2 向量积 .....              | (12) |
| 8.3.3 混合积 .....              | (14) |
| *8.3.4 三重矢量积 .....           | (15) |
| § 8.4 平面与直线 .....            | (17) |
| 8.4.1 平面方程 .....             | (17) |
| 8.4.2 直线方程 .....             | (19) |
| 8.4.3 关于平面与直线的基本问题 .....     | (21) |
| § 8.5 曲面与曲线 .....            | (31) |
| 8.5.1 曲面 .....               | (31) |
| 8.5.2 空间曲线 .....             | (33) |
| 8.5.3 二次曲面 .....             | (36) |
| <b>第九章 多元函数微分学</b> .....     | (42) |
| § 9.1 多元函数 .....             | (42) |
| 9.1.1 区域 .....               | (42) |
| 9.1.2 多元函数的概念 .....          | (45) |

|                      |       |
|----------------------|-------|
| 9.1.3 极限与连续性         | (47)  |
| § 9.2 偏导数            | (51)  |
| 9.2.1 偏导数的定义与计算      | (51)  |
| 9.2.2 复合函数微分法        | (54)  |
| 9.2.3 隐函数微分法         | (58)  |
| 9.2.4 高阶偏导数          | (61)  |
| § 9.3 全微分与 Taylor 公式 | (66)  |
| 9.3.1 全微分            | (66)  |
| 9.3.2 Taylor 公式      | (71)  |
| § 9.4 方向导数与梯度        | (75)  |
| 9.4.1 方向导数           | (75)  |
| 9.4.2 梯度             | (77)  |
| § 9.5 极值             | (79)  |
| 9.5.1 自由极值           | (79)  |
| 9.5.2 条件极值           | (83)  |
| 9.5.3 应用问题           | (87)  |
| § 9.6 微分学的几何应用       | (91)  |
| 9.6.1 曲线的切线与法平面      | (91)  |
| 9.6.2 曲面的切平面与法线      | (93)  |
| <b>第十章 重积分</b>       | (99)  |
| § 10.1 二重积分的定义与性质    | (99)  |
| 10.1.1 体积问题与质量问题     | (99)  |
| 10.1.2 二重积分的定义       | (100) |
| 10.1.3 二重积分的性质       | (102) |
| § 10.2 二重积分的计算       | (103) |
| 10.2.1 化为逐次积分        | (104) |
| 10.2.2 极坐标代换         | (108) |
| * 10.2.3 一般变量代换      | (114) |
| § 10.3 三重积分          | (121) |

---

|             |                     |              |
|-------------|---------------------|--------------|
| 10.3.1      | 三重积分的定义             | (121)        |
| 10.3.2      | 化为逐次积分              | (122)        |
| 10.3.3      | 柱面坐标与球面坐标代换         | (127)        |
| § 10.4      | 重积分的应用              | (134)        |
| 10.4.1      | 几何应用                | (135)        |
| 10.4.2      | 物理应用                | (138)        |
| <b>第十一章</b> | <b>曲线积分与曲面积分</b>    | <b>(145)</b> |
| § 11.1      | 第一型曲线积分             | (145)        |
| 11.1.1      | 定义与性质               | (145)        |
| 11.1.2      | 化为定积分               | (147)        |
| § 11.2      | 第二型曲线积分             | (152)        |
| 11.2.1      | 定义与性质               | (152)        |
| 11.2.2      | 化为定积分               | (154)        |
| 11.2.3      | 全微分式的积分             | (157)        |
| 11.2.4      | Green 公式            | (161)        |
| 11.2.5      | 平面曲线积分与路径无关的条件      | (166)        |
| 11.2.6      | 二元函数的全微分求积与全微分方程    | (170)        |
| § 11.3      | 第一型曲面积分             | (174)        |
| 11.3.1      | 定义与性质               | (175)        |
| 11.3.2      | 化为二重积分              | (176)        |
| § 11.4      | 第二型曲面积分             | (180)        |
| 11.4.1      | 定义与性质               | (180)        |
| 11.4.2      | 化为二重积分              | (183)        |
| § 11.5      | Stokes 公式与 Gauss 公式 | (187)        |
| 11.5.1      | 散度与旋度               | (188)        |
| 11.5.2      | Stokes 公式           | (190)        |
| 11.5.3      | Gauss 公式            | (193)        |
| 11.5.4      | 场论概念                | (197)        |
| <b>第十二章</b> | <b>无穷级数</b>         | <b>(205)</b> |

