2003-2004考试新大纲

全国各类成人高等学校招生考试

专科起点升本科

顾 函 主编

高等数学(一)应试指导

知识点串讲

重点难点分析

强化练习

参考答案与解析

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

全国各类成人高等学校招生考试

——专科起点升本科

高等数学(一)应试指导

顾　函　主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(一)应试指导/顾亟主编. —北京:北京理工大学出版社,2002.12

全国各类成人高等学校招生考试. 专科起点升本科

ISBN 7-5640-0053-8

Ⅰ. 高… Ⅱ. 顾… Ⅲ. 高等数学-成人教育:高等教育-升学参考资料 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 075784 号

出版发行/ 北京理工大学出版社
社　　址/ 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编/ 100081
电　　话/ (010)68914775(办公室)　68912824(发行部)
网　　址/ http:// www. bitpress. com. cn
电子邮箱/ chiefedit@ bitpress. com. cn
经　　销/ 全国各地新华书店
印　　刷/ 北京国马印刷厂
装　　订/ 天津市武清区高村印装厂
开　　本/ 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张/ 21
字　　数/ 510 千字
版　　次/ 2002 年 12 月第 1 版　　2002 年 12 月第 1 次印刷
印　　数/ 1~6000 册　　责任校对/ 陈玉梅
定　　价/ 29.50 元　　责任印制/ 王　军

丛书编委会

出版说明

按照教育部关于从2003年起调整成人高校招生考试科目设置的有关要求,教育部高校学生司和教育部考试中心于2002年重新修订颁布了《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲——专科起点升本科》,新大纲在保持原大纲的基础上对部分内容进行了调整和更新。本套丛书是按照新大纲规定而编写,突出体现了着重考查学生的基本素质、注重考查考生对基础知识的把握和分析问题、解决问题的实际能力。

本套丛书根据多数考生的需求,先编排有6个科目:英语、政治、教育理论、大学语文、高等数学(一)、高等数学(二)。在编排上,充分考虑了成人高等教育的特点以及成人考生所受教育的学习背景不同,力求简明扼要,突出重点,内容完整,编排科学,是一本较好的应试辅导书。相信本丛书能给应试者提供直接实际的帮助。

本丛书具有以下特点:

紧扣新大纲 本丛书严格遵循新大纲编写,既保证了考生吸取知识的需要,又不为考生增添多余的负担,使考生对考试内容和要求有了准确的把握。

重点难点突出 本丛书根据成人学习的特点组织材料,根据各学科情况分别设置了知识点串讲、重点难点分析、学习方法指导、典型例题解析、强化练习与参考答案等栏目,使考生复习起来省时高效。每册书的重点部分都从不同角度反复讲解,以适应不同的出题形式。

应试性强 本丛书的强化练习及模拟试卷充分体现了新大纲的出题形式、命题思路和动向,有的放矢,切题率高。

权威性高 本丛书由诸多国家重点院校从事成人教学、专升本考前辅导及专升本考试阅卷的专家、命题研究人员和一线教师编写审定,他们对考试的考核点及重点难点有着较为准确的指导。

本套丛书在编写过程中,作者充分听取了新华书店销售人员的提议和广大读者的意见,为便于读者学习和检查,每册书后均附有全真模拟试卷两份及参考答案与解析,供应试者检测自己的学习成果。为了尽快与读者见面,在时间紧、任务重的情况下,难免出现错误,敬请各位读者谅解,希望提出宝贵意见。

目　　录

第一章　函数、极限和连续

考试内容与要求

一、函数

(一)知识范围

1. 函数的概念：函数的定义，函数的表示法，分段函数，隐函数.

2. 函数的简单性质：单调性，奇偶性，有界性，周期性.

3. 反函数：反函数的定义，反函数的图象.

4. 函数的四则运算与复合运算

5. 基本初等函数：幂函数，指数函数，对数函数，三角函数，反三角函数.

6. 初等函数

(二)要求

1. 理解函数的概念. 会求函数的定义域表达式及函数值. 会求分段函数的定义域、函数值，会作出简单的分段函数的图象.

2. 理解函数的单调性、奇偶性、有界性和周期性.

3. 了解函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 之间的关系(定义域、值域、图象)，会求单调函数的反函数.

4. 熟练掌握函数的四则运算与复合运算.

5. 掌握基本初等函数的性质及其图象.

6. 了解初等函数的概念.

