同济大学数学辅导系列丛书

硕士研究生入学考试

数学复习指南

（第三版）

同济大学数学教研室 编

同济大学出版社

内 容 提 要

本书是为报考工学硕士研究生的考生编写的,全书由高等数学、线性代数和概率统计三部分组成。前两部分与由同济大学数学教研室编写、高等教育出版社出版的《高等数学》上、下册和《线性代数》教材紧密配合。书中对各部分的重要概念和基本理论(定理和公式)作了系统的概括,着重讨论基本题型与解题方法,在必要处对例题进行了详尽的分析和总结,以拓宽学生的思路,提高他们分析问题和解决问题的能力。

全书突出一个宗旨:力求使考生用较少的时间复习掌握好硕士研究生考试大纲所规定的内容,获得较多的解题方法,取得好成绩。本书从历届考题中筛选了近400道典型例题,选辑了100多道习题并附有习题简答,书末还收集了1993—1998年硕士入学考试数学试题的参考解答。

本书也可作为高等院校工科类师生的教学参考用书和供有关工程技术人员参考。

责任编辑:李炳钊

封面设计:陈益平

同济大学数学辅导系列丛书

硕士研究生入学考试

数 学 复 习 指 南

(第三版)

同济大学数学教研室编

同济大学出版社出版

(上海市四平路1239号 邮编200092)

新华书店上海发行所发行

望亭电厂印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 19 字数 550 千字

1996年8月第1版

1998年5月第3版 1998年5月第1次印刷

印数:1-7 000 定价:24.00元

ISBN 7-5608-1834-X/O·155

第一版前言

随着我国高等教育事业的迅速发展,越来越多的人接受了高等教育,他们中的许多人希望获得更高的学历,而我国四个现代化事业的蓬勃发展也需要更多更高层次的人才。正是因为个人的追求与国家的需要相一致,所以近年来报考硕士研究生的人数在逐年增加。对每一个报考研究生的人来讲,最关心的问题便是怎样按照考试大纲进行复习,提高复习效果,从而取得理想的考试成绩。要达到这一点,首先必须了解考试大纲中所规定的内容,分清哪些是主要的,哪些是次要的,这些内容在深度和广度上要求达到什么程度。其次要熟悉试卷中经常出现的题型,以及一些典型的甚至比较特殊的解题方法,这样,才能通过复习,深刻理解概念,牢固掌握解题方法,并在考试中付诸应用,从而取得好成绩。

我们认真总结了多年来所举办的考研复习辅导班积累的经验和资料,深入研究了历年来的考试题型,认真筛选收集的资料,共同努力,编写了这本书。它不仅对报考研究生的人员是一本有用的辅导材料,对正在本科阶段学习高等数学、线性代数和概率论的学生同样也是一本有价值的参考书。这不仅是因为本书的内容与所选的例题、习题与在普通高校中使用很广的由同济大学数学教研组所编写、高等教育出版社出版的《高等数学》和《线性代数》有很好的衔接,而且因为本书所总结的题型和解题方法对本科生学好高等数学和线性代数以及概率论也大有裨益。

本书的编写突出了一个宗旨:应试针对性强,力求使考生通过较短时间的复习,能达到考试大纲所规定的要求,并掌握一整套常用的基本解题方法。

本书具备以下几个特色:(1) 吸收了历届试卷中经常出现的

典型考题，并进行分析解答；(2) 许多章节对基本题型和解题方法作了总结归纳，便于学生总结提高；(3) 指出解题中容易出错的地方，了解命题意图或考生容易误入的“陷阱”；(4) 高等数学各章均包含一定数量的习题及简答，做好这些习题，有利于提高考生解题的基本功。此外，各部分最后都安排了一些综合练习题，并附有简答，旨在提高考生的综合解题能力；每章开头有复习要求、基本概念和理论，目的是帮助考生掌握好各章的内容。

本书的复习要求中对理论部分的要求分“了解”和“理解”两档，理解高于了解；对运算部分的要求分“会”、“掌握”和“熟练掌握”三档。

书末收集了由高等教育出版社出版的1993—1996年中华人民共和国国家教育委员会制定的全国工学、经济学硕士研究生入学考试数学考试大纲中的研究生数学入学考题参考答案。

钱仲范、徐建平、应明、李生文、何迎晖、范麟馨参加了本书的编写。钱仲范对全文进行了总纂。

在编写本书过程中，得到了同济大学应用数学系领导的大力协助，富有教学经验的骆承钦、郭镜明、邱伯驺和潘承毅四位教授仔细审阅了原稿，提出了许多宝贵的意见，同济大学出版社的李炳钊等同志在本书的出版过程中给予了极大的支持，使我们较为顺利地出版了这本书，在此一并表示诚挚的感谢。

