新突破

奥林匹克专题讲座

新突破

主编 齐振东 薛道

AOLINPIKE

初中一年级

数学

海洋出版社

奥林匹克 专题讲座新突破

初中一年级数学

主　　编　齐振东　薛　遒
本册主编　沐爱勤　蔡勇军

海洋出版社

2002年·北京

图书在版编目(CIP)数据

奥林匹克专题讲座新突破. 初中一年级数学/齐振东,薛遒主编. —北京:海洋出版社,2002.9

ISBN 7-5027-1111-2

Ⅰ. 奥… Ⅱ. ①齐… ②薛… Ⅲ. 数学课-初中-教学参考资料 Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 064988 号

责任编辑:李向义
责任校对:张丽萍
责任印制:严国晋

海洋出版社 出版发行

http://www.oceanpress.com.cn

(100081 北京市海淀区大慧寺路 8 号)

北京市燕山印刷厂印刷

2002 年 9 月第 1 版 2002 年 9 月北京第 1 次印刷

开本:880×1230 1/32 印张:7.875

字数:205 千字 印数:1~8000 册

定价:9.00 元

前　言

为了帮助热爱数学学科的学生学好数学课程，夯实知识基础和提高综合素质，我们结合全国知名奥校、北京西城区教研中心、北京四中及徐州市部分重点学校的教学经验，将自己多年来讲课的讲义，按照奥赛的发展方向及要求，经过严格的教研论证，依据教育部新颁"教学大纲"和"竞赛大纲"，组织编写了《奥林匹克专题讲座新突破》丛书（初中数学）部分。本书按年级分册，与"大纲"同步，紧密配合本学科的教学进度，选择基础性强、针对性强、应用性广的重点教学内容作为专题，选题注重学生综合能力的培养，力求创新和突破，并注重广度和深度，例题讲解富有启发性。

本书内容由数学基本知识、典型例题解析、课后练习和答案与提示等部分组成。立足中考，着眼竞赛，在落实中考范围内的重点、难点、疑点知识的同时，更好地掌握竞赛提出的新内容、新要求。重点放在了带普遍性的思维训练上，着重分析解题思路，兼顾特殊的解题方法与技巧，提供了足够的自我训练材料。编者多年来一直在中学数学教学第一线，对教学和奥林匹克竞赛有着丰富的经验，相信对广大中学生学习数学、中考及奥林匹克竞赛取得好成绩会有所帮助。

由于水平所限，书中如有不妥之处，望读者不吝赐教。

编　者

2002 年 8 月

编　委　会

主　　编　齐振东　薛　遒

本册主编　沐爱勤　蔡勇军

编　　委　郝建忠　徐宝计

芦　萍　王　琦

目 次

第一讲　整　数

整数,可以说是大家最熟悉的数学概念.它由正整数(自然数)、零、负整数组成.本讲将介绍一些整数的基本知识以及利用这些知识进行解题的常用方法与技巧.

【基本知识】

一、整数的表示方法——十进制

我们通常接触到的整数都是十进制的整数.十进制记数就是采用逢十进一的法则进行记数的方法.对于一个十进制的多位数我们应该如何表示呢?例如,一个四位数1999它所表示的含义是:

$$1\times1000+9\times100+9\times10+9$$

因此,一般地,一个十进制的 $n+1$ 位的正整数 M 可以用下面的形式表示:

$$M=a_n\cdot10^n+a_{n-1}10^{n-1}+\cdots+a_1\cdot10+a_0$$

其中 $a_i(i=0,1,2,\cdots,n)$,可以从 $0,1,2,\cdots,9$ 这些数字中取值,并且 $a_n\neq0$.另外,为了方便起见,有时,也可以写成

$$M=\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}$$

这种表示方法称为整数的多项式表示法.其中 a_n 称为这个整数的首位数,a_0 称为这个整数的末位数(或个位数).