7. 会建立简单实际问题的函数关系式.

二、极限

(一)知识范围

1. 数列极限的概念：数列，数列极限的定义.

2. 数列极限的性质：惟一性，有界性，四则运算法则，夹逼定理，单调有界数列，极限存在定理.

3. 函数极限的概念：函数在一点处极限的定义，左、右极限及其与极限的关系；x 趋于无穷($x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$)时函数的极限，函数极限的几何意义.

4. 函数极限的性质：

四则运算法则，惟一性，夹逼定理.

5. 无穷小量与无穷大量：

无穷小量与无穷大量的定义，无穷小量与无穷大量的关系，无穷小量的性质，无穷小量的阶.

6. 两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$$

(二)要求

1. 理解极限的概念(对极限定义中“$\varepsilon—N$”、“$\varepsilon—\delta$”,“$\varepsilon—M$”等形式的描述不作要求),能根据极限概念分析函数的变化趋势. 会求函数在一点处的左极限与右极限,了解函数在一点处极限存在的充分必要条件.

2. 了解极限的有关性质,掌握极限的四则运算.

3. 理解无穷小量、无穷大量的概念,掌握无穷小量的性质、无穷小量与无穷大量的关系.会进行无穷小量阶的比较(高阶、低阶、同阶和等阶). 会运用等阶无穷小量代换求极限.

4. 熟练掌握用两个重要极限求极限的方法.

三、连续

(一)知识范围

1. 函数连续的概念: 函数在一点处连续的定义,左连续与右连续,函数在一点处连续的充分必要条件,函数的间断点及其分类.

2. 函数在一点处连续的性质: 连续函数的四则运算,复合函数的连续性,反函数的连续性.

3. 闭区间上连续函数的性质: 有界性定理,最大值与最小值定理,介值定理(包括零点定理).

4. 初等函数的连续性

(二)要求

1. 理解函数在一点处连续与间断的概念,掌握函数(含分段函数)在一点的连续性的方法,理解函数在一点处连续与极限存在的关系.

2. 会求函数的间断点及确定其类型.

3. 掌握在闭区间上连续函数的性质,会运用介值定理推证一些简单命题.

4. 理解初等函数在其定义区间上的连续性,会利用连续性求极限.

§1.1 函　　数

知识点串讲

一、函数的概念

(一)函数的定义

定义: 设在某个变化过程中有两个变量 x 和 y,变量 y 随变量 x 而变化,如果变量 x 在实数集合 D 中取某一数值时,变量 y 依照某一规律 f 总有一个确定的数值与之对应,则称变量 y

为变量 x 的函数,记为

$$y=f(x)$$

其中 x 叫自变量,y 叫因变量或函数.

在函数记号 $y=f(x)$ 中,f 是英文"function"(即"函数")的第一个字母,他代表 y 与 x 之间的对应关系,$f(x)$ 是一个完整的记号,切不可误认为是 f 乘以 x. $f(x)$ 又是一个抽象的记号,他可以代表 x 的任何函数. 至于他究竟代表什么样的函数关系,那就要看具体情况而定了.

如果同时考虑几个不同的函数时,应分别用不同的符号如 $\varphi(x)$,$g(x)$,$f(x)$ 等来表示他们,而不能用同一个符号来表示这些不同的函数.

在上述函数的定义中,很重要的一点是:自变量 x 在 D 上取每一数值时,函数 y 都有一个确定的数值与之对应,此时我们称函数是有定义的.(如果对应于 D 中的 x 的每个值,y 的值不止一个,在这样的情况下,我们称函数是多值的. 一般高等数学中说到"函数"一词均指单值函数,多值函数不在我们讨论的范围. 多值函数通常都拆成几个单值函数分别研究.)

定义域:使函数 f 有定义的自变量的取值范围 D,称为函数的定义域,记为 $D(f)$.

值域:函数 y 的取值范围,称为函数的值域,记为 $Z(f)$.

正确理解函数定义应当注意以下几点:

(1)定义域和对应规则是确定两个变量是否构成函数关系的两个要素,缺一不可. 所以如果两个函数的定义域和对应规则完全相同,那么,它们就是相同的函数;如果定义域和对应规则有一个不同,它们就是不同的函数.

