

HUA LUO GENG SHU XUE AO LIN PI KE JIAO CAI

华罗庚数学 奥林匹克教材

初二年级



知识出版社



华罗庚数学系列

华罗庚数学奥林匹克教材编写组

华罗庚数学奥林匹克教材

初二年级



知识出版社

策划设计:可一工作室
责任编辑:盛 力 邓 茂

图书在版编目(CIP)数据

华罗庚数学奥林匹克教材. 初二年级/单 增主编 朱建明编著. —
北京:知识出版社,2002. 4
ISBN 7-5015-3384-9

I. 华... II. ①单... ②朱... III. 数学课—初中—教材
IV. G634.601

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2002)第 025295 号

编 者: 华罗庚数学奥林匹克教材编写组
出版发行: 知识出版社
北京阜成门北大街 17 号
电话:88390786 邮编:100037
<http://www.ecph.com.cn>
印 刷: 南京玄武湖印刷实业有限公司
经 销: 全国新华书店

版 次: 2002 年 5 月第 1 版
印 次: 2002 年 5 月第 1 次印刷
印 张: 10.75
开 本: 850 × 1168 1/32
字 数: 243 千字
ISBN 7-5015-3384-9/G · 1782
定 价: 13.00 元

纪念华罗庚先生

华罗庚数学奥林匹克教材编委会

总 编:单 增 (南京师范大学数学系教授、博士生导师)

一年级主编:韩素珍 中学高级教师 (南京市1-6届“华杯赛”集训队教练)

二年级主编:狄昌龙 小学特级教师 (南京市1-2届“华杯赛”集训队教练)

三年级主编:陈连生 小学高级教师

(金坛市3届、5届、6届、7届“华杯赛”集训队教练,被“华杯赛”

组委会授予“金牌教练”称号)

四年级主编:陈连生 小学高级教师

(金坛市3届、5届、6届、7届“华杯赛”集训队教练,被“华杯赛”

组委会授予“金牌教练”称号)

五年级主编:冯惠愚 小学特级教师

(中国数学奥林匹克高级教练、南京市1-7届“华杯赛”教练)

六年级主编:潘搏蛟 中学高级教师 (南京市1-4届“华杯赛”集训队教练)

初一年级主编:单 增 教授、博士生导师 (“华杯赛”4-7届的主试委员)

初二年级主编:朱建明 中学高级教师 (南京市4-7届“华杯赛”集训队教练)

初三年级主编:王巧林 (南京市4-6届“华杯赛”集训队教练)

高一年级主编:冯惠愚 小学特级教师

(中国数学奥林匹克高级教练、南京市1-7届“华杯赛”教练)

高二年级主编:潘春雷 中国数学奥林匹克高级教练、南京市数学奥校主教练

★ ★ ★

本 册 主 编:朱建明

前 言

单 尊

华罗庚先生(1910-1984)是本世纪的一位大数学家。他对我国数学界的影响极为巨大,在一定意义上可以说:“没有华罗庚,就没有现代的中国数学”。

华先生不仅在数学研究上具有国际一流的水准,而且热心于数学普及与人才的培养。他亲自撰写了许多通俗的数学读物,发起并主持我国的数学竞赛。他还给青少年作讲座,介绍自己的经验和心得。华先生是青少年学习的楷模,他“精勤不倦、自强不息”的精神,永远激励着广大青少年奋发向上。

为了纪念华罗庚先生,在他的家乡江苏金坛有华罗庚中学,而且自1985年在全国范围内举行了华罗庚金杯少年数学邀请赛(本书简称为“华杯赛”)。我们这套教材称为《华罗庚数学奥林匹克教材》,也正是为了纪念华罗庚先生的科学精神和卓越贡献。

这套教材是由江苏省暨金坛市从事数学竞赛培训的大、中、小学教师编写的,其中有博士生导师、教授、特级教师、校长、教研员及“华杯赛”的教练。它可以为各种数学竞赛提供系统全面的训练,从小提高学生的数学能力,具有很强的针对性与实用性,尤其

适用于“华杯赛”。

本教材，可用于数学兴趣学校和各种奥林匹克学校的课堂教学。每一册供一个年级使用。每册分为上、下两分册，用于上、下两个学期。每一分册约 15 讲，每讲至少 6 道例题，用于 100 分钟（两节课）的教学，内容由浅入深，循序渐进，适合学生的年龄特点与知识结构。每讲配备较多的习题，习题均有详细解答，可供教师及有条件辅导的家长使用。