---

|                         |       |
|-------------------------|-------|
| § 12.1 数项级数             | (205) |
| 12.1.1 级数的概念与性质         | (205) |
| 12.1.2 正项级数             | (208) |
| 12.1.3 变号级数             | (214) |
| § 12.2 函数项级数            | (220) |
| 12.2.1 一致收敛性            | (220) |
| 12.2.2 和函数的分析性质         | (224) |
| § 12.3 幂级数              | (227) |
| 12.3.1 收敛区间与收敛半径        | (227) |
| 12.3.2 展开函数为幂级数         | (231) |
| 12.3.3 级数求和             | (236) |
| § 12.4 Fourier 级数       | (241) |
| 12.4.1 Fourier 级数及其收敛性  | (241) |
| 12.4.2 展开函数为 Fourier 级数 | (243) |
| 12.4.3 Fourier 级数的其他形式  | (248) |
| <b>习题答案</b>             | (257) |
| <b>人名索引</b>             | (270) |
| <b>名词索引</b>             | (271) |

## 第八章 向量代数与空间解析几何

本书上册所介绍的“一元函数微积分学”，是建立在平面解析几何的基础上的. 本书下册转向“多元函数微积分学”的讨论，为此，空间解析几何的知识是不可缺少的. 鉴于向量用于表达几何与分析概念都具有特殊的便利，而且已成为现代科学中的通用工具，本章着重介绍向量代数的基本内容，并且将其应用于空间解析几何问题的研究.

### § 8.1 空间直角坐标系

空间解析几何的出发点，是建立空间中的点与三元有序数组之间的联系，这要通过引进空间直角坐标系来实现.

在空间中取定一点  $O$ ，过  $O$  作三条互相垂直的数轴： $x$  轴（横轴）、 $y$  轴（纵轴）与  $z$  轴（竖轴），它们统称为坐标轴，且均以  $O$  为原点. 规定三坐标轴的正向构成右手系，如图 8-1 所示. 这样得到一空间直角坐标系，记作  $Oxyz$ ，其中  $O$  是坐标原点（或就叫原点）.

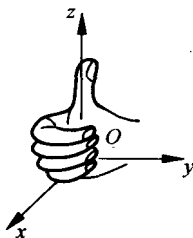


图 8-1

以下总假定已取定空间直角坐标系  $Oxyz$ .

由  $x$  轴、 $y$  轴确定的平面称为  $xy$  坐标平面，简称  $xy$  平面； $yz$  平面与  $zx$  平面的意义仿此. 三坐标平面两两互相垂直，且将空间分成八个部分，每个部分称为卦限. 位于  $xy$  平面上的一、二、三、四象限上方（假定  $z$  轴朝上）的四个卦限依次称为 I, II, III, IV 卦限，与之相对的  $xy$  平面下方的四个卦限依次称为 V, VI, VII, VIII 卦限.

任给空间中一点  $M$ ，过  $M$  作三个平面分别垂直于  $x$  轴、 $y$  轴与  $z$  轴，它们与  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴的交点依次为  $A, B, C$ ，这三点在各坐标轴上的坐标分别为  $x, y, z$ . 这样，点  $M$  唯一确定一三元有序数组  $(x, y, z)$ ，称之为点  $M$  在坐标系  $Oxyz$  中的坐标，依次称  $x, y, z$  为  $M$  的横标、纵



标与竖标(图 8-2). 将点  $M$  记为  $M(x, y, z)$ , 或简写为  $(x, y, z)$ . 反之, 任给一有序数组  $(x, y, z)$ , 在  $x$  轴、 $y$  轴与  $z$  轴上分别取点  $A, B, C$ , 使其坐标分别为  $x, y, z$ , 然后通过  $A, B, C$  分别作  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴的垂直平面, 这三个平面的交点  $M$  就是以  $(x, y, z)$  为其坐标的唯一的点. 这样, 就建立了空间的点与三元有序数组之间的一一对应关系.