几个重要结论:

1.若 M 是一个十进制的 $n+1$ 位正整数,那么 $10^n\leqslant M<10^{n+1}$;

2.对于一个十进制正整数 $M=\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}$,有下面这样的常用表示方法:

$$M = 10 \times \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1} + a_0,$$

$$M = 100 \times \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_3 a_2} + \overline{a_1 a_0},$$

$$\cdots$$

$$M = 10^k \times \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_{k+1} a_k} + \overline{a_{k-1} a_{k-2} \cdots a_1 a_0}.$$

3. 对于一个十进制整数 $M = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0}$，$a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$的结果叫做 M 的各位数字的和.

二、奇数与偶数

(一) 奇数与偶数的定义及表示方法

在整数中，能被 2 整除的数叫做偶数，不能被 2 整除的数叫做奇数. 注意，零也是偶数.

偶数一般用 $2k$ 表示；奇数一般用 $2k \pm 1$ 表示.（k 为整数）

(二) 奇数与偶数的性质

1. 偶数 ± 偶数 = 偶数　　奇数 ± 奇数 = 偶数

   奇数 ± 偶数 = 奇数　　奇数 × 奇数 = 奇数

   奇数 × 偶数 = 偶数　　偶数 × 偶数 = 偶数

2. 两个整数的和与差有相同的奇偶性；

3. 整数 a 与 $|a|$ 有相同的奇偶性；

4. 两个连续的整数中，必有一个是奇数，一个是偶数；两个相邻整数之和是奇数，之积为偶数；

5. 若干个整数之和为奇数，则其中至少有一个奇数；奇数个整数之和为偶数，则其中至少有一个偶数；

6. 若干个整数之积为奇数，当且仅当每一个整数都是奇数；若干个整数之积为偶数，则当且仅当它们中至少有一个偶数；

7. n 个偶数之积必为 2^n 的倍数；

8. n^2 是偶数当且仅当 n 为偶数；n^2 是奇数当且仅当 n 为奇数；

9. 奇数的平方都可以表示成 $8k+1$ 的形式；偶数的平方都可以表示成 $4k$ 的形式. 这里 k 为非负整数.

三、最大公约数和最小公倍数

(一) 最大公约数

定义 若 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 d 都是正整数，且 $d \mid a_1, d \mid a_2, \cdots, d \mid a_n$，那么 d 叫做 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的公约数. 公约数中最大的一个叫做 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的最大公约数，记作$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

几个常用的性质：

性质 1 若 $a \mid b$，则$(a, b) = a$；

性质 2 若$(a, b) = d$，且 n 为正整数，则$(na, nb) = nd$；

性质 3 若 $n \mid a, n \mid b$，则$\left(\frac{a}{n}, \frac{b}{n}\right) = \frac{(a, b)}{n}$；

性质 4 若 $a = bq + r (0 \leqslant r < b)$，则$(a, b) = (b, r)$.

注：性质 4 给出了一种求最大公约数的方法——辗转相除法. 即求(a, b)，可以转化为求(b, r)，而 b 和 r 相对于 a 和 b 来说比较小，因此求(b, r)比求(a, b)要容易一些，从而可以简化过程. 而如果 b 和 r 仍然比较大，可以重复使用性质 4.

(二) 最小公倍数

定义 若 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 m 都是正整数，且 $a_1 \mid m, a_2 \mid m, \cdots, a_n \mid m$，那么 m 叫做 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的公倍数. 公倍数中最小的一个叫做 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的最小公倍数，记作$[a_1, a_2, \cdots, a_n]$.

几个常用性质：

性质 5 若 $b \mid a$，则$[a, b] = a$；

性质 6 若$[a, b] = m$，且 n 为正整数，则$[na, nb] = nm$；

性质 7 若 $n \mid a, n \mid b$，则$\left[\frac{a}{n}, \frac{b}{n}\right] = \frac{[a, b]}{n}$.

(三) 最大公约数与最小公倍数的关系

性质 8 若$[a, b] = m$，则$\left(\frac{m}{a}, \frac{m}{b}\right) = 1$.

