高等学校教材

微积分学

修订版　下册

华中科技大学数学系　编

高等教育出版社

17

高等学校教材

微积分学

修订版 （下册）

华中科技大学数学系 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

图书在版编目(CIP)数据

微积分学(修订版)(下册)/华中科技大学数学系 编.－北京:高等教育出版社;2002.7

理工科本科生用书

ISBN 7－04－010822－4

Ⅰ.微…　Ⅱ.华…　Ⅲ.高等学校－教材　Ⅳ.0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 038215 号

责任编辑:徐　可　　**封面设计**:王凌波

版式设计:杨　明　　**责任印制**:陈伟光

微积分(修订版)(下册)

华中科技大学数学系　编

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010－64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	**免费咨询**	800－810－0598
邮政编码	100009	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
传　　真	010－64014048		http://www.hep.com.cn

经　　销　新华书店北京发行所

印　　刷　北京民族印刷厂

开　　本	880×1230　1/32	**版　　次**	2002 年 7 月第 1 版
印　　张	8.875	**印　　次**	2002 年 7 月第 1 次印刷
字　　数	260 000	**定　　价**	15.00 元

目　　录

第八章　矢量代数与空间解析几何

本书上册所介绍的“一元函数微积分学”，是建立在平面解析几何的基础上的．本书下册转向“多元函数微积分学”的讨论，为此，空间解析几何的知识是不可缺少的．鉴于矢量用于表达几何与分析概念都具有特殊的便利，而且已成为现代科学中的通用工具，本章着重介绍矢量代数的基本内容，并且将其应用于空间解析几何问题的研究．

§8.1　空间直角坐标系

空间解析几何的出发点，是建立空间中的点与三元有序数组之间的联系，这要通过引进空间直角坐标系来实现．

在空间中取定一点 O，过 O 作三条互相垂直的数轴：x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)与 z 轴(竖轴)，它们统称为坐标轴，且均以 O 为原点．规定三坐标轴的正向构成**右手系**，如图 8－1 所示．这样得到一空间直角坐标系，记作 $Oxyz$，其中 O 是坐标原点(或就叫原点)．

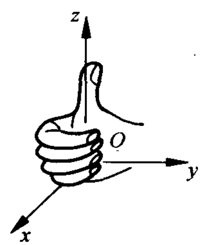

图 8－1

以下总假定已取定空间直角坐标系 $Oxyz$．

由 x 轴、y 轴确定的平面称为 xy 坐标平面，简称 xy 平面；yz 平面与 zx 平面的意义仿此．三坐标平面两两互相垂直，且将空间分成八个部分，每个部分称为**卦限**．位于 xy 平面上的一、二、三、四象限上方(假定 z 轴朝上)的四个卦限依次称为 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ 卦限，与之相对的 xy 平面下方的四个卦限依次称为 Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ 卦限．

任给空间中一点 M，过 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴与 z 轴，它们与 x 轴、y 轴、z 轴的交点依次为 A，B，C，这三点在各坐标轴上的坐标分别为 x，y，z．这样，点 M 唯一确定一三元有序数组 (x,y,z)，称之为点 M 在坐标系 $Oxyz$ 中的坐标，依次称 x，y，z 为 M 的横标、纵

标与竖标(图 8－2). 将点 M 记为 $M(x,y,z)$,或简写为 (x,y,z). 反之,任给一有序数组 (x,y,z),在 x 轴、y 轴与 z 轴上分别取点 A,B,C,使其坐标分别为 x,y,z,然后通过 A,B,C 分别作 x 轴、y 轴、z 轴的垂直平面,这三个平面的交点 M 就是以 (x,y,z) 为其坐标的唯一的点. 这样,就建立了空间的点与三元有序数组之间的一一对应关系.

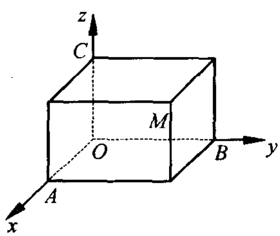

图 8－2

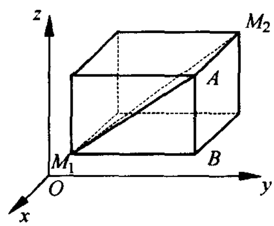

图 8－3

坐标面与坐标轴上的点,其坐标各有一定特征. 例如,xy 平面上的点的坐标形如 $(x,y,0)$;x 轴上的点的坐标形如 $(x,0,0)$. 原点的坐标为 $(0,0,0)$.