一、二册，用于小学低年级，目的在培养学生学习数学的兴趣与数学的感觉，力求图文并茂，由较多的图画自然地较多的数学言语与文学叙述过渡。三、四、五册目的在打好基础，开拓眼界，逐步向“华杯赛”的要求靠拢。六、七两册，完全瞄准数学竞赛，相当于百米比赛的冲刺阶段，其中有较难的问题，并为临赛前的强化训练，各编写了 10 套综合练习，供培训选手的指导教师选用。八、九、十册是配合现行初中数学教材，既瞄准初中数学奥林匹克竞赛又瞄准各省市重点高中入学考试；十一、十二、十三册则是配合现行高中数学教材，既瞄准高中数学奥林匹克竞赛又瞄准全国高考，难易结合，竞赛和中高考结合，具有很强的实战性。另外，各册既互相联系，又独立成书，内容上略有重叠，这正好形成螺旋式的教学，对学生的学习是十分有益的。

例题、练习尽量选自各种竞赛，并注明出处，这也是本书的特色之一（为适合本书的体例，不少数学题目的文字作了一点修改）。

（单增总编系南京师范大学数学系教授、博士生导师）

目 录

上 册

第一讲	因式分解(一)	(1)
第二讲	因式分解(二)	(7)
第三讲	因式分解(三)	(14)
第四讲	因式分解(四)	(19)
第五讲	分式的意义及运算	(25)
第六讲	分式的条件求值	(32)
第七讲	应用分式解题	(38)
第八讲	三角形的边角计算	(43)
第九讲	三角形全等	(51)
第十讲	构造全等三角形解题	(59)
第十一讲	等腰三角形与直角三角形	(69)
第十二讲	勾股定理	(79)
第十三讲	整除问题(一)	(87)
第十四讲	整除问题(二)	(94)
第十五讲	余数问题	(101)

下 册

第一讲	非负数及其应用	(108)
第二讲	多重根式的化简与计算	(116)
第三讲	根式的运算	(122)
第四讲	实数的整数部分和小数部分	(130)
第五讲	分母有理化	(138)
第六讲	平行四边形	(145)
第七讲	梯形	(154)
第八讲	中位线定理	(163)
第九讲	相似三角形	(172)
第十讲	梅涅劳斯定理和塞瓦定理	(182)
第十一讲	三角形中的不等关系	(190)
第十二讲	几何计数问题	(199)
第十三讲	面积问题和面积法	(207)
第十四讲	不定方程(一)	(217)
第十五讲	不定方程(二)	(225)
参考答案		(233)

上册

第一讲 因式分解(一)

把一个多项式化成几个整式的积的形式,叫做因式分解,也可以叫做分解因式.因式分解与整式乘法的过程正好相反.因式分解最基本的方法有三种:提取公因式法、公式法和分组分解法.此外,还有十字相乘法、换元法、待定系数法、拆项法和添项法等等.

【例1】 分解因式: $a^3c - 4a^2bc + 4ab^2c$.

(第八届“希望杯”全国数学邀请赛初二第二试试题)

分析 这个三项式有公因式 ac , 应先提取公因式 ac .

$$\begin{aligned}\text{解} \quad & a^3c - 4a^2bc + 4ab^2c \\ &= ac(a^2 - 4ab + 4b^2) \\ &= ac(a - 2b)^2.\end{aligned}$$

说明 因式分解的一般步骤是:先提取公因式,然后再考虑用

公式法和分组分解法.

【例2】 分解因式： $9a^2 - 4b^2 + 4bc - c^2$.

(第七届“希望杯”全国数学邀请赛初二第一试试题)

分析 后三项结合可运用完全平方公式.

$$\begin{aligned}\text{解} \quad & 9a^2 - 4b^2 + 4bc - c^2 \\ &= 9a^2 - (4b^2 - 4bc + c^2) \\ &= (3a)^2 - (2b - c)^2 \\ &= [3a + (2b - c)][3a - (2b - c)] \\ &= (3a + 2b - c)(3a - 2b + c).\end{aligned}$$

说明 分组分解后要便于提取公因式及运用乘法公式. 常用的乘法公式有五个: (1) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$; (2) $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$; (3) $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$; (4) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$; (5) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

【例3】 分解因式： $(a - b)^2 + 4ab - c^2$.