性质 9 $(a, b) = \frac{ab}{[a, b]}$.

四、素数与合数

(一) 定义

素数 一个大于1的整数 a 如果仅有1和 a 这两个正约数,那么 a 叫做素数(也叫质数)

合数 如果一个正整数 a 除了1和 a 这两个正约数以外还有其他正约数,那么 a 叫做合数(也叫复合数).

素因数 如果一个正整数 a 的一个约数 p 是素数(质数),则 p 叫做 a 的素因数(也叫做质因数).

注:1既不是素数,也不是合数;全体正整数可以按其所含正约数的多少分为:单位数1、素数和合数.

(二) 性质

性质1 素数和合数都有无穷多个,最小的素数是2,但不存在最大的素数.

性质2 素数中只有2是偶数,其余全是正奇数(单数);除2以外的全体正偶数(双数)都是合数.

注:由于素数的分布很不规则,人们至今还没有发现一个一般的方法来判断自然数中哪些是素数. 著名数学家费马和欧拉都进行过尝试,费马猜测素数的表达式为 $2^{2^n}+1$;欧拉猜测素数的表达式为 n^2+n+41. 事实证明,这两个伟大数学家的猜测是不正确的. 费马的猜测在 $n=5$ 的时候被否定;而欧拉的猜测则在 $n=40$ 时被否定.

性质3 大于1的整数的所有约数中,1以外的最小正约数一定是素数.

性质4 若 a 是合数,那么 a 的最小素因数一定不大于$\sqrt{a}$.

五、带余除法与整除的判定

(一) 带余除法

定理 如果 a,b 是两个任意的整数,且 $b\neq0$,那么必存在唯一的一对整数 q,r,使得 $a=bq+r(0\leqslant r<|b|)$成立.

(二) 整除的定义及性质

1. 定义 对于任意两个整数 a、b,如果存在一个整数 q,使得 $a=bq$ 成立,那么就称 b 整除 a,或 a 能被 b 整除,记作 $b\mid a$. 否则记作 $b\nmid a$. 这时称 a 是 b 的倍数,b 是 a 的约数(或因数).

2. 性质.

性质 1 若 $c\mid b$, $b\mid a$,则 $c\mid a$;

性质 2 若 $b\mid a$, n 是整数,则 $b\mid na$;

性质 3 设 m 是非零整数,若 $b\mid a$,则 $bm\mid am$;反之,若 $bm\mid am$,则 $b\mid a$;

性质 4 设整数 $n\geqslant 2$,若 $d\mid a_1$, $d\mid a_2$, $\cdots$, $d\mid a_n$,则

$$d\mid(\pm a_1\pm a_2\pm\cdots\pm a_n);$$

性质 5 若 p 为素数,$p\mid ab$,且 $(p,b)=1$,则 $p\mid a$.

(三) 整除的判定

1. 能被 2,3,4,5,7,8,9,11,13 等数整除的数的特征

给出整数 $M=\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}$.

(1) 被 2,4,5,8 整除的数的特征

若 $2\mid a_0$,则 $2\mid M$;

若 $5\mid a_0$,则 $5\mid M$;

若 $4\mid\overline{a_1a_0}$,则 $4\mid M$;

若 $8\mid\overline{a_2a_1a_0}$,则 $8\mid M$;

(2) 被 3、9 整除的数的特征

若 M 的各位数字之和能被 3(或 9)整除,则 M 也能被 3(或 9)整除;反之,若 M 能被 3(或 9)整除,则 M 的各位数字之和也能被 3(或 9)整除.

(3) 被 11 整除的数的特征

若 M 的奇位数字之和与偶位数字之和的差能被 11 整除,则 M 也能被 11 整除;反之亦然.

(4) 能被 7、11、13 整除的数的特征

若 M 的奇位千进位的总和与偶位千进位的总和之差能被 7、11、

13 整除，则 M 也能被 7、11、13 整除；反之亦然.