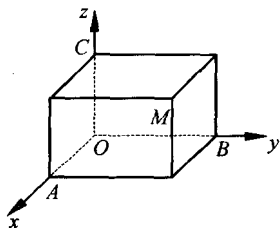


图 8-2

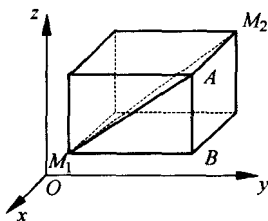


图 8-3

坐标面与坐标轴上的点, 其坐标各有一定特征. 例如,  $xy$  平面上的点的坐标形如  $(x, y, 0)$ ;  $x$  轴上的点的坐标形如  $(x, 0, 0)$ . 原点的坐标为  $(0, 0, 0)$ .

给定点  $M(x, y, z)$ , 点  $M$  关于  $xy$  平面的对称点有坐标  $(x, y, -z)$ ; 点  $M$  关于  $x$  轴的对称点有坐标  $(x, -y, -z)$ ; 点  $M$  关于原点的对称点有坐标  $(-x, -y, -z)$ . 点  $M$  在  $xy$  平面上的投影为点  $(x, y, 0)$ , 在  $x$  轴上的投影为点  $(x, 0, 0)$  (一点在一平面(直线)上的投影是由该点向该平面(直线)所引垂线之垂足). 其余情况类推.

给定两点  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  与  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ , 以  $d$  记此两点之间的距离, 即  $d = |M_1M_2|$ , 今推出  $d$  的计算公式. 过  $M_1, M_2$  各作三个分别垂直于三坐标轴的平面, 这六个平面围成一个以  $M_1M_2$  为对角线的长方体(图 8-3). 分别对直角三角形  $M_1AM_2$  与  $M_1BA$  用勾股定理得

$$d^2 = |AM_2|^2 + |M_1A|^2 = |AM_2|^2 + |M_1B|^2 + |BA|^2.$$

因

$$|AM_2| = |y_2 - x_1|, |M_1B| = |y_2 - y_1|, |BA| = |z_2 - z_1|,$$

故得

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (1)$$

特别,点  $M(x, y, z)$  与原点  $O(0, 0, 0)$  之间的距离为

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (2)$$

**例 1** 试证以点  $A(4, 1, 9)$ ,  $B(10, -1, 6)$  与  $C(2, 4, 3)$  为顶点的三角形为等腰直角三角形.

**证** 依公式(1)有

$$|AB|^2 = (10 - 4)^2 + (-1 - 1)^2 + (6 - 9)^2 = 49;$$

$$|BC|^2 = (2 - 10)^2 + (4 + 1)^2 + (3 - 6)^2 = 98;$$

$$|CA|^2 = (4 - 2)^2 + (1 - 4)^2 + (9 - 3)^2 = 49.$$

可见  $|AB| = |CA|$ ,  $|AB|^2 + |CA|^2 = |BC|^2$ , 这表明  $\triangle ABC$  是等腰直角三角形.

**例 2** 在  $xy$  平面上求一点  $M$ , 使  $M$  与点  $A(1, 2, 1)$ ,  $B(2, 2, 0)$ ,  $C(1, 3, 0)$  的距离相等.

**解** 设  $M$  的坐标为  $(x, y, 0)$ , 则等式  $|MA| = |MB| = |MC|$  相当于

$$\begin{aligned} (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + 1 &= (x - 2)^2 + (y - 2)^2 \\ &= (x - 1)^2 + (y - 3)^2. \end{aligned}$$

由此解出  $x = 1, y = 2$ , 故所求点为  $M(1, 2, 0)$ .

## 习题 8.1

1. 求点  $M(3, -4, 5)$  关于各坐标面的对称点的坐标.
2. 求点  $M(3, -4, 5)$  关于各坐标轴的对称点的坐标.
3. 求点  $A(4, -3, 5)$  到坐标原点及各坐标轴的距离.
4. 在  $z$  轴上求一点, 使它到点  $M(-4, 1, 7)$  和  $N(3, 5, -2)$  的距离相等.
5. 在  $yz$  面上求一点, 使它到点  $A(3, 1, 2)$ ,  $B(4, -2, -2)$  和  $C(0, 5, 1)$  的距离相等.