(2)在函数的定义中,并没有要求当自变量变化时函数一定要变,而是要求 x 取定一个值时,y 有一个确定的对应值. 因此,例如 $f(x)=3$ 也表示一个函数,这函数的定义域是 $(-\infty,+\infty)$,x 无论取什么实数值时,对应的函数值都等于3.

(3)函数 $y=f(x)$ 中的"f"表示函数关系中的对应规则,而 $f(x)$ 就是指这个规则作用在 x 上. 如 $y=f(x)=2x^2+5$,这里 $f(x)$ 表示把 x 代入表达式 $2(\quad)^2+5$ 的括号( )中进行运算,变量 x 与 y 之间的对应规则就是由这些运算确定的,即"f"表示这样的对应规则:与 x 对应的函数值,是由括号内的 x 值平方后乘以2再加上5而得到的.

当自变量 x 取某一个定值 a 时,函数 $y=f(x)$ 的对应值记为 $f(a)$,有时也记为 $y|_{x=a}$.

(二)函数的表示法

一个函数可以写成公式,这就是函数的公式表示法;一个函数也可以画成图形或列成表格,即用图形法和表格法来表示. 在高等数学的讨论中,主要是公式法,有时为了直观起见,也要考察函数的图形.

(三)分段函数

对于定义域内自变量 x 的不同值,不能用一个统一的公式表示,而要用两个或两个以上的公式来表示,这类函数称为"分段函数". 例如 $y=|x|$,就是一个分段函数,因为它可以写成:

$$y=|x|=\begin{cases}-x, & x<0\\ x & x\geqslant 0\end{cases}$$

当 $x<0$ 时,公式为 $y=-x$;当 $x\geqslant 0$ 时,用公式 $y=x$ 来表示,这个函数的定义域是 $(-\infty,+\infty)$.

关于分段函数要注意以下几点:

(1)分段函数是用几个公式合起来表示一个函数,而不是表示几个函数.

(2)因为函数式子是分段表示的,所以各段的定义域必须明确标出.

(3)对分段函数求函数值时,不同点的函数值应代入相应范围的公式中去求.

(4)分段函数的定义域是各项定义域的并集.

(四)隐函数

通常表示函数时,有两种不同的形式,一种是把函数 y 直接表成自变量 x 的函数 $y=f(x)$,这叫函数的显式. 还有一种是函数 y 与自变量 x 的数量关系由方程 $F(x,y)=0$ 来确定,即 y 与 x 的函数关系隐含在方程中,我们把这种未解出因变量的方程 $F(x,y)=0$ 所确定的 x 与 y 之间的函数关系叫做隐函数,其中,一般认为自变量是 x,函数是 y. 例如,$x+y-1=0$,$e^y=xy$ 等都分别表示一个隐函数.

二、函数的简单性质

(一)单调性

定义:设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义,如果对于 (a,b) 内的任意两点 x_1 和 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是单调增加的;如果当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是严格单调增加的;

如果对于 (a,b) 内的任意两点 x_1 和 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是单调减少的;如果当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是严格单调减少的.

由定义可知,在 (a,b) 内严格单调增加的函数 $f(x)$,其图形是沿 x 轴的正向逐渐上升的;严格单调减少的函数 $f(x)$,其图形是沿 x 轴的正向逐渐下降的.

需要指出的是:单调性是对一个区间而不是对一个点来讲的.

(二)奇偶性

定义:如果 $f(x)$ 定义域关于原点对称,且满足关系式:$f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数.

如果 $f(x)$ 定义域关于原点对称,且满足关系式:$f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图形对称于 y 轴,奇函数的图形对称于坐标原点.

需要指出的是,很多函数是没有奇偶性的,切不可认为任何函数都具有奇偶性. 例如 $y=x^2+\sin x$ 就没有奇偶性,它既不是奇函数,也不是偶函数.

(三)周期性

定义:对于函数 $y=f(x)$,如果存在一个不等于 0 的常数 l,使得关系式 $f(x+l)=f(x)$ 对于 $(-\infty,+\infty)$ 中任何 x 的值都成立,则称 $f(x)$ 是以 l 为周期的周期函数. 此时 l 的整数倍也是 $f(x)$ 的周期. 通常称满足这个等式的最小正数 l 为函数的周期.

例如,$\sin x$ 和 $\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数.

$\tan x$ 和 $\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

通常我们所说周期函数的周期是指最小正周期. 但是并非每一个周期函数都有最小正周期. 例如 $f(x)=C$(C 为常数),因为任何实数 $a>0$ 都是它的周期,所以 $f(x)$ 没有最小正周期.

