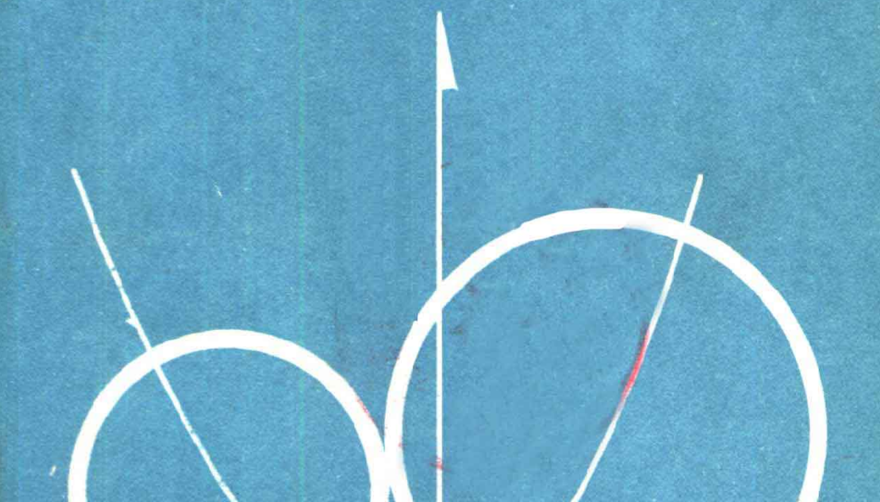
最新日本全国高考数学试题精解

刘俊山
宋麟范 编译



SHUXUESHITIJINGJIE

辽宁科学技术出版社

最新日本全国高考数学试题精解

刘俊山
宋麟范 编译

辽宁科学技术出版社

一九八六年·沈阳

最新日本全国高考数学试题精解

Zuixin Riben Quanguo Gaokao
Shuxue Shiti Jingjie

刘俊山
宋麟范 编译

辽宁科学技术出版社出版 （沈阳市南京街6段1里2号）
辽宁省新华书店发行 东北工学院印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：18 1/2 字数：412,000
1986年2月第1版 1986年2月第1次印刷

责任编辑：宋纯智 插 图：何健钒
封面设计：吴风旗

印数：1—4,600
统一书号：7288·67 定价：2.95元

目　录

序　章

1985年国立、公立大学招生试题

试　题

1　已知四点$A(1,3)$、$B(5,8)$、$C(0,0)$、$D(12,0)$，设P是线段AB上的动点，Q是线段CD上的动点，S是线段PQ的中点，则S的存在范围是在以四点$K\left(\frac{5}{2},\ \square\right)$、$L\left(\frac{1}{2},\ \frac{\square}{\square}\right)$、$M\left(\frac{\square}{\square},\ \frac{3}{2}\right)$、$N\left(\frac{\square}{\square},\ 4\right)$为顶点的四边形的内部及其边界上，且四边形$KLMN$的面积为□。

2　已知$P(0,1)$、$Q(1,0)$、$R(a,b)$为单位圆$x^2+y^2=1$上的三点，点R位于第一象限，线段$\overline{PR}$的长为1。此时

$$a=\frac{\sqrt{\square}}{\square},\quad b=\frac{\square}{\square}$$

$$\overline{PQ}=\sqrt{\square},\quad \overline{QR}=\frac{\sqrt{\square}-\sqrt{\square}}{2}$$

并且　$\cos\angle PQR=\frac{\sqrt{\square}}{\square}$，$\triangle PQR$的面积$=\frac{\sqrt{\square}-\square}{\square}$。

3　（1）设与x轴、y轴相切，且过点$(-4,\ 2)$的两个圆中半径较小的圆的方程为

$$x^2+y^2+lx+my+n=0$$

则　$l=\square$，$m=\square$，$n=\square$

（2）关于二次函数 $f(x)=x^2+ax+3$：

（i）对于一切 x 值，使 $a\leqslant f(x)$ 的 a 的范围为$\square\leqslant a\leqslant\square$；

（ii）对于 $-2\leqslant x\leqslant 2$ 的一切 x 值，使 $a\leqslant f(x)$的 a 的范围为$\square\leqslant a\leqslant\square$。