给定点 $M(x,y,z)$, 点 M 关于 xy 平面的对称点有坐标 $(x,y,-z)$; 点 M 关于 x 轴的对称点有坐标 $(x,-y,-z)$;点 M 关于原点的对称点有坐标 $(-x,-y,-z)$. 点 M 在 xy 平面上的投影为点 $(x,y,0)$,在 x 轴上的投影为点 $(x,0,0)$(一点在一平面(直线)上的投影是由该点向该平面(直线)所引垂线之垂足). 其余情况类推.

给定两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 与 $M_2(x_2,y_2,z_2)$,以 d 记此两点之间的距离,即 $d=|M_1M_2|$,今推出 d 的计算公式. 过 M_1,M_2 各作三个分别垂直于三坐标轴的平面,这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(图 8－3). 分别对直角三角形 M_1AM_2 与 M_1BA 用勾股定理得

$$d^2=|AM_2|^2+|M_1A|^2=|AM_2|^2+|M_1B|^2+|BA|^2.$$

因

$$|AM_2|=|y_2-x_1|,|M_1B|=|y_2-y_1|,|BA|=|z_2-z_1|,$$

故得

$$\boxed{d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}} \tag{1}$$

特别,点 $M(x,y,z)$ 与原点 $O(0,0,0)$ 之间的距离为

$$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{2}$$

例 1　试证以点 $A(4,1,9)$, $B(10,-1,6)$ 与 $C(2,4,3)$ 为顶点的三角形为等腰直角三角形.

证　依公式(1)有

$$|AB|^2=(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2=49;$$
$$|BC|^2=(2-10)^2+(4+1)^2+(3-6)^2=98;$$
$$|CA|^2=(4-2)^2+(1-4)^2+(9-3)^2=49.$$

可见 $|AB|=|CA|$, $|AB|^2+|CA|^2=|BC|^2$,这表明 ΔABC 是等腰直角三角形.

例 2　在 xy 平面上求一点 M,使 M 与点 $A(1,2,1)$, $B(2,2,0)$, $C(1,3,0)$ 的距离相等.

解　设 M 的坐标为 $(x,y,0)$,则等式 $|MA|=|MB|=|MC|$ 相当于

$$\begin{aligned}(x-1)^2+(y-2)^2+1&=(x-2)^2+(y-2)^2\\&=(x-1)^2+(y-3)^2.\end{aligned}$$

由此解出 $x=1$, $y=2$,故所求点为 $M(1,2,0)$.

习题 8.1

1. 求点 $M(3,-4,5)$ 关于各坐标面的对称点的坐标.
2. 求点 $M(3,-4,5)$ 关于各坐标轴的对称点的坐标.
3. 求点 $A(4,-3,5)$ 到坐标原点及各坐标轴的距离.
4. 在 z 轴上求一点,使它到点 $M(-4,1,7)$ 和 $N(3,5,-2)$ 的距离相等.
5. 在 yz 面上求一点,使它到点 $A(3,1,2)$, $B(4,-2,-2)$ 和 $C(0,5,1)$ 的距离相等.

§8.2　矢量及其线性运算

8.2.1　矢量概念

我们熟知的力、速度、电场强度等物理量不仅有大小，而且有方向．这种“有方向的量”广泛出现在各个邻域，其重要性并不亚于数量．这种量无论其具体特性如何，都可用有向线段来表示，于是作以下定义：

定义 1　对空间中任意两点 A,B，称从 A 到 B 的有向线段为一个矢量，记作 $\overrightarrow{AB}$，或记为单个黑体字母 $\boldsymbol{a}$．称线段 AB 的长度为矢量 $\overrightarrow{AB}$ 的**模**，记作 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|\boldsymbol{a}|$．若矢量 $\boldsymbol{a}$ 的模为零，则称 $\boldsymbol{a}$ 为零矢量，记作 $\boldsymbol{0}$．称矢量 $\overrightarrow{BA}$ 为矢量 $\overrightarrow{AB}$ 的负矢量，写作 $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$．

在图示上，用箭头指出矢量的方向．可以认为零矢量的方向是任意的．

给定矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，若 $\boldsymbol{a}$ 经平行移动后可与 $\boldsymbol{b}$ 重合(即起点与起点重合，终点与终点重合)，则规定 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$．在这个意义上，矢量并无固定的起点，因此称为自由矢量．本书中所研究的矢量皆为自由矢量．