周期函数的图象按自变量 x 取值间隔 l 重复出现,在每一周期内图形相同.

(四)有界性

定义:设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义,如果存在一个正数 M,使得对于 (a,b) 内的任意一点 x,总有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是有界的,否则,称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是无

界的.

函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内有界的几何意义是：曲线 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内被限制在 $y=-M$ 和 $y=M$ 两条水平直线之间的范围内(图 1-1).

对于函数的有界性,要注意以下两点：

(1)如果一个函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内有界,他的界并不是惟一的. 例如 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的,有 $|\sin x|\leqslant 1$,但是我们也可以取 $M=2$ 作为它的界,即 $|\sin x|\leqslant 2$. 大于 1 的任何正数都可以作为 $y=\sin x$ 的界.

(2)函数 $y=f(x)$ 有界与否,是与所在区间紧密联系在一起的. 例如 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 内是有界的,但在区间 $(0,1)$ 内则无界;函数 $y=x^3+1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界,而在任何有限区间内都是有界的.

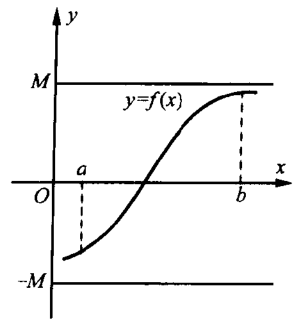

图 1-1

关于函数的有界性,还有一种单方向有界的概念：

设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义,如果存在一个数 B,使得对于 (a,b) 内的任意一点 x,总有 $f(x)\leqslant B$,则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是有上界的;如果存在一个数 A,使得对于 (a,b) 内的任意一点 x,总有 $f(x)\geqslant A$,则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是有下界的.

三、反函数

(一)反函数的定义

定义：设已知函数为 $y=f(x)$ 如果由此解出的 $x=\varphi(y)$ 是一个函数,则称它为 $f(x)$ 的反函数,记为 $x=f^{-1}(y)$,并称 $f(x)$ 为直接函数.

习惯上,用字母 x 表示自变量,而用字母 y 表示函数,则反函数就变为 $y=\varphi(x)$. 记为

$$y=f^{-1}(x)$$

直接函数和反函数互为反函数. 严格单调的函数,必定存在反函数.

$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域和值域的关系是：$D(f^{-1})=Z(f)$;$Z(f^{-1})=D(f)$.

$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.

四、基本初等函数

基本初等函数是下列六类函数的总称：

常数(常值函数)　$y=C$

幂函数　$y=x^{\mu}$　(μ 为实数)

指数函数　$y=a^x$　$(a>0,a\neq 1)$

对数函数　$y=\log_a x$　$(a>0,a\neq 1)$

三角函数　$y=\sin x,y=\cos x$

$y=\tan x,y=\cot x$

$y=\sec x,y=\csc x$

反三角函数　$y=\arcsin x,y=\arccos x$

$y=\arctan x,y=\operatorname{arccot} x$

$y=\operatorname{arcsec} x,y=\operatorname{arccsc} x$

(一)常数　$y=C$

它的定义域是$(-\infty,+\infty)$,图形是一条平行于x轴的直线,显然它是偶函数(见图1-2).

(二)幂函数　$y=x^{\mu}$(μ为实数)

它的定义域随μ值的不同而不同,但不管μ的值是多少,它在$(0,+\infty)$内总是有定义的.

当$\mu>0$时,不论μ为何值,它的图形都通过原点(0,0)和点(1,1)在$(0,+\infty)$内严格单调增加且无界(图1-3).

当$\mu<0$时,它的图形,在$(0,+\infty)$内严格单调减少、无界,且都通过点(1,1).

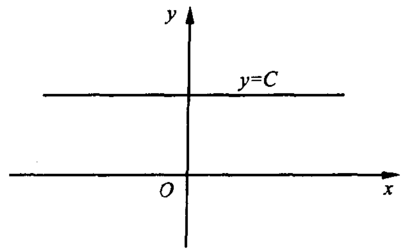

图1-2

曲线以x轴和y轴为渐近线(图1-4).