(1994年天津市初二数学竞赛试题)

分析 需要把 $(a - b)^2$ 化成 $a^2 - 2ab + b^2$ 后重新分组.

$$\begin{aligned}\text{解} \quad & (a - b)^2 + 4ab - c^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2 + 4ab - c^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 - c^2 \\ &= (a^2 + 2ab + b^2) - c^2 \\ &= (a + b)^2 - c^2 \\ &= (a + b + c)(a + b - c).\end{aligned}$$

【例4】 分解因式： $6ax^2 - 9a^2xy + 2xy - 3ay^2$.

(1998年四川省初中数学联赛第一试试题)

分析 如果按前两项, 后两项进行分组, 那么两组之间又出现了新的公因式 $2x - 3ay$.

$$\begin{aligned}\text{解} \quad & 6ax^2 - 9a^2xy + 2xy - 3ay^2 \\ &= (6ax^2 - 9a^2xy) + (2xy - 3ay^2) \\ &= 3ax(2x - 3ay) + y(2x - 3ay)\end{aligned}$$

$$= (2x - 3ay)(3ax + y).$$

说明 用分组分解法分解因式, 分组时应观察多项式各项的系数和次数, 并预见到下一步分解的可能性. 本题也可采用按第1、第3项一组, 第2、第4项一组来分解.

【例5】 分解因式: $(c-a)^2 - 4(b-c)(a-b)$.

(1995年昆明市初中数学竞赛试题)

分析 把括号展开后重新分组.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & (c-a)^2 - 4(b-c)(a-b) \\ &= c^2 - 2ac + a^2 - 4ab + 4ac - 4bc + 4b^2 \\ &= c^2 + 2ac + a^2 - 4ab - 4bc + 4b^2 \\ &= (c^2 + 2ac + a^2) - (4ab + 4bc) + 4b^2 \\ &= (a+c)^2 - 4b(a+c) + (2b)^2 \\ &= (a+c-2b)^2. \end{aligned}$$

说明 在因式分解过程中, 把 $a+c$ 看成一项, 然后运用完全平方公式.

【例6】 把多项式 $2x^3 - x^2z - 4x^2y + 2xyz + 2xy^2 - y^2z$ 分解因式.

(1999年天津市初二数学竞赛初赛试题)

$$\begin{aligned} \text{【解一】} \quad & 2x^3 - x^2z - 4x^2y + 2xyz + 2xy^2 - y^2z \\ &= (2x^3 - x^2z) - (4x^2y - 2xyz) + (2xy^2 - y^2z) \\ &= x^2(2x - z) - 2xy(2x - z) + y^2(2x - z) \\ &= (2x - z)(x^2 - 2xy + y^2) \\ &= (2x - z)(x - y)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{【解二】} \quad & 2x^3 - x^2z - 4x^2y + 2xyz + 2xy^2 - y^2z \\ &= (2x^3 - 4x^2y + 2xy^2) - (x^2z - 2xyz + y^2z) \\ &= 2x(x^2 - 2xy + y^2) - z(x^2 - 2xy + y^2) \\ &= (x^2 - 2xy + y^2)(2x - z) \\ &= (x - y)^2(2x - z). \end{aligned}$$

【例7】 分解因式: $(6x-1)(2x-1)(3x-1)(x-1) + x^2$.

(1994年第六届“五羊杯”初中数学竞赛初二试题)

分析 在展开括号时,可把 $2x-1$ 与 $3x-1$, $6x-1$ 与 $x-1$ 分别相乘.

$$\begin{aligned}\text{解} \quad & (6x-1)(2x-1)(3x-1)(x-1)+x^2 \\ & = [(6x-1)(x-1)][(2x-1)(3x-1)]+x^2 \\ & = (6x^2-7x+1)(6x^2-5x+1)+x^2 \\ & = [(6x^2-6x+1)-x][(6x^2-6x+1)+x]+x^2 \\ & = (6x^2-6x+1)^2-x^2+x^2 \\ & = (6x^2-6x+1)^2.\end{aligned}$$

【例8】 分解因式: $3x^2-8x-3$.