4 考虑原点 O 及 $A(1,3)$、$B(4,2)$、$C(2,5)$：

（i）若用 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 表示 $\overrightarrow{OC}$，则

$$\overrightarrow{OC}=\frac{\square}{\square}\overrightarrow{OA}+\frac{\square}{\square}\overrightarrow{OB}$$

（ii）设线段$\overline{AB}$与线段$\overline{OC}$交于 P 点，若用 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 表示 $\overrightarrow{OP}$，则

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\square}{\square}\overrightarrow{OA}+\frac{\square}{\square}\overrightarrow{OB}$$

（iii）点 Q 在线段 $\overline{AB}$ 上，$\overrightarrow{QC}\parallel\overrightarrow{OB}$ 时，若用 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 表示 $\overrightarrow{OQ}$，则

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{\square}{\square}\overrightarrow{OA}+\frac{\square}{\square}\overrightarrow{OB}$$

5 设$\triangle OAB$是以点$O(0,0)$、$A(5,0)$、$B(0,5)$为顶点的三角形，点A_1、O_1、B_1 分别内分 OA、AB、BO 成 2:3；同理，点 A_2、O_2、B_2 分别内分 $\triangle O_1B_1A_1$ 的边 O_1A_1、A_1B_1、B_1O_1成2:3。依此继续进行 n 次，得到点 A_n、O_n、B_n，考虑以 A_n、O_n、B_n 为顶点的三角形 $O_nA_nB_n$：

（i）$\triangle O_2A_2B_2$ 的顶点坐标为

$$A_2\left(\frac{\square}{5},\ \frac{\square}{5}\right),\ O_2\left(\frac{\square}{5},\ \frac{\square}{5}\right),\ B_2\left(\frac{\square}{5},\ \frac{\square}{5}\right);$$

（ii）设 S_n 为三角形 $O_nA_nB_n$ 的面积时，则数列 S_1，

$S_2,\cdots,$是首项为 $\frac{\square}{\square}$，公比为$\frac{\square}{\square}$的等比数列；

(iii) 设点O_{2n}的 x 坐标为 $x_{2n}(n=1,2,\cdots)$，且$x_0=0$，则

$$x_{2n}-x_{2n-2}=\frac{\square}{\square}\left(\frac{\square}{\square}\right)^{n-1}$$

6 设动点P从正五边形$ABCDE$的顶点A开始沿其周界移动。P点移到某一顶点时，1秒后分别以概率为$\frac{1}{2}$移动到与该点相邻的两个顶点之一，则

(i) P从A开始，3秒后到达E的概率为$\frac{\square}{\square}$；

(ii) P从A开始，4秒后到达B的概率为$\frac{\square}{\square}$；

(iii) P从A开始，4秒后到达A的概率为$\frac{\square}{\square}$；

(iv) P从A开始，8秒后到达A的概率为$\frac{\square}{\square}$。

注：从 4、5、6 题中任取两道题。

解　答

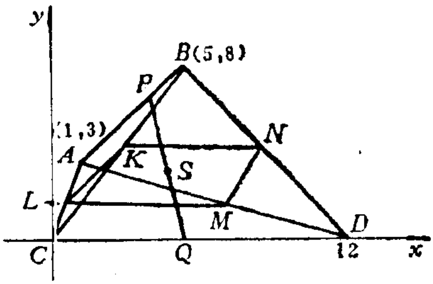
1 解 点P的坐标记为$\left(s,\ \frac{5}{4}s+\frac{7}{4}\right)$，