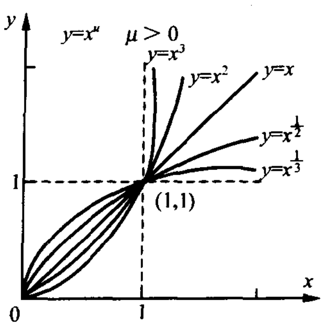

图1-3

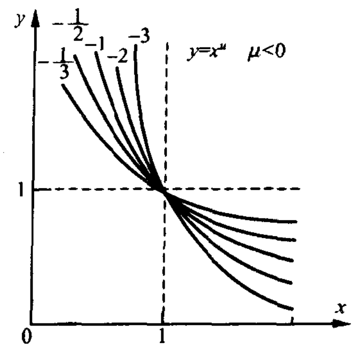

图1-4

(三)指数函数$y=a^x$($a>0,a\neq1$)

定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$(0,+\infty)$.图象均过点(0,1).当$a>1$时,$y=a^x$是单调增函数;$0<a<1$时,$y=a^x$是单调减函数(图1-5).

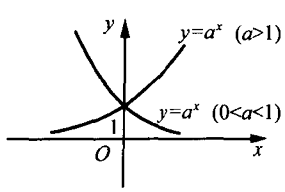

图1-5

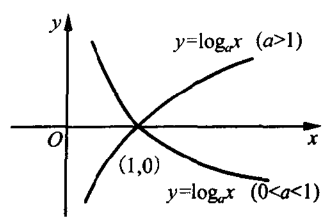

图1-6

(四)对数函数　$y=\log_a x$　($a>0,a\neq1$)

$y=\log_a x$是$y=a^x$的反函数,定义域是$(0,+\infty)$,值域是$(-\infty,+\infty)$.图象过点(1,0).当$a>1$时是单调增函数;当$0<a<1$时是单调减函数(图1-6).

(五)三角函数

正弦函数$y=\sin x$,定义域$(-\infty,+\infty)$,值域$[-1,1]$.是周期函数,周期$T=2\pi$,是奇函数,是有界函数,即$|\sin x|\leqslant1$(图1-7).在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$单调增.

余弦函数 $y=\cos x$，定义域$(-\infty,+\infty)$，值域$[-1,1]$. 是周期函数，周期 $T=2\pi$，是偶函数，是有界函数，$|\cos x|\leqslant 1$（图 1－8）在$(0,\pi)$单调减.

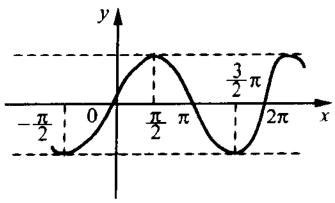

图 1－7

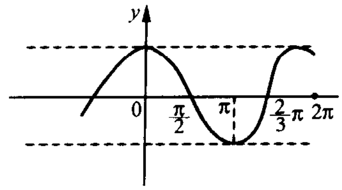

图 1－8

正切函数 $y=\tan x$，定义域为 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2\cdots)$的实数 x，是周期函数，$T=\pi$，是奇函数（图 1－9），在$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$单调增.

余切函数 $y=\cot x$，定义域为 $x\neq k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$的实数 x，是周期函数，$T=\pi$，是奇函数（见图 1－10），在$(0,\pi)$单调减.

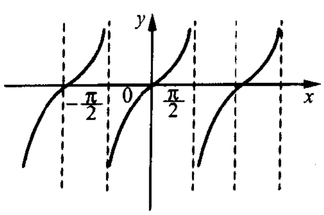

图 1－9

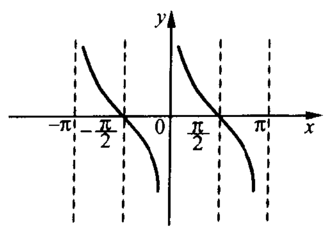

图 1－10

正割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$；余割函数 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$. 其定义域与性质可参照 $\cos x,\sin x$ 讨论.

（六）反三角函数

由于三角函数是周期函数，对于值域内的每个 y 值，都有无穷多个 x 值与之对应，因此我们在三角函数的单调区间上来建立反三角函数，称为反三角函数的主值.

反正弦函数 $y=\arcsin x$ 是 $y=\sin x$ 在$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$上的反函数，其定义域为$[-1,1]$，值域是$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，是单调增函数（图 1－11）.

反余弦函数 $y=\arccos x$ 是 $y=\cos x$ 在$[0,\pi]$上的反函数，其定义域为$[-1,1]$，值域为$[0,\pi]$，是单调减函数（图 1－12）.