## § 8.2 向量及其线性运算

### 8.2.1 向量概念

我们熟知的力、速度、电场强度等物理量不仅有大小,而且有方向.这种“有方向的量”广泛出现在各个邻域,其重要性并不亚于数量.这种量无论其具体特性如何,都可用有向线段来表示,于是作以下定义:

**定义 1** 对空间中任意两点  $A, B$ , 称从  $A$  到  $B$  的有向线段为一个向量, 记作  $\overrightarrow{AB}$ , 或记为单个黑体字母  $\mathbf{a}$ . 称线段  $AB$  的长度为向量  $\overrightarrow{AB}$  的模, 记作  $|\overrightarrow{AB}|$  或  $|\mathbf{a}|$ . 若向量  $\mathbf{a}$  的模为零, 则称  $\mathbf{a}$  为零向量, 记作  $\mathbf{0}$ . 称向量  $\overrightarrow{BA}$  为向量  $\overrightarrow{AB}$  的负向量, 写作  $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ .

在图示上, 用箭头指出向量的方向. 可以认为零向量的方向是任意的.

给定向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ , 若  $\mathbf{a}$  经平行移动后可与  $\mathbf{b}$  重合 (即起点与起点重合, 终点与终点重合), 则规定  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ . 在这个意义上, 向量并无固定的起点, 因此称为自由向量. 本书中所研究的向量皆为自由向量.

任给向量  $\mathbf{a}$ , 必有唯一的点  $M$ , 使得  $\mathbf{a} = \overrightarrow{OM}$  ( $O$  是坐标原点). 反之, 任给空间中一点  $M$ ,  $M$  确定唯一一向量  $\overrightarrow{OM}$ , 称为点  $M$  的矢径, 记作  $\mathbf{r}_M$ . 这样, 通过点  $M$  与向量  $\mathbf{r}_M$  的对应, 得到空间中点的全体与向量的全体之间的一一对应. 下面将看到, 这种对应对于向量的研究与应用至关重要.

给定向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ , 设  $\mathbf{a} = \mathbf{r}_A, \mathbf{b} = \mathbf{r}_B$ , 若  $O, A, B$  三点共线, 则说向量  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  共线 (或平行), 且当  $A, B$  在点  $O$  之同侧时, 说  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  同向; 当  $A, B$  在点  $O$  之异侧时, 说  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  反向. 注意零向量与任何向量共线.

### 8.2.2 向量的线性运算

力或速度的合成是依“平行四边形法则”施行的, 向量的加法是这类合成的一种抽象.

**定义 2** 给定向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ , 设  $\mathbf{a} = \mathbf{r}_A, \mathbf{b} = \mathbf{r}_B$ . 若  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  不共线, 则以

$OA, OB$  为邻边作平行四边形  $OACB$  (图 8-4), 称矢量  $r_C$  为矢量  $a$  与  $b$  的和, 记作  $a + b$ . 若  $a$  与  $b$  共线且同向, 则规定  $c = a + b$  是一个与  $a, b$  同向的矢量, 且  $|c| = |a| + |b|$ ; 若  $a$  与  $b$  反向且  $|a| \geq |b|$ , 则规定  $c = a + b$  是一个与  $a$  同向的矢量且  $|c| = |a| - |b|$ .

不难理解, 如上定义的  $a + b$  与原点  $O$  的选取无关. 从图 8-4 看出,  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ . 这个等式表达了求矢量和的“三角形法则”, 它可进一步推广为如下的“多边形法则”(图 8-5):

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \cdots + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} \quad (1)$$

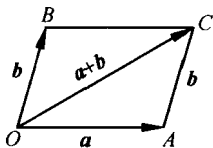


图 8-4

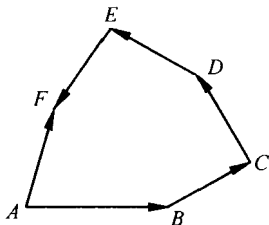


图 8-5

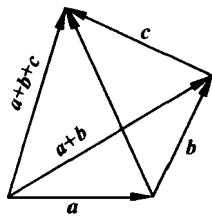


图 8-6

容易验证, 矢量加法有以下性质:

(i) 交换律:  $a + b = b + a$

(ii) 结合律:  $(a + b) + c = a + (b + c)$

(iii) 零矢量的作用:  $a + 0 = a$

(iv) 负矢量的作用:  $a + (-a) = 0$

图 8-6 说明了结合律的正确性.