例如：203286103020，分节，203，286，103，020，奇位千进位的总和为 $286+20=306$；偶位千进位的总和为 $203+103=306$. 它们的差为 0，因为 0 可以被 7、11、13 整除，故 203286103020 能被 7、11、13 整除.

2. 判断一个整数能否被一个素数整除的常用方法——割尾判别法

(1) 能被 7 整除：割去末位，得到一个新数，再从这个新数中减去末位数的两倍，得到的差能被 7 整除，则此数能被 7 整除，否则就不能.

(2) 能被 13 整除的数：割一位乘 9；割两位乘 10；割三位乘 1；割四位乘 4；割五位乘 3.

(3) 能被 17 整除的数：割一位乘 5；割两位乘 9；割三位乘 6；割四位乘 4；割五位乘 14.

(4) 能被 19 整除的数：割一位乘 17；割两位乘 15；割三位乘 11；割四位乘 3；割五位乘 6.

(5) 能被 23 整除的数：割一位乘 16；割两位乘 20；割三位乘 2；割四位乘 14；割五位乘 6.

(6) 能被 29 整除的数：割一位乘 26；割两位乘 20；割三位乘 2；割四位乘 6；割五位乘 18. ……

在运用割尾判别法时，如果第一次求得的结果仍然很大，可继续运用上述方法.

例如：判断 71953 能否被 7 整除. 运用割尾判别法：

$7195-2\times3=7189$；(一次)

$718-2\times9=700$；(两次)

故 71953 能被 7 整除.

再例如：判断 73283 能否被 19 整除. 运用割尾判别法：

割两位乘 15

$732-83\times15=-513=-27\times9$；

或割一位乘 17

$7328-3\times17=7277$；(一次)

$727-7\times17=608=32\times19$;(两次)

故 73283 能被 19 整除.

六、两个比较特殊的整数——+1 和 -1

+1 和 -1 有一些比较特殊的性质:

(1) 任何数乘以 1 还是它本身,乘以 -1 得到它的相反数;

(2) +1 和 -1 互为相反数,且都等于自身的倒数;

(3) $(+1)^n=1,(-1)^{2n}=1,(-1)^{2n+1}=-1$($n$ 为整数);

(4) 若$(-1)^n=1$,则 n 为偶数;若$(-1)^n=-1$,则 n 为奇数;

(5) 婶 n 个 +1 和 -1 的代数和等于 0,则 n 为偶数;

(6) +1 和 -1 是任何整数的约数.

这些性质可以用来处理以下两种竞赛题目:

(1) 所给字母要求取 +1、-1 的问题;

(2) 可以对所给的字母进行赋值 +1、-1,从而大大简化题目难度的问题.

【典型例题】

例 1. 若一个首位数字是 1 的六位数$\overline{1abcde}$乘以 3 所得的积是一个末位数字为 1 的六位数$\overline{abcde1}$,求原来的六位数.

解:解法 1:因为 3 只有乘以 7,其积的末位数才是 1,所以 $e=7$,且进 2 于十位;只有 3 乘以 5 的积末位是 5,所以 $d=5$,且进 1 于百位;只有 3 乘以 8 的积末位是 4,所以 $c=8$ 且进 2 于千位;只有 3 乘以 2 的积的末位是 6,所以 $b=2$,不进位;只有 3 乘以 4 的积末位是 2,所以 $a=4$;由此原来的六位数是 142857.

解法 2:设$\overline{abcde}=x$,则$\overline{1abcde}=10^5+\overline{abcde}=10^5+x$,

$\overline{abcde1}=10\times\overline{abcde}+1=10x+1$,据题意可得

$$3(10^5+x)=10x+1$$

解得 $x=\dfrac{3\times10^5-1}{7}=\dfrac{299999}{7}=42857$;

故原来的六位数为 142857.

解法 3:设$\overline{1abcde}=x$,则 $3x=10x-10^6+1$;

解得 $x=\frac{10^6-1}{7}=\frac{999999}{7}=142857$.

例 2. 求一个四位数,它等于去掉它的首位数后所得的三位数的 3 倍减去 42.