反正切函数 $y=\arctan x$ 是 $y=\tan x$ 在$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$上的反函数，其定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，是单调增函数（图 1－13）.

反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$ 是 $y=\cot x$ 在$(0,\pi)$的反函数，其定义域是$(-\infty,+\infty)$，值域为

$(0,\pi)$，是单调函数(图 1－14).

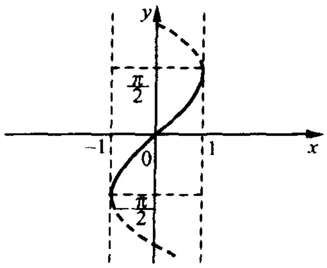

图 1－11

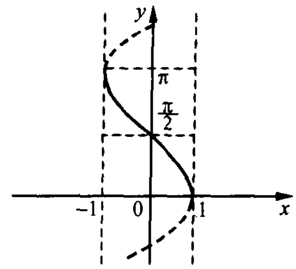

图 1－12

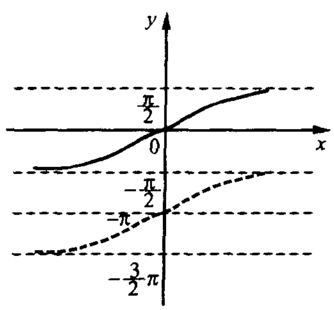

图 1－13

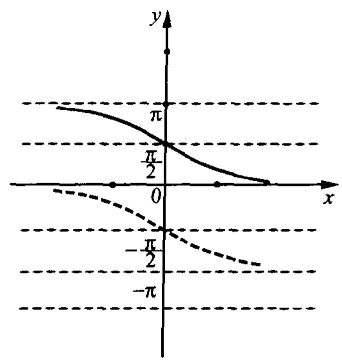

图 1－14

关于 $y=\operatorname{arcsec}x$ 及 $y=\operatorname{arccsc}x$ 一般不再讨论.

五、复合函数

定义：设 y 是 u 的函数： $y=f(u)$

而 u 又是 x 的函数： $u=\varphi(x)$

又设 X 表示函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域的一个子集. 如果对于在 X 上的每一个取值 x 所对应的 u 值，函数 $y=f(u)$ 有定义，则 y 通过 $u=\varphi(x)$ 而成为 x 的函数，记为

$$y=f[\varphi(x)]$$

这个函数叫做由函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，它的定义域为 X，u 叫做中间变量.

这里要注意：不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的，例如 $y=\arcsin u$ 及 $u=x^2+3$ 就不能复合成一个复合函数，因为对于 $u=x^2+3$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内的任何值 x 所对应的 u 值(都大于或等于 3)，$y=\arcsin u$ 都没有定义. 也就是说 $y=\arcsin(x^2+3)$ 对于任何值 x 都没有定义，因为 $y=\arcsin u$ 的定义域为 $[-1,1]$，而对于任何值 x，x^2+3 都大于或等于 3.

六、初等函数

所谓初等函数是指由基本初等函数经过有限次的四则运算(加、减、乘、除)和复合所构成的，并且能够用一个数学式子表示的函数.

例如，$y=\lg(1+\sqrt{1+x^2})$

$y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}}$

$y=\cos(2x+1)$

$y=\sin^2(\ln x)$等都是初等函数.

重点难点分析

一、求函数的定义域

当函数由一个表达式表示而又未特别指出其定义域时，其定义域就是使表达式有意义的一切实数. 对于实际问题的函数，不能直接从公式求它的定义域，而要从对实际问题的分析中求它的定义域.

求函数的定义域应注意以下几点：

(1)分式的分母不能为0；

(2)偶次根的根底式应为非负数；

(3)对数号下的式子应为正数；

(4)正切、余切符号下的式子的值分别不能等于$k\pi+\frac{\pi}{2}, k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$；

(5)反正弦、反余弦符号下的式子的绝对值不能大于1；

(6)如果函数式由若干项组成，其定义域应是各项定义域的公共部分.

例1 求函数$y=\lg\frac{x}{x-2}+\arcsin\frac{3x-1}{5}$的定义域.