由于编者水平有限，书中难免有错误和不妥之处，恳请同行批评指正。

编者

1996.6.16

第二版前言

本书是在同济大学数学教研室所举办的硕士研究生入学考试复习辅导班上已使用了十余年的复习资料的基础上编纂而成，去年8月正式出版。出版后，受到报考硕士研究生的考生和社会上读者的普遍欢迎，初版印行的5000册在短短的2个月中销售一空。从反馈的信息中获悉，本书除考生用作应试复习参考书外，工科类在读大学生将其作为数学的学习辅导材料，而教师则作为主要的教学参考用书之一。这既是对我们工作的肯定和鼓励，也是一种鞭策，促使我们对它进行一次全面修正，以便及时反映当前研究生最新考试题型信息，使之与最新考试大纲合拍，更好地适应和满足硕士研究生入学考试复习辅导的需要。

第二版主要作了如下修改：(1) 体现了最新硕士研究生入学考试大纲要求；(2) 根据新的考试大纲要求，增加了概率论中的条件分布与矩和数理统计内容，以及有关的例题和习题；(3) 调换并增加了若干例题和习题；(4) 录入了1997年的试题和答案。

本书的高等数学部分由徐建平、应明和李生文修改完成，线性代数部分由钱仲范修改完成，概率统计部分由何迎晖修改完成。

编者

1997.2　于上海

第三版前言

本书自1996年出版以来，深受广大读者的厚爱，受到报考硕士研究生和教师的普遍欢迎，到目前为止，已再版一次，这是对我们工作的肯定和鼓励，促使我们对它进一步充实、修改、完善，以便及时反映当前研究生最新考试题型的信息，更好地适应和满足硕士研究生入学考试复习辅导的需要。

第三版在保持第二版的特色基础上作了如下修改：

(1) 新版本按国际规定使用有关数学符号，如"x的正切"和"x的反正切"，分别用"$\tan x$"和"$\arctan x$"表示，而不再用"$\mathrm{tg}x$"和"$\mathrm{arctg}x$"；"x的余切"和"x的反余切"，分别用"$\cot x$"和"$\mathrm{arccot}\,x$"表示，而不再用"$\mathrm{ctg}x$"和"$\mathrm{arcctg}x$"；

(2) "线性代数"部分，对文字的叙述和解题的方法和证明，都作了较大的改动；

(3) 由于硕士研究生入学考试数学(三)的大纲中涉及到差分方程内容，本版特编写了差分方程简介一节，供这类考生参考；

(4) 录入了1998年数学(一)的试题和答案。

本版由徐建平统纂，在修订过程中，得到了同济大学应用数学系叶家琛教授的指导，特此表示感谢。

编者

1998年2月

目　录

附　　录

第一部分　高等数学

根据国家教委制定的1996年全国工学硕士研究生入学数学考试大纲，高等数学在数学(试卷一)中占60%，因此，对于每个考生来说，只有全面地、系统地复习高等数学，才能在数学考试中取得优异的成绩.

然而，高等数学章节多，内容繁杂，要在较短时间内进行全面复习，的确不容易做到. 为了对考生进行有力指导，我们在认真研究考试大纲、全面分析全国12年(1987—1998年)统考考题的基础上，根据编著者在辅导过程中积累的经验和资料，编写了这部分内容.

高等数学部分的主要特色是：精选和归纳了较多数量的典型例题，并作了详尽的分析和解答. 这些例题充分反映了最近几年来研究生考题的水平和动向，考生只要认真学习该部分内容，注意以微积分为主线，从根本上加强对基本概念和理论的理解，以利拓宽解题思路，通过例题和综合练习，可以提高分析问题、解决问题的能力和提高解题技巧.

第一章　函数与极限

函数是高等数学的主要研究对象，极限理论是微分学与积分学的基础，因此这一章的内容相当重要．虽然在历年的试卷中以求极限而单独命题的题型所占比例不大，但在以后各章的内容中都可以揉入极限问题．因此，本章在介绍求极限的方法时，没有拘泥于课程章节的顺序，而是把后几章中有关极限的问题也归纳其中．

一、复习与考试要求

(1) 了解函数的概念，其中包括反函数、复合函数、参数方程确定的函数与隐函数，并了解函数的单调性、有界性与周期性．

(2) 把握数列与函数的极限定义，其中包括函数的左、右极限的概念，掌握极限存在的判别准则与充要条件．

(3) 了解无穷小量的概念并掌握无穷小量的阶的比较．熟练掌握与运用两个重要极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}$与$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$．

(4) 把握函数的连续与间断的概念及间断点的分类以及连续函数在有界闭区间上的有界性与介值性．

二、基本概念与理论

1．函数

(1) 设 D 是一个数集，如果在某种对应法则下使得每个 $x\in D$，有唯一的数 y 与之对应，则称 y 是 x 的函数，记为 $y=f(x)$或

者 $y=y(x)$. D 称为函数 $y=f(x)$ 的定义域.

(2) 如果函数 $y=f(u)$ 的定义域是 D,函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_1,其值域为 W_1,且 $W_1\subset D$,则称 $y=f[\varphi(x)]$ 是定义在 D_1 上的由 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数.