任给矢量  $a, b$ , 约定  $a - b = a + (-b)$ , 称  $a - b$  为  $a$  与  $b$  之差. 显然  $c = a - b \Leftrightarrow a = b + c$ , 由此得出  $a - b$  的几何意义 (如图 8-7 所示).

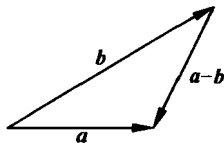


图 8-7

**定义 3** 给定矢量  $a$  与数量  $\lambda$ , 规定  $\lambda$  与  $a$  的乘积为一矢量, 记作  $\lambda a$ , 其模为  $|\lambda| |a|$ ; 当  $\lambda > 0$  时,  $\lambda a$  与  $a$  同向; 当  $\lambda < 0$  时,  $\lambda a$  与  $a$  反向.

称如上定义的运算为数量与矢量的乘法,或简称为矢量的数乘.矢量的加法与数乘合称为矢量的线性运算.

容易验证,矢量的数乘有以下性质:

$$(v) \text{ 结合律: } (\lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda(\mu\mathbf{a}) = \mu(\lambda\mathbf{a}).$$

$$(vi) \text{ 分配律: } (\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}; \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}.$$

$$(vii) 1\mathbf{a} = \mathbf{a}; (-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}; 0\mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

分配律  $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$  的正确性可由图 8-8 看出.

称模为 1 的矢量为单位矢量.任给非零矢量  $\mathbf{a}$ ,以  $\mathbf{a}^0$  记与  $\mathbf{a}$  同向的单位矢量.显然

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\mathbf{a}^0 \text{ 或 } \mathbf{a}^0 = \mathbf{a}/|\mathbf{a}| \quad (2)$$

通常以  $\mathbf{a}^0$  表示  $\mathbf{a}$  的方向.

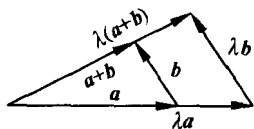


图 8-8

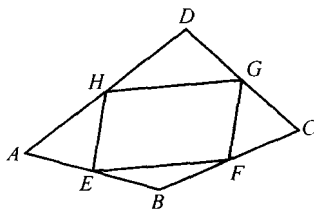


图 8-9

矢量的线性运算可用来解某些几何问题,试看一个简单例子.

**例1** 设  $ABCD$  是一空间四边形,四边中点依次为  $E, F, G, H$  (图 8-9),证明四边形  $EFGH$  为平行四边形.

**证** 只需证边  $EF$  与  $HG$  平行且相等,这相当于证  $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$ .由定义 3 及题设条件有

$$\overrightarrow{EB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC},$$

于是

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}.$$

同理  $\overrightarrow{HG} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$ , 因此  $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$ .

### 8.2.3 矢量的坐标

前面已经指出, 每个矢量  $\mathbf{a}$  是某一确定的点  $A$  的矢径:  $\mathbf{a} = \mathbf{r}_A$ . 通过对应  $A \rightarrow \mathbf{r}_A$ , 可将点的坐标转化为矢量的坐标, 从而得到矢量的坐标表示. 准确说来就是:

**定义 4** 任给点  $M(x, y, z)$ , 设  $\mathbf{a} = \mathbf{r}_M$ , 则称  $x, y, z$  为矢量  $\mathbf{a}$  (关于给定坐标系) 的坐标, 记作  $\mathbf{a} = \{x, y, z\}$ .