解: 设所求的四位数为 $x=\overline{abcd}$,根据题意有

$$\overline{abcd}=\overline{bcd}\times 3-42$$

即 $$10^3a+10^2b+10c+d=(10^2b+10c+d)\times 3-42$$

$$10^3a+10^2(-2b)+10(-2c)+(-2d)+42=0$$

$$10^3a+10^2(-2b)+10(-2c+4)+(-2d+2)=0 \qquad ①$$

分别比较两边的个位及十位数字可得

$$-2d+2=0$$

$$-2c+4=0$$

故 $$d=1, c=2$$

将其代入①,有 $$b=5a$$

因为 a、b 同为 0,1,2,…,9 中的数字,所以 $a=1$, $b=5$.

所以所求的四位数为 1521.

例 3. 已知一个四位数的各位数字的和与这个四位数相加等于 1995,试求这个四位数.

解: 设所求的四位数是$\overline{abcd}$,根据题意可得

$$a+b+c+d+\overline{abcd}=1995$$

即

$$1001a+101b+11c+2d=1995 \qquad ①$$

此时必有 $a=1$(若 $a\geqslant 2$,则①式左边最小为 2002,大于 1995). 于是有

$$101b+11c+2d=994 \qquad ②$$

此时必有 $b=9$,(若 $b\leqslant 8$,则②式左边最大为 $101\times 8+11\times 9+2\times 9=925$,小于 994),于是有

$$11c+2d=85 \qquad ③$$

对于③式，若 c 取 9 或 8，左边都大于 85；若 $c\leqslant 6$，则左边都小于 85，故必有 $c=7$；从而，$d=4$；

故所求的四位数为 1974.

例 4. 有一个若干位的正整数，它的前两位数字相同，且它与它的反序数之和为 10879，求原数.

解： 由已知可以推得原数为四位数，（若为五位数，最小是 $\overline{11\times\times\times}$，已经大于 10879；若为三位数，最大为 999，与其反序数之和为 1998，小于 10879.）

由此，根据题意可设原数为 $\overline{aabc}$，其中 $a\geqslant 1$，$c\geqslant 1$，则它的反序数为 $\overline{cbaa}$.

由题意
$$\overline{aabc}+\overline{cbaa}=10879,$$
即
$$(10^3a+10^2a+10b+c)+(10^3c+10^2b+10a+a)=10879$$
亦即
$$1001(a+c)+110(a+b)=10879 \qquad ①$$
比较①式两边的末位数，得
$$a+c=9, \qquad ②$$
将②式代入①式，得
$$a+b=17,$$
由于 $a=17-b\geqslant 17-9=8$，而 $c\geqslant 1$，故 a 只有取 8，即 $a=8$；分别由①、②式，可得 $c=1$，$b=9$；故原数为 8891.

例 5. 证明 $M=\underbrace{11\cdots1}_{2001个}\underbrace{22\cdots2}_{2001个}$是两个连续自然数的乘积.

证明： 令 $m=\underbrace{11\cdots1}_{2001个}$，则
$$\begin{aligned}M&=\underbrace{11\cdots1}_{2001个}\underbrace{22\cdots2}_{2001个}\\&=\underbrace{11\cdots1}_{2001个}\underbrace{00\cdots0}_{2001个}+\underbrace{22\cdots2}_{2001个}\\&=m(1\underbrace{00\cdots0}_{2001个}+2)\end{aligned}$$

$$= m(\underbrace{99\cdots9}_{2001\text{个}} + 3)$$

$$= m(9m + 3) = (3m)(3m + 1)$$

故 $M = \underbrace{11\cdots1}_{2001\text{个}}\underbrace{22\cdots2}_{2001\text{个}}$是两个连续自然数的乘积.

例6. 已知 a、b、c 中有两个奇数一个偶数,求证:$(a+1)(b+2)\times(c+3)$一定是偶数.