(3) 幂函数 x^{μ}、指数函数 $a^x(a>0)$、对数函数 $\ln x$、三角函数 $\sin x,\cos x$ 及其反函数是基本初等函数. 由常数与基本初等函数的有限次四则运算或复合运算所构成的并可用一个解析式表达的函数是初等函数.

2. 极限

(1) 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a,即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,是指对任意给定的正数 ε,存在自然数 N,当 $n>N$ 时,就有 $|a_n-a|<\varepsilon$.

(2) 函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的近旁有定义,当 x 趋于 a 时,$f(x)$ 的极限为 A,即 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$,是指对任意给定的正数 ε,存在正数 δ,当 x 满足 $0<|x-a|<\delta$ 时,就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(3) 函数 $f(x)$ 在 $|x|>X_0$ 上有定义,当 x 趋于 ∞ 时,$f(x)$ 的极限为 A,即 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$,是指对任意给定的正数 ε,存在正数 X $(X>X_0)$,当 x 满足 $|x|>X$ 时,就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(4) 如果 $f(x)$ 在 $x=a$ 的左侧邻域内有定义,且当 x 从 a 的左侧趋于 a 时,$f(x)$ 的极限为 A,就称 A 是 $f(x)$ 在 $x=a$ 的左极限,记为

$$f(a-0)=A \qquad \text{或者} \lim_{x\to a-0}f(x)=A.$$

类似地有右极限 $f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$ 的概念.

下面给出的判别极限存在的充分条件是重要的.

(5) 单调有界准则:

① 若数列 $\{a_n\}$ 自某项起单调增(减),且 a_n 有上界(下界),则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在;

② 若函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的左(右)邻域内单调且有界,则 $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)$ ($\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$) 存在.

(6) 夹逼准则：

① 若自某项起有 $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$；

② 若在某个区间内有 $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$，且 $\lim g(x) = \lim h(x) = A$，则 $\lim f(x) = A$（这里 lim 可以是 $\lim\limits_{x\to a+0}$，$\lim\limits_{x\to a-0}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}$ 等等）.

(7) 极限存在的充要条件，经常用的有以下几个：

① $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = a$，当且仅当对每一子序列 a_{n_k}，有 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$；

② $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$，当且仅当 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A$，或当且仅当每一列 $x_n \to a$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$；

③ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$，当且仅当 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$，或当且仅当每一列 $x_n \to \infty$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

熟记以下极限是很有用的：

① $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$；　　② $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}\right)$；

③ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$（$a>0$ 是定数）；　　④ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$；

⑤ $\lim\limits_{x\to0+0} x^x = 1$；　　⑥ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$；

⑦ $\lim\limits_{x\to0+0} x\ln^p x = 0$；　　⑧ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln^p x}{x} = 0$.

(8) 若 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} f(x) = 0$，则称 $f(x)$ 是 $\underset{(x\to\infty)}{x\to a}$ 时的无穷小量；若 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} f(x) = \infty$，则称 $f(x)$ 是 $\underset{(x\to\infty)}{x\to a}$ 时的无穷大量.

若 $\lim\alpha = 0$，$\lim\beta = 0$，当 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha} = 0$ 时，则称 β 是 α 的高阶无穷小量，记为 $\beta = o(\alpha)$；当 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha} = c\,(c\neq0,\infty)$ 时，称 β 与 α 是同阶的无穷小量，可记为 $\beta = O(\alpha)$；特别 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha} = 1$，就称 β 与 α 是等价的无穷小量，常记为 $\beta \sim \alpha$.

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ 当且仅当 $f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$ 是 $x\to a$ 时的无穷小量.

等价无穷小量的代换性质：若 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且 $\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$ 有意义，则 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$.

因此，在极限运算中，记住以下等价关系是会带来方便的.

当 $x\to 0$ 时，

$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1$；

以及

$$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2};(1+x)^a-1\sim ax;a^x-1\sim x\ln a(a>0,\neq 1).$$

3. 函数的连续性

(1) 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续或 x_0 是 $f(x)$ 的连续点.

以下4款是等价的：

① $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续；

② $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 x 满足：$|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon;$$

③ 当增量 $\Delta x\to 0$ 时，增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 是无穷小量；

④ $f(x_0+0)=f(x_0-0)=f(x_0)$.

(2) 有界闭区间上的连续函数的性质：

① 有界性及最大最小值可达性：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则存在正数 M，使得 $|f(x)|\leqslant M$，$\forall x\in[a,b]$；且存在 $x_1,x_2\in[a,b]$，使得 $f(x_1)=\max\limits_{x\in[a,b]}f(x)$，$f(x_2)=\min\limits_{x\in[a,b]}f(x)$；

② 介值性：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$x_1,x_2\in[a,b]$，使得 $f(x_1)<f(x_2)$，则对每一个介于 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 之间的数 μ：$f(x_1)<\mu<f(x_2)$，必有介于 x_1 与 x_2 之间的点 ξ，使得