任给矢量 a，必有唯一的点 M，使得 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}$($O$ 是坐标原点)．反之，任给空间中一点 M，M 确定唯一矢量 $\overrightarrow{OM}$，称为点 M 的**矢径**，记作 $\boldsymbol{r}_M$．这样，通过点 M 与矢量 $\boldsymbol{r}_M$ 的对应，得到空间中点的全体与矢量的全体之间的一一对应．下面将看到，这种对应对于矢量的研究与应用至关重要．

给定矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}_A$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{r}_B$，若 O,A,B 三点共线，则说矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **共线**(或平行)，且当 A,B 在点 O 之同侧时，说 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向；当 A，B 在点 O 之异侧时，说 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向．注意零矢量与任何矢量共线．

8.2.2　矢量的线性运算

力或速度的合成是依“平行四边形法则”施行的，矢量的加法是这类合成的一种抽象．

定义 2　给定矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}_A$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{r}_B$．若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，则以

OA,OB 为邻边作平行四边形 $OACB$(图 8-4),称矢量 $\boldsymbol{r}_C$ 为矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和,记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线且同向,则规定 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 是一个与 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 同向的矢量,且 $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$;若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向且 $|\boldsymbol{a}|\geqslant|\boldsymbol{b}|$,则规定 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 是一个与 $\boldsymbol{a}$ 同向的矢量且 $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$.

不难理解,如上定义的 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与原点 O 的选取无关.从图 8-4 看出,$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$.这个等式表达了求矢量和的"三角形法则",它可进一步推广为如下的"多边形法则"(图 8-5):

$$\boxed{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\cdots+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}} \tag{1}$$

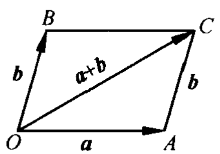

图 8-4

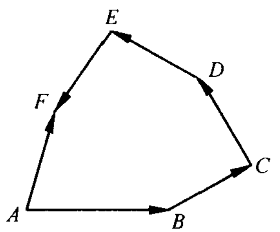

图 8-5

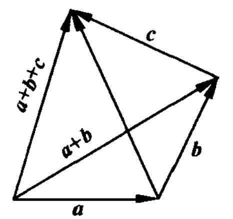

图 8-6

容易验证,矢量加法有以下性质:

(i) 交换律:$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

(ii) 结合律:$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

(iii) 零矢量的作用:$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$

(iv) 负矢量的作用:$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$

图 8-6 说明了结合律的正确性.

任给矢量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,约定 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$,称 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之差.显然 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$,由此得出 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的几何意义(如图 8-7 所示).

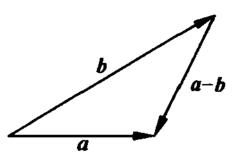

图 8-7

定义 3 给定矢量 $\boldsymbol{a}$ 与数量 λ,规定 λ 与 $\boldsymbol{a}$ 的乘积为一矢量,记作 $\lambda\boldsymbol{a}$,其模为 $|\lambda||\boldsymbol{a}|$;当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向;当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向.

称如上定义的运算为数量与矢量的乘法,或简称为**矢量的数乘**.矢量的加法与数乘合称为矢量的**线性运算**.

容易验证,矢量的数乘有以下性质:

(v) 结合律:$(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})$.

(vi) 分配律:$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$;$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

(vii) $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$;$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$;$0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

分配律 $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 的正确性可由图 8 - 8 看出.

称模为 1 的矢量为**单位矢量**.任给非零矢量 $\boldsymbol{a}$,以 $\boldsymbol{a}^0$ 记与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位矢量.显然

$$\boxed{\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0 \text{ 或 } \boldsymbol{a}^0=\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|} \tag{2}$$

通常以 $\boldsymbol{a}^0$ 表示 $\boldsymbol{a}$ 的方向.

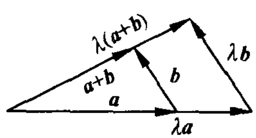

图 8 - 8

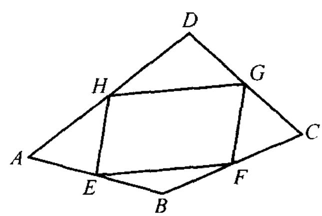

图 8 - 9

矢量的线性运算可用来解某些几何问题,试看一个简单例子.