证明: 因为 a、b、c 中有两个奇数一个偶数,所以 $a+b+c$ 为一偶数,从而我们有$(a+1)+(b+2)+(c+3)=(a+b+c)+6$ 为偶数.根据性质,三个数 $a+1$、$b+2$、$c+3$ 中至少有一个偶数.从而$(a+1)\times(b+2)(c+3)$一定是偶数.

例7. 给定整数 a 和 b.求证:当且仅当 ab 为偶数时,存在两个整数 c、d,满足等式

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2$$

证明: (1)若 ab 为偶数,则 a 和 b 中至少有一个是偶数.下面分情况讨论:

1) 若 a 和 b 为一奇一偶,则 a^2+b^2 必为奇数.可以设 $a^2+b^2=2k+1$,则由已知条件 $a^2+b^2+c^2=d^2$ 可得

$$d^2 - c^2 = 2k + 1$$

此时可以取 $d=k+1$, $c=k$,可使上式成立.

2) 若 a 和 b 都是偶数,则 a^2+b^2 为 4 的倍数.可以设 $a^2+b^2=4k$,则由已知条件 $a^2+b^2+c^2=d^2$ 可得

$$d^2 - c^2 = 4k$$

此时取 $d=k+1$, $c=k-1$,可使上式成立.

综合 1)、2)知,若 ab 为偶数,则存在两个整数 c、d,满足等式 $a^2+b^2+c^2=d^2$.

(2)若 ab 是奇数,则 a、b 都是奇数,由此可以设 $a^2+b^2=8k+2$,则有 $d^2-c^2=8k+2$

即
$$(d+c)(d-c) = 8k + 2$$

因为 $d+c$、$d-c$ 具有相同的奇偶性,而上式右边是一个偶数,故 $d+$

c、$d-c$ 都是偶数. 可以设 $d+c=2k_1$, $d-c=2k_2$, 代入上式可得

$$2k_1k_2 = 4k+1$$

$2k_1k_2$ 是个偶数, 而 $4k+1$ 是个奇数, 故两者不能相等.

故此时满足等式 $a^2+b^2+c^2=d^2$ 的整数 c、d 不存在.

例 8. 某班有49位同学, 坐成七行七列. 每个座位的前后左右的座位叫做它的"邻座". 要让这 49 位同学中的每一位都换到他的邻座上去, 问这种调换的方案能否实现?

解: 这种调换座位的方案不可能实现.

用 * 和 Δ, 按照右图的方式来标志这 49 个座位. 对于画 * 的座位, 画 Δ 的座位是他的"邻座", 反之也一样. 因此, 换的要求是: 凡坐在 * 位上的都必须换到 Δ 位上去, 而坐在 Δ 位上的都应当换到 * 位上来. 而两种座位的总数是 49, 是一个奇数, 可见 * 位数目和 Δ 位数目必然是一奇一偶.

奇偶性都不同, 这种座位是不能建立起一一对应的, 因此, 满足要求的换位是一定无法实现的.

*	Δ	*	Δ	*	Δ	*
Δ	*	Δ	*	Δ	*	Δ
*	Δ	*	Δ	*	Δ	*
Δ	*	Δ	*	Δ	*	Δ
*	Δ	*	Δ	*	Δ	*
Δ	*	Δ	*	Δ	*	Δ
*	Δ	*	Δ	*	Δ	*

例 9. 将 1, 2, 3, …, 99 重新排列成 $a_1, a_2, \cdots, a_{99}$, 求证: 乘积 $(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_{99}-99)$ 一定是偶数

解: 运用反证法, 假设乘积 $(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_{99}-99)$ 为奇数, 则 $a_1-1, a_2-2, \cdots, a_{99}-99$ 均为奇数

所以 a_i 必须满足: 当 i 为奇数时, a_i 为偶数

当 i 为偶数时, a_i 为奇数

所以 a_i 中共有 50 个偶数, 49 个奇数

而 1, 2, …, 99 中共有 49 个偶数, 50 个奇数, 矛盾!

所以假设错误

所以乘积 $(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_{99}-99)$ 一定是偶数.