为方便起见, 对任给矢量  $\mathbf{a}$ , 今后以  $\{a_x, a_y, a_z\}$  记其坐标, 即将定义 4 中的  $x, y, z$  分别记成  $a_x, a_y, a_z$ . 于是  $\mathbf{a}$  有坐标表示式

$$\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\} \quad (3)$$

分别以  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  记矢量  $\{1, 0, 0\}, \{0, 1, 0\}$  与  $\{0, 0, 1\}$ , 并称之为 (给定坐标系的) **基矢量**, 它们是互相垂直的单位矢量. 基矢量的意义在于: 任一矢量  $\mathbf{a}$  有唯一分解式:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} \quad (4)$$

式(4)不过是式(3)的另一种写法而已.

图 8-10 说明了式(4)的几何意义.

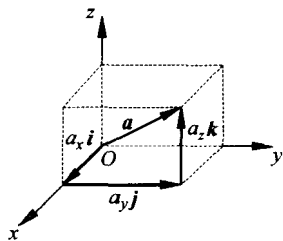


图 8-10

利用分解式(4)及矢量线性运算的性质(i) ~ (vii), 容易得出矢量线性运算的以下坐标公式:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \pm \mathbf{b} &= \{a_x \pm b_x, a_x \pm b_y, a_z \pm b_z\} \\ \lambda \mathbf{a} &= \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\} \end{aligned} \quad (5)$$

公式(5)表明, 矢量的线性运算归结为其坐标的相应运算.

**例 2** 给定点  $A(x_1, y_1, z_1)$  与  $B(x_2, y_2, z_2)$ , 求矢量  $\overrightarrow{AB}$  的坐标.

**解** 首先注意  $\overrightarrow{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$ , 然后用公式(5)得

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2, y_2, z_2\} - \{x_1, y_1, z_1\}$$

$$= \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}.$$

**例3** 设  $A, B$  如例2, 线段  $AB$  上的点  $C$  将  $AB$  分成有定比  $AC/CB = \lambda$  的两段, 求点  $C$  的坐标.

**解** 由定义4, 只需求向量  $r_C$  的坐标. 由  $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}$  与  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$  解出  $\overrightarrow{CB} = \frac{1}{1+\lambda} \overrightarrow{AB}$ . 另一方面,  $r_C = r_B - \overrightarrow{CB}$ , 于是

$$\begin{aligned} r_C &= r_B - \frac{1}{1+\lambda} \overrightarrow{AB} \\ &= \{x_2, y_2, z_2\} - \left\{ \frac{x_2 - x_1}{1+\lambda}, \frac{y_2 - y_1}{1+\lambda}, \frac{z_2 - z_1}{1+\lambda} \right\} \\ &= \left\{ \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} \right\}, \end{aligned}$$

所以点  $C$  的坐标为  $\left( \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} \right)$ .

利用数乘与矢量的坐标, 可对“共线”这一几何关系给出一种代数刻画.

**定理1** 设  $a, b$  是两个非零矢量, 则  $a$  与  $b$  共线  $\Leftrightarrow$  存在实数  $\lambda$  使

$$a = \lambda b \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

**证** 若  $a$  与  $b$  共线, 则  $a^0 = \pm b^0$  (同向时取正号, 反向时取负号), 于是由式(2)有

$$a = |a|a^0 = \pm |a|b^0 = \pm (|a|/|b|)b = \lambda b,$$

其中  $\lambda = \pm |a|/|b|$ . 反之, 若  $a = \lambda b$ , 则直接由定义3看出  $a$  与  $b$  共线. 其次, 借助于公式(5)易见  $a = \lambda b \Leftrightarrow a_x/b_x = a_y/b_y = a_z/b_z = \lambda$ .  $\square$

若  $a = \overrightarrow{OM} = \{a_x, a_y, a_z\}$ , 则由 §8.1 公式(2)有

$$|a| = |OM| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (6)$$

若  $a \neq 0$ , 则  $a$  的方向完全决定于  $a$  与三坐标轴的夹角之余弦  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  (约定  $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \pi$ ), 称他们为矢量  $a$  的方向余弦. 从图8-10看出  $a_x = |a| \cos \alpha, a_y = |a| \cos \beta, a_z = |a| \cos \gamma$ . 这结合式(6)得

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},$$

$$\cos \beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad (7)$$

$$\cos \gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

由式(7)推出

$$\mathbf{a}^0 = \mathbf{a}/|\mathbf{a}| = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\} \quad (8)$$

称任一组与  $\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$  成比例的数  $l, m, n$  为向量  $\mathbf{a}$  的方向数. 由定理 1,  $l, m, n$  是  $\mathbf{a}$  的方向数  $\Leftrightarrow$  向量  $\{l, m, n\}$  非零且与  $\mathbf{a}$  共线.