例1　设 $ABCD$ 是一空间四边形,四边中点依次为 E,F,G,H(图 8 - 9),证明四边形 $EFGH$ 为平行四边形.

证　只需证边 EF 与 HG 平行且相等,这相当于证 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$.由定义 3 及题设条件有

$$\overrightarrow{EB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$

于是

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

同理$\overrightarrow{HG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$,因此$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$.

8.2.3　矢量的坐标

前面已经指出,每个矢量 $\boldsymbol{a}$ 是某一确定的点 A 的矢径:$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}_A$.通过对应 $A\rightarrow\boldsymbol{r}_A$,可将点的坐标转化为矢量的坐标,从而得到矢量的坐标表示.准确说来就是:

定义 4　任给点 $M(x,y,z)$,设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}_M$,则称 x,y,z 为矢量$\boldsymbol{a}$(关于给定坐标系)的坐标,记作 $\boldsymbol{a}=\{x,y,z\}$.

为方便起见,对任给矢量 $\boldsymbol{a}$,今后以$\{a_x,a_y,a_z\}$记其坐标,即将定义 4 中的 x,y,z 分别记成a_x,a_y,a_z.于是 $\boldsymbol{a}$ 有坐标表示式

$$\boxed{\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}}\tag{3}$$

分别以 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 记矢量$\{1,0,0\}$,$\{0,1,0\}$与$\{0,0,1\}$,并称之为(给定坐标系的)**基矢量**,它们是互相垂直的单位矢量.基矢量的意义在于:任一矢量 $\boldsymbol{a}$ 有唯一分解式:

$$\boxed{\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}}\tag{4}$$

式(4)不过是式(3)的另一种写法而已.图 8 - 10 说明了式(4)的几何意义.

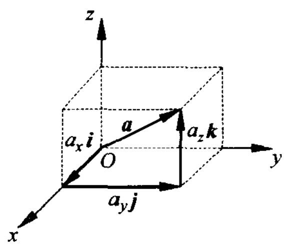

图 8 - 10

利用分解式(4)及矢量线性运算的性质(i)～(vii),容易得出矢量线性运算的以下坐标公式:

$$\boxed{\begin{gathered}\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=\{a_x\pm b_x,a_x\pm b_y,a_z\pm b_z\}\\ \lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}\end{gathered}}\tag{5}$$

公式(5)表明,矢量的线性运算归结为其坐标的相应运算.

例 2　给定点 $A(x_1,y_1,z_1)$与 $B(x_2,y_2,z_2)$,求矢量$\overrightarrow{AB}$的坐标.

解　首先注意$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{r}_B-\boldsymbol{r}_A$,然后用公式(5)得

$$\overrightarrow{AB}=\{x_2,y_2,z_2\}-\{x_1,y_1,z_1\}$$

$$=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}.$$

例 3 设 A,B 如例2,线段 AB 上的点 C 将 AB 分成有定比 $AC/CB=\lambda$ 的两段,求点 C 的坐标.

解 由定义 4,只需求矢量 $\boldsymbol{r}_C$ 的坐标.由 $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB}$ 与 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$ 解出 $\overrightarrow{CB}=\dfrac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{AB}$.另一方面,$\boldsymbol{r}_C=\boldsymbol{r}_B-\overrightarrow{CB}$,于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_C&=\boldsymbol{r}_B-\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{AB}\\&=\{x_2,y_2,z_2\}-\left\{\frac{x_2-x_1}{1+\lambda},\frac{y_2-y_1}{1+\lambda},\frac{z_2-z_1}{1+\lambda}\right\}\\&=\left\{\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right\},\end{aligned}$$

所以点 C 的坐标为 $\left(\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right)$.

利用数乘与矢量的坐标,可对"共线"这一几何关系给出一种代数刻画.