解 设$y_1=\lg\frac{x}{x-2}, y_2=\arcsin\frac{3x-1}{5}$

对于y_1，要求$\frac{x}{x-2}>0$，解得

(1) $x>0$且$x-2>0$ 所以$x>2$

或 (2) $x<0$且$x-2<0$ 所以$x<0$

因此y_1的定义域为$x>2$或$x<0$

对于y_2，由反正弦函数的定义知，应有$\left|\frac{3x-1}{5}\right|\leqslant1$，即$-1\leqslant\frac{3x-1}{5}\leqslant1$

所以 $-5\leqslant3x-1\leqslant5$

解之得 $-\frac{4}{3}\leqslant x\leqslant2$

因此y_2的定义域为$\left[-\frac{4}{3},2\right]$.

由于$y=y_1+y_2$，所以函数y的定义域是上述两个定义域的公共部分，即$-\frac{4}{3}\leqslant x<0$.

所以函数的定义域为$[-\frac{4}{3},0)$.

例2 求函数$y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$的定义域.

解 因为函数式有两项,所以其定义域是使两项都有定义的x的取值范围.

对于第一项$\sqrt{\sin x}$,因为负数没有平方根,所以应有$\sin x\geqslant 0$,首先知道在$[0,\pi]$上,$\sin x\geqslant 0$,由于$\sin x$是以2π为周期的周期函数,所以在$[2k\pi,(2k+1)\pi]$($k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$)上,有$\sin x\geqslant 0$.

对第二项$\sqrt{16-x^2}$,同理应有$16-x^2\geqslant 0$,即:$x^2\leqslant 16$,即$-4\leqslant x\leqslant 4$.

则函数的定义域是上述两个定义域的公共部分,所以定义域为$[-4,-\pi]$,$[0,\pi]$.

用不等式表示是:$-4\leqslant x\leqslant -\pi$,$0\leqslant x\leqslant \pi$.

例3 已知函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & x<0\\ x & 0<x<1\\ 2 & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$ 求其定义域.

解 分段函数不是初等函数,求其定义域不用解不等式,只须按已知逐段审定,且是各段定义域的并集.

因为函数在$x=0$时无定义,所以它的定义域为$(-\infty,0)$,$(0,2]$. 用不等式表示是:$-\infty<x<0$, $0<x\leqslant 2$.

例4 设函数$f(x)$的定义域是$[0,1]$,则$f(\cos x)$的定义域是________.

解 由$0\leqslant\cos x\leqslant 1$ 知x应在Ⅰ、Ⅳ象限

所以 $D(f)=\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},\ 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$($k=0,\pm 1,\cdots$).

$f(x)$的定义域是$[0,1]$的含义是$0\leqslant x\leqslant 1$,对$f(\cos x)$,在法则f下应有$0\leqslant\cos x\leqslant 1$,故有如上结果.

例5 设$f(u)=\sqrt{4-u^2}$,$u=\varphi(x)=x+1$,求复合函数$f[\varphi(x)]$的定义域.

解 易知$f(u)$的定义域为$|u|\leqslant 2$,即$[-2,2]$;$\varphi(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$. 由$|u|=|x+1|\leqslant 2$,得$f[\varphi(x)]$的定义域为$[-3,1]$.

一般地,$f[\varphi(x)]$的定义域应是函数$\varphi(x)$定义域的一个子集.

例6 设$y=f(x)$的定义域为$(0,4]$,求下列各函数的定义域:

(1) $f(x^2)$; (2) $f(\lg x)$; (3) $f(x+a)$ $(a>0)$.

解 (1)由$0<x^2\leqslant 4$,得$f(x^2)$的定义域为$[-2,0]$,$(0,2]$.

(2) 由$0<\lg x\leqslant 4$,得$f(\lg x)$的定义域为$(1,10\,000]$.

(3) 由$0<x+a\leqslant 4$得$f(x+a)$的定义域$(-a,4-a]$.

二、求函数的表达式

1. 已知函数$f(x)$和$g(x)$的表达式,求函数$f[g(x)]$的表达式

这里的问题相当于:已知函数$y=f(u)$及函数$u=g(x)$,求复合函数$f[g(x)]$. 根据复合函数的概念或函数记号的意义,用$g(x)$替换$f(x)$中的x,即可得到$f[g(x)]$的表达式.

例7 设$f(x)=x^2$,$\varphi(x)=2^x$,求:$f[f(x)]$,$f[\varphi(x)]$,$f[\varphi(0)]$,$\varphi[f(x)]$,$\varphi[\varphi(x)]$.