(1993年山东省初中数学竞赛试题)

分析 把二次项的系数3分解成1,3两个因数的积,常数项-3分解成-3,1两个因式的积;当我们把1,3,-3,1写成

$$\begin{array}{cc} 1 & -3 \\ & \times \\ 3 & 1 \end{array}$$

后,发现 $1 \times 1 + 3 \times (-3)$ 正好等于一次项的系数-8.

$$\begin{aligned}\text{解} \quad & 3x^2-8x-3 \\ & = (x-3)(3x+1).\end{aligned}$$

说明 若二次三项式 $ax^2+bx+c=(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)$,则 $a=a_1a_2$, $b=a_1c_2+a_2c_1$, $c=c_1c_2$.把二次项系数 a 分解成 a_1a_2 ,常数项 c 分解成 c_1c_2 ,并且把 a_1, a_2, c_1, c_2 排列如下:

$$\begin{array}{cc} a_1 & c_1 \\ & \times \\ a_2 & c_2 \end{array}$$

这里按斜线交叉相乘,再相加,就得到 $a_1c_2+a_2c_1$,如果它正好等于 ax^2+bx+c 的一次项系数 b ,那么 ax^2+bx+c 就可以分解成 $(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)$,其中 a_1, c_1 位于上图的上一行, a_2, c_2 位于下一行.

这种借助画十字交叉线分解系数,从而帮助我们把二次三项式分解因式的方法,叫十字相乘法.这里必须注意,分解因数及十字相乘有多种可能情况,往往要经过多项尝试,才能确定一个二次三项式能否用十字相乘法分解.

【例9】 分解因式: $2x^2y - (xy + 3y)$.

(1997年广西壮族自治区初中数学竞赛试题)

分析 去掉括号,提取公因式 y 后,可利用十字相乘法分解因式.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & 2x^2y - (xy + 3y) \\ &= 2x^2y - xy - 3y \\ &= y(2x^2 - x - 3) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cc} 2 & -3 \\ & \times \\ 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{则} \quad & 2x^2y - (xy + 3y) \\ &= y(2x - 3)(x + 1). \end{aligned}$$

【例10】 分解因式: $2a^2 - b^2 - ab + bc + 2ca$.

(1995年吉林省初中数学竞赛试题)

分析 把前三项与后二项分成两组进行分组分解.其中,前三项可写成 $2a^2 - ba - b^2$,然后把它看是 a 的二次三项式,这时常数项是 $-b^2$,一次项系数是 $-b$,利用十字相乘.

$$\begin{array}{cc} 1 & -b \\ & \times \\ 2 & b \end{array}$$

$b + (-2b) = -b$,正好等于一次项系数.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & 2a^2 - b^2 - ab + bc + 2ca \\ &= (2a^2 - ba - b^2) + (2ca + bc) \\ &= (a - b)(2a + b) + c(2a + b) \\ &= (2a + b)(a - b + c). \end{aligned}$$

说明 分组后利用十字相乘法也是常用的分组方法.

练习一

把下列各式分解因式:

1. $a^2(x-y) + b^2(y-x)$.

(1999年全国初中数学竞赛广西赛区初赛试题)

2. $x^2 + 4y^2 - 4xy - 1$.

(1998年全国初中数学竞赛广西赛区初赛试题)

3. $xy - 1 - x + y$.

(第十届“希望杯”全国数学邀请赛初二第一试试题)

4. $x^2 + 4xy - 4 + 4y^2$.

(1999年重庆市初二数学竞赛试题)

5. $x^2 - 4y^2 - 9z^2 - 12yz$.

(第九届“希望杯”全国数学邀请赛初二第一试试题)

6. $(x+y)(x-y) + 4(y-1)$.

(1996年四川省初中数学联赛第一试试题)

7. $x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3$.

(第二届“希望杯”全国数学邀请赛初二第一试试题)

8. $3x^2 + 8x - 3$.

(第十届“缙云杯”数学邀请赛初一初赛试题)

9. $3a^2 - 7a - 6$.

(1998年重庆市初中数学竞赛初三试题)

10. $16(6x-1)(2x-1)(3x+1)(x-1) + 25$.

(第六届“五羊杯”初中数学竞赛初二试题)

11. $(6x-1)(4x-1)(3x-1)(x-1) + 9x^4$.