$1\leqslant s\leqslant 5$　　①

点Q的坐标记为$(t,\ 0)$，

$0\leqslant t\leqslant 12$　　②

设$(x,\ y)$为点S的坐标，因



$$x=\frac{s+t}{2},\quad y=\frac{5s+7}{8}$$

故 $$s=\frac{8y-7}{5},\quad t=\frac{10x-8y+7}{5}$$

将 s、t 代入①、②中，有

$$1\leqslant\frac{8y-7}{5}\leqslant 5,\ 0\leqslant\frac{10x-8y+7}{5}\leqslant 12$$

$$\frac{3}{2}\leqslant y\leqslant 4,\ 0\leqslant 10x-8y+7\leqslant 60$$

从而，四边形 $KLMN$ 为由四条直线：$y=\frac{3}{2}$、$y=4$、$10x-8y+7=0$、$10x-8y-53=0$ 所围成的平行四边形，K、L、M、N 分别为 BC、AC、AD、BD 的中点。于是

$$K\left(\frac{5}{2},\ 4\right),\ L\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right),$$

$$M\left(\frac{13}{2},\ \frac{3}{2}\right),\ N\left(\frac{17}{2},\ 4\right)$$

四边形 $KLMN$ 的面积为$\left(\frac{13}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(4-\frac{3}{2}\right)=15$。

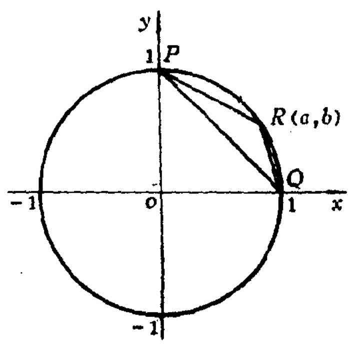
2 解 由已知条件，$\triangle POR$ 为正三角形，于是 $\angle POR=60°$，$\angle ROQ=30°$，故有

$$a=OR\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$b=OR\sin 30°=\frac{1}{2}$$

显然，$PQ=\sqrt{2}$。

$$\overline{QR}^2=\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}$$



$$\overline{QR}=\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

又， $\angle PQR=\frac{1}{2}\angle POR=30^\circ$，于是

$$\cos\angle PQR=\cos30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\triangle PQR\text{的面积}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\sin30^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

3 解

(1) 与两轴相切且过第二象限的点的圆的方程记成

$$(x+a)^2+(y-a)^2=a^2(a>0) \qquad ①$$

①过点（-4，2），于是

$$(-4+a)^2+(2-a)^2=a^2$$

求 $(a-2)(a-10)=0$ 之小根，$a=2$。

将 $a=2$ 代入①并展开，则有 $x^2+y^2+4x-4y+4=0$，

故 $$l=4,\ m=-4,\ n=4$$

(2) (i) 对一切的 x 值，$x^2+ax+3-a\geqslant0$ 成立的条件是

$$D=a^2-4(3-a)=(a+6)(a-2)\leqslant0$$

故 $$-6\leqslant a\leqslant2$$

(ii) 在 $-2\leqslant x\leqslant2$上，求 $y=f(x)=x^2+ax+3-a$ 的图形不出现在 x 轴下方的条件（最小值$\geqslant0$）。

由于轴的方程为 $x=-\frac{a}{2}$，于是

1) $-\frac{a}{2}\leqslant-2$（$a\geqslant4$）时，由最小值 $f(-2)=7$

$-3a\geqslant 0$，$\frac{7}{3}\geqslant a$，从而 a 的值不存在。

2） $-2<-\frac{a}{2}\leqslant 2$（$4>a\geqslant -4$）时，由最小值 $f\left(-\frac{a}{2}\right)=3-a-\frac{a^2}{4}\geqslant 0$，$-6\leqslant a\leqslant 2$，因此 $-4\leqslant a\leqslant 2$。

3） $2<-\frac{a}{2}$（$a<-4$）时，由最小值 $f(2)=7+a\geqslant 0$，$a\geqslant -7$，因此 $-7\leqslant a<-4$。

由 1)、2)、3) 求得 a 的范围为 $-7\leqslant a\leqslant 2$。

4 解

（ⅰ）设 $\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$，则

$(2,5)=m(1,3)+n(4,2)=(m+4n,3m+2n)$

解方程组

$$\begin{cases} m+4n=2 \\ 3m+2n=5 \end{cases}$$

得 $$m=\frac{8}{5},\quad n=\frac{1}{10}$$

（ⅱ）A、B、P 及 O、P、C 分别在同一直线上，于是

$$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OA}+(1-t)\overrightarrow{OB}=s\overrightarrow{OC}$$

$$t(1,3)+(1-t)(4,2)=s(2,5)$$

故 $$4-3t=2s,\quad 2+t=5s$$

解得 $$s=10/17,\quad t=16/17$$

因此

$$\overrightarrow{OP}=\frac{16}{17}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{17}\overrightarrow{OB}$$