**例 4** 给定点  $A(2, 1, 1), B(1, 3, 0)$ , 求  $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$  的模、方向余弦与  $\mathbf{a}^0$ .

**解** 首先, 如同例 2 一样得出

$$\mathbf{a} = \{1 - 2, 3 - 1, 0 - 1\} = \{-1, 2, -1\}.$$

然后分别用公式(6), (7), (8) 算得

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6};$$

$$\cos \alpha = -1/\sqrt{6}, \cos \beta = 2/\sqrt{6}, \cos \gamma = -1/\sqrt{6};$$

$$\mathbf{a}^0 = \{-1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}\}.$$

## 习题 8.2

1. 设  $M$  是平行四边形  $ABCD$  两对角线的交点, 用  $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$  和  $\mathbf{b} = \overrightarrow{AD}$  表示向量  $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}$ .

2. 给定点  $M_1(1, -3, 3), M_2(4, 2, -1)$ , 求  $|\overrightarrow{M_1M_2}|, \overrightarrow{M_1M_2}$  的方向余弦及与  $\overrightarrow{M_1M_2}$  同方向的单位矢量.

3. 已知向量  $\mathbf{a}$  与  $x$  轴、 $y$  轴正向的夹角分别为  $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$ , 且  $|\mathbf{a}| = 6$ , 求向量  $\mathbf{a}$ .

4. 设  $\overrightarrow{M_1M_2} = 8\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 12\mathbf{k}$ , 点  $M_1$  的坐标为  $(2, -1, 7)$ , 求点  $M_2$  的坐标.

5. 求各坐标平面的分点  $A(2, -1, 7)$  和  $B(4, 5, -2)$  之间的线段之比, 并求其分点的坐标.



6. 给定  $F_1 = \{1, 2, 3\}$ ,  $F_2 = \{-2, 3, -4\}$ ,  $F_3 = \{3, -4, 5\}$ . 三力同时作用于一点, 求合力的大小和方向余弦.

## § 8.3 向量间的积

任给向量  $a, b$ , 可构成数量积  $a \cdot b$  与矢量积  $a \times b$ , 二者源于完全不同的物理问题. 本节给出这两种乘积的定义, 然后给出若干运算性质, 并用以得出计算  $a \cdot b$  与  $a \times b$  的坐标公式. 下面以  $\langle a, b \rangle$  记向量  $a$  与  $b$  之间的夹角, 约定  $0 \leq \langle a, b \rangle \leq \pi$ . 若  $a = 0$  或  $b = 0$ , 则可认为  $\langle a, b \rangle$  是任意的.

### 8.3.1 数量积

力学中有如下熟知结论: 若物体在常力  $F$  作用下由点  $A$  移动至点  $B$ , 则力  $F$  所作的功  $W$  为:

$$W = |F| |\overrightarrow{AB}| \cos \langle F, \overrightarrow{AB} \rangle. \quad (1)$$

类似于(1)的算式还出现于许多其他科学问题中, 因此抽象如下一般概念.

**定义 1** 任给向量  $a, b$ , 称  $|a| |b| \cos \langle a, b \rangle$  为向量  $a$  与  $b$  的**数量积** (亦称**内积**或**点积**), 记作  $a \cdot b$ , 即

$$a \cdot b = |a| |b| \cos \langle a, b \rangle \quad (2)$$

利用定义 1, 现在可将式(1)缩写成  $W = F \cdot \overrightarrow{AB}$ .

利用定义式(2), 不难验证数量积有以下性质:

(i) 交换律:  $a \cdot b = b \cdot a$ .

(ii) 结合律:  $\lambda(a \cdot b) = (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b)$ .

(iii) 分配律:  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ .

(iv)  $a^2 = |a|^2$  (通常记  $a^2 = a \cdot a$ ).

(v)  $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a \perp b$ , 即  $a$  与  $b$  垂直 (约定零矢量与任何矢量垂直).