(第六届“五羊杯”初中数学竞赛初二试题)

第二讲 因式分解(二)

看下面分解因式 $a^6 - b^6$ 的两种不同解法:

$$\begin{aligned}\text{【解一】} \quad a^6 - b^6 &= (a^2)^3 - (b^2)^3 \\ &= (a^2 - b^2)(a^4 + a^2b^2 + b^4) \\ &= (a + b)(a - b)(a^4 + a^2b^2 + b^4).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{【解二】} \quad a^6 - b^6 &= (a^3)^2 - (b^3)^2 \\ &= (a^3 + b^3)(a^3 - b^3) \\ &= (a + b)(a^2 - ab + b^2)(a - b)(a^2 + ab + b^2).\end{aligned}$$

两种不同的解法出现了不同的结果. 显然 $a^4 + a^2b^2 + b^4$ 可以继续分解:

$$\begin{aligned}a^4 + a^2b^2 + b^4 &= (a^4 + 2a^2b^2 + b^4) - a^2b^2 \\ &= (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2 \\ &= (a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab).\end{aligned}$$

像上面这种将代数式中的某项拆成两项式或更多项的代数式和, 叫做拆项分组法. 上面是把 a^2b^2 拆成 $2a^2b^2$ 与 $-a^2b^2$ 的和. 而把代数式添上两个仅有符号相反的项, 叫做添项分组法.

【例1】 分解因式: $x^4 - 7x^2 + 1$.

(1994年“祖冲之杯”数学邀请赛初二试题)

分析 原式不能直接采用提取公因式法、公式法、十字相乘法进行分解, 所以考虑运用拆项法, 将 $-7x^2$ 拆成 $2x^2$ 和 $-9x^2$, 把原来三项式拆成四项式分解.

$$\text{解} \quad x^4 - 7x^2 + 1$$

$$\begin{aligned}
 &= x^4 + 2x^2 + 1 - 9x^2 \\
 &= (x^2 + 1)^2 - (3x)^2 \\
 &= (x^2 + 1 + 3x)(x^2 + 1 - 3x).
 \end{aligned}$$

说明 本题拆项分组后能运用公式分解.

【例2】 分解因式: $x^4 + x^2 + 2ax + 1 - a^2$.

(1994年哈尔滨市第十七届初中数学竞赛试题)

分析 原式共有五项,可考虑将其拆成六项再分组分解.这里可把 x^2 拆成 $2x^2$ 与 $-x^2$ 的和.

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad &x^4 + x^2 + 2ax + 1 - a^2 \\
 &= x^4 + 2x^2 - x^2 + 2ax + 1 - a^2 \\
 &= (x^4 + 2x^2 + 1) - (x^2 - 2ax + a^2) \\
 &= (x^2 + 1)^2 - (x - a)^2 \\
 &= (x^2 + 1 + x - a)(x^2 + 1 - x + a).
 \end{aligned}$$

说明 本题用的是配方法,它是一种特殊的添拆项法.

【例3】 分解因式: $(1+y)^2 - 2x^2(1+y^2) + x^4(1-y)^2$.

(1986年扬州市初一数学竞赛试题)

分析 原式首、末两项均为完全平方式,对它们配方,可添上 $2x^2(1-y^2)$ 与 $-2x^2(1-y^2)$ 两项.

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad &(1+y)^2 - 2x^2(1+y^2) + x^4(1-y)^2 \\
 &= (1+y)^2 + 2(1-y^2)x^2 + x^4(1-y)^2 - 2(1-y^2)x^2 \\
 &\quad - 2x^2(1+y^2) \\
 &= [(1+y) + x^2(1-y)]^2 - (2x)^2 \\
 &= [(1+y) + x^2(1-y) + 2x][(1+y) + x^2(1-y) - 2x] \\
 &= (x^2 + 2x + 1 + y - x^2y)(x^2 - 2x + 1 + y - x^2y) \\
 &= [(x+1)^2 - y(x^2-1)][(x-1)^2 - y(x^2-1)] \\
 &= (x+1)(x+1-xy+y)(x-1)(x-1-xy-y).
 \end{aligned}$$

【例4】 分解因式: $x^5 + x + 1$.

(1998年第十届“五羊杯”初中数学竞赛初二试题)

分析 原式无法直接分解,可添 $-x^2$ 与 x^2 两项分组分解.