定理 1 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两个非零矢量,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线 $\Leftrightarrow$ 存在实数 λ 使

$$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}.$$

证 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线,则 $\boldsymbol{a}^0=\pm\boldsymbol{b}^0$(同向时取正号,反向时取负号),于是由式(2)有

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0=\pm|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}^0=\pm(|\boldsymbol{a}|/|\boldsymbol{b}|)\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{b},$$

其中 $\lambda=\pm|\boldsymbol{a}|/|\boldsymbol{b}|$.反之,若 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$,则直接由定义 3 看出 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线.其次,借助于公式(5)易见 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_x/b_x=a_y/b_y=a_z/b_z=\lambda$. □

若 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=\{a_x,a_y,a_z\}$,则由 §8.1 公式(2)有

$$|\boldsymbol{a}|=|OM|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.\tag{6}$$

若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{a}$ 的方向完全决定于 $\boldsymbol{a}$ 与三坐标轴的夹角之余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$(约定 $0\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant\pi$),称他们为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向余弦**.从图 8-10 看出 $a_x=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha,a_y=|\boldsymbol{a}|\cos\beta,a_z=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma$.这结合式(6)得

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\qquad(7)$$
$$\cos\gamma=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.$$

由式(7) 推出

$$\boxed{\boldsymbol{a}^0=\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}}\qquad(8)$$

称任一组与$\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$成比例的数 l,m,n 为矢量$\boldsymbol{a}$ 的**方向数**.由定理 1,l,m,n 是$\boldsymbol{a}$ 的方向数 $\Leftrightarrow$ 矢量$\{l,m,n\}$ 非零且与 $\boldsymbol{a}$ 共线.

例 4　给定点 $A(2,1,1)$,$B(1,3,0)$,求 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$ 的模、方向余弦与 $\boldsymbol{a}^0$.

解　首先,如同例 2 一样得出

$$\boldsymbol{a}=\{1-2,3-1,0-1\}=\{-1,2,-1\}.$$

然后分别用公式(6),(7),(8) 算得

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{6};$$
$$\cos\alpha=-1/\sqrt{6},\cos\beta=2/\sqrt{6},\cos\gamma=-1/\sqrt{6};$$
$$\boldsymbol{a}^0=\{-1/\sqrt{6},2/\sqrt{6},-1/\sqrt{6}\}.$$

习题 8.2

1. 设 M 是平行四边形 $ABCD$ 两对角线的交点,用 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$ 和$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AD}$ 表示矢量$\overrightarrow{MA}$,$\overrightarrow{MB}$,$\overrightarrow{MC}$,$\overrightarrow{MD}$.

2. 给定点 $M_1(1,-3,3)$,$M_2(4,2,-1)$,求$|\overrightarrow{M_1M_2}|$,$\overrightarrow{M_1M_2}$的方向余弦及与$\overrightarrow{M_1M_2}$ 同方向的单位矢量.

3. 已知矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴、y 轴正向的夹角分别为$\frac{\pi}{6}$,$\frac{\pi}{3}$,且$|\boldsymbol{a}|=6$,求矢量 $\boldsymbol{a}$.

4. 设$\overrightarrow{M_1M_2}=8\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}-12\boldsymbol{k}$,点 M_1 的坐标为$(2,-1,7)$,求点 M_2 的坐标.

5. 求各坐标平面分点 $A(2,-1,7)$ 和 $B(4,5,-2)$ 之间的线段之比,并求其分点的坐标.

6. 给定 $\boldsymbol{F}_1=\{1,2,3\}$, $\boldsymbol{F}_2=\{-2,3,-4\}$, $\boldsymbol{F}_3=\{3,-4,5\}$. 三力同时作用于一点,求合力的大小和方向余弦.

§8.3 矢量间的积

任给矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,可构成数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 与矢量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,二者源于完全不同的物理问题. 本节给出这两种乘积的定义,然后给出若干运算性质,并用以得出计算 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的坐标公式. 下面以 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 记矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角,约定 $0\leqslant\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\leqslant\pi$. 若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,则可认为 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 是任意的.

8.3.1 数量积

力学中有如下熟知结论:若物体在常力 $\boldsymbol{F}$ 作用下由点 A 移动至点 B,则力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功 W 为:

$$W=|\boldsymbol{F}||\overrightarrow{AB}|\cos\langle\boldsymbol{F},\overrightarrow{AB}\rangle. \tag{1}$$

类似于(1) 的算式还出现于许多其他科学问题中,因此抽象如下一般概念.

定义 1 任给矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,称 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 为矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积(亦称内积或点积)**,记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,即

$$\boxed{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle} \tag{2}$$

利用定义 1,现在可将式(1) 缩写成 $W=\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{AB}$.

利用定义式(2),不难验证数量积有以下性质:

(i) 交换律:$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

(ii) 结合律:$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$.

(iii) 分配律:$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.

(iv) $\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2$(通常记 $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$).

(v) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直(约定零矢量与任何矢量垂直).