（ⅲ）由（ⅱ），$\overrightarrow{OP}:\overrightarrow{PC}=10:7$

从而，$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{QC}$

$$=\frac{8}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{10}\overrightarrow{OB}-\frac{7}{10}\overrightarrow{OB}$$

$$=\frac{8}{5}\overrightarrow{OA}-\frac{3}{5}\overrightarrow{OB}$$

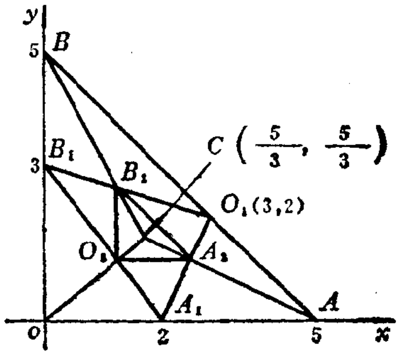
5 解

（ i ）依据求分点坐标的公式，$A_1(2,0)$、$O_1(3,2)$、$B_1(0,3)$，再使用一次公式，有

$A_2\left(\frac{13}{5},\ \frac{6}{5}\right)$、

$O_2\left(\frac{6}{5},\ \frac{6}{5}\right)$、

$B_2\left(\frac{6}{5},\ \frac{13}{5}\right)$。



（ ii ）$\triangle OAB$的面积 $=\frac{25}{2}$。

$\triangle O_1A_1B_1$的面积 $=\triangle OAB$的面积 $-$ $(\triangle O_1A_1A+\triangle OA_1B_1+\triangle O_1BB_1)$的面积

$$=\left(1-\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot 3\right)\triangle OAB\text{ 的面积}$$

$$=\frac{7}{25}\triangle OAB\text{ 的面积}$$

$$=\frac{7}{25}\cdot\frac{25}{2}=\frac{7}{2}$$

一般地，$\triangle O_{n+1}A_{n+1}B_{n+1}$ 的面积 $=\frac{7}{25}$ $\triangle O_nA_nB_n$ 的

面积。于是，数列 $\{S_n\}$ 是首项为 $\frac{7}{2}$，公比为 $\frac{7}{25}$ 的等比数列。

(iii) $\triangle OAB \backsim \cdots \backsim \triangle O_{2n}A_{2n}B_{2n} \backsim \triangle O_{2n+2}A_{2n+2}B_{2n+2}$，其相似中心为点 $C\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$。

$$x_2 - x_0 = \frac{6}{5}$$

$$\begin{aligned} x_{2n+2} - x_{2n} : x_{2n} - x_{2n-2} &= O_{2n}O_{2n+2} : O_{2n-2}O_{2n} \\ &= 7 : 25 \end{aligned}$$

于是，数列 $\{x_{2n} - x_{2n-2}\}$ 是首项为 $\frac{6}{5}$，公比为 $\frac{7}{25}$ 的等比数列。

6 解

(i) 有 $A—B—A—E$，$A—E—A—E$，$A—E—D—E$ 三种移动法，从而，所求概率为 $\frac{3}{8}$；

(ii) 有 $A—E—D—C—B$ 的一种移动法，概率为 $\frac{1}{16}$；

(iii) 经 4 秒不可能转一周，故 4 秒后在 A 的情况，可向左、向右各移动二条边，故共有 C_4^2 种方法，因此所求的概率为 $6\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8}$；

(iv) 因经 8 秒后转一周在 A 的可能性不存在，故 8 秒后在 A 的可能是向左、向右各移动四条边的情况，故所求的概率为 $C_8^4\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{35}{128}$。

第一章　数、数式的运算

1　证明和与积相等的两个正整数仅有一组。

证明　设 a、b 为和与积相等的两个正整数，则

$$a+b=ab$$

$$ab-(a+b)+1=1$$

$$\therefore\quad (a-1)(b-1)=1$$

因 $a-1$，$b-1$ 都为正数 1 的约数，故

$$a-1=b-1=1$$

$$\therefore\quad a=b=2$$

从而，满足条件的正整数仅有一组。

2　设 m、n 是 10 进制且满足 $10\leqslant m<100$，$10\leqslant n<100$，$m+n=100$ 的自然数。回答下列各问。

（1）　证明 m^2 与 n^2 的最后两位数(个位数与10位数)相同；

（2）　m^3 与 n^3 的最后两位数有何关系？

（3）　证明（2）的结论。

证明　（1）　只须证明 m^2 与 n^2 的差被 100 整除即可。

$$\begin{aligned} m^2-n^2 &= (m+n)(m-n) \\ &= 100(m-n) \\ &= 100\times(\text{整数}) \end{aligned}$$

从而，m^2-n^2 为 100 的倍数。问题得证。

（2）　m^3 与 n^3 的最后两位数之和是 100 或 0 。

（3）　$m^3+n^3=(m+n)(m^2-mn+n^2)$

$$=100\times(\text{整数})$$

从而，m^3 与 n^3 的最后两位数之和是100的倍数，而由于其和不超过 200，故最后两位数之和应为 100 或 0 。

3　对于正整数 x、y，等式 $xy(x-y)=2(x+2y)$ 成立时，回答下列各问。

（1）　试证　$1\leqslant x-y\leqslant 4$；

（2）　试证　$y\leqslant 5$；

（3）　求 x、y 的值。

解　（1）　$x>0$，$y>0$，用 xy 除以等式两边，

$$x-y=\frac{2}{y}+\frac{4}{x} \qquad ①$$

①的右边为正，x、y 为整数，故有 $x-y\geqslant 1$，又，$y=1$，$x=2$ 时，①的右边取最大值 4，所以

$$1\leqslant x-y\leqslant 4$$

（2）　设 $y\geqslant 6$，则 $x\geqslant 7$，① 的右边小于 1，矛盾，故 $y\leqslant 5$。

（3）　$y=5$ 时，由（1），$6\leqslant x\leqslant 9$ 中的 x 不合题意，于是，由 $y=4$，3，2，1，得到

$x=4$，$y=1$；$x=4$，$y=2$　　　　（答）

4　既约分数 $\dfrac{y}{x}$ 的平方根舍去小数点后第二位以下的数时成为 1.3，而分母与分子之和为 81，求这个分数。

解

$$1.3\leqslant\sqrt{\frac{y}{x}}<1.4 \qquad ①$$

$$x+y=81 \qquad ②$$

由①，　　$1.69x\leqslant y<1.96x$

由②，　　$2.69x<81<2.96x$

$$\therefore\quad 27.3<x<30.2$$

$$\therefore\quad x=28,\ 29,\ 30$$

$$\therefore\quad (x,\ y)=(28,53),\ (29,52),\ (30,51)$$

这里，由于（30,51）有3的约数，故舍去（30,51）∴

$$\frac{y}{x}=\frac{53}{28},\quad \frac{52}{29}$$

5　回答下列各问题。

（1）1000以下的自然数中用4除与用6除时，余数均为1的有多少个？

（2）求这些数之和。

解　（1）4与6的最小公倍数（$L.C.M$）为12。因此，用4除与用6除余数均为1的自然数可表为 $12k+1(k=0,1,2,\cdots)$。依题意，有

$1\leqslant 12k+1\leqslant 1000\quad \therefore\quad 0\leqslant 12k\leqslant 999,\ 0\leqslant k\leqslant 83.25$

从而，所求这个数有 84 个　　　　　　　　　（答）

（2）其和S为

$$S=\sum_{k=0}^{83}(12k+1)=12\sum_{k=0}^{83}k+\sum_{k=0}^{83}1$$

$$=12\cdot\frac{1}{2}\cdot 83\cdot 84+84$$

$$=41916$$　　　　　　　　　（答）

6　回答下列问题。

（1）设a、b为非负实数时，用$\max(a,b)$表示$|a-b|+a+b$，其中$\max(a,b)$表示a，b中大者。

（2）对两个整数m、n，存在面积是$\big||m|-|n|\big|+|m|+|n|$，周长为8的长方形，问有几个这种整数组$(m,\ n)$。

解　（1）$a\geqslant b$时，$|a-b|+a+b=a-b+a+b=2a$

$a<b$ 时，$|a-b|+a+b=b-a+a+b=2b$

$\therefore\quad |a-b|+a+b=2\max(a,b)$ （答）

（2）设 x、y 为长方形的边长，则

$$2(x+y)=8$$

$$xy=\Big|\,|m|-|n|\,\Big|+|m|+|n|=2\max(|m|,|n|)$$

$$\therefore\quad x+y=4,\ y=4-x$$

$$xy=x(4-x)=4-(x-2)^2$$

因 xy（x、y 不一定为整数）是满足 $0<xy\leqslant 4$ 的偶数，故

$$2\max(|m|,\ |n|)=2,\ 4$$

$$\therefore\quad \max(|m|,\ |n|)=1,\ 2$$

满足上述条件的（m，n）的组有 $8(1+2)=24$ 个 （答）

7 设 a、b 为自然数，$a\geqslant b$，$a+b$ 为 a、b 最大公约数的 5 倍，$6ab$ 为 a、b 最小公倍数的平方，求 $\dfrac{a}{b}$。

解 设 G 为自然数 a、b 的最大公约数，L 为其最小公倍数，则有如下的关系式成立。

$$a=a'G,\ b=b'G,\ L=a'b'G$$

〔a'、b' 为互质的数（公约数仅是 1）〕

由假定， $a+b=5G$

$$\therefore\quad a'G+b'G=5G$$

因 $G\geqslant 1$，故 $a'+b'=5$ ①

又，因 $6ab=L^2$，故 $6a'b'G^2=a'^2b'^2G^2$，由 $a'>0, b'>0$，

$$a'b'=6 \qquad ②$$

由①、②知，a'、b' 为二次方程 $t^2-5t+6=0$ 的根，因 $(t-2)(t-3)=0$，故 $t=2,3$。

因 $a \geqslant b$，故 $a'G \geqslant b'G$ $\therefore$ $a' \geqslant b'$

$$\therefore \quad a'=3, \ b'=2$$

从而 $$\frac{a}{b}=\frac{a'G}{b'G}=\frac{a'}{b'}=\frac{3}{2}$$ （答）

8 回答下列问题。

（1）n 为自然数时，$n(n+1)(2n+1)$ 恒为 6 的倍数，试述其理由；

（2）a、b、c、l、m、n 为自然数，l、m、n 中任何两个数都没有 1 以外的公约数，证明：若 $\frac{a}{l}+\frac{b}{m}+\frac{c}{n}$ 为自然数，则 $\frac{a}{l}$，$\frac{b}{m}$，$\frac{c}{n}$ 皆为自然数。

解 （1）因 $n(n+1)$ 为连续两个整数的乘积，故为偶数。
若 $n=3k$（k：自然数）型，则 n 为 3 的倍数；
若 $n=3k-1$ 型，则 $n+1$ 为 3 的倍数；
若 $n=3k-2$ 型，则 $2n+1=3(2k-1)$ 为 3 的倍数，
综上，$n(n+1)(2n+1)$ 为 6 的倍数。

（2）设 $\frac{a}{l}+\frac{b}{m}+\frac{c}{n}=N$：自然数

则 $$amn+bnl+clm=Nlmn$$
$$amn=l(Nmn-bn-cm)$$

l、m、n 为互质的数，因两边为自然数，故 a 可被 l 整除之。同理，b 被 m 整除之，c 被 n 整除之。因此，$\frac{a}{l}$、$\frac{b}{m}$、$\frac{c}{n}$ 都为自然数。

9 求满足方程组

$$\begin{cases} x+y+z=0 & ① \\ 9x^2-12xy+8y^2-4yz+z^2=17 & ② \end{cases}$$