

公用控制理论 与技术

王启义 阎喜仁 吴玉国 编著

机械工业出版社

公用控制理论与技术

王启义 阎喜仁 吴玉国 编著



机械工业出版社

本书主要介绍了公用控制原理、周期序列、移位寄存器序列、公用控制方案、公用控制件及其控制系统设计等内容,系统地总结了国内外对公用控制理论与技术研究的先进成果,收集了大量技术资料,具有较高的理论与实用价值。

本书可供从事控制理论研究的工程技术人员及工科院校有关师生参考。

图书在版编目(CIP)数据

公用控制理论与技术/王启义等编著. —北京:机械工业出版社,1996
ISBN 7-111-04973-X

I. 公… II. 王… III. 控制论,公用-理论-技术 IV. TP13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第 18262 号

出 版 人:马九荣(北京市百万庄南街 1 号 邮政编码 100037)

责任编辑:李骏带 版式设计:王 颖 责任校对:肖新民

封面设计:郭景云 责任印制:卢子祥

三河市宏达印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

1996 年 6 月第 1 版·第 1 次印刷

787mm×1092mm^{1/32}·16.25 印张·393 千字

0 001—1 000 册

定价:20.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

前 言

随着现代科学技术的飞速发展,机电设备中需要集中控制的信息量急剧增加。这时,如何使控制系统相应地减小体积,简化结构以及提高工作可靠性等,一直是人们致力于研究解决的难题。

公用控制(又称共态控制)技术应归属于一种新的控制思想,即所有被控多态元件公用一组控制点,或者说用一组公用控制点或一个公用控制件,对若干多态元件进行集中组合控制。使用最少数量的公用控制点或控制件,就能够实现所需控制的各种状态变换,即用最少的输入量获得最大的输出信息量。因此,这种公用控制系统具有体积最小、结构最简及工作可靠等优点,适用于机械、液压、气动、电器电(光)子、数字电路等若干多态件的集中组合控制,特别适用于现代控制系统的应用。

公用控制技术实质上包含两大方面的内容,其一是公用控制理论,并据此针对不同多态件数量及控制位数,搜寻公用控制方案。这在本书的研究工作中已经基本解决,给出了搜寻方法和优化方法,并给出若干二态件及三态件的公用控制方案表。其二是公用控制技术的应用,公用控制技术已在机械、液压及气动公用控制系统,机电跟踪控制系统,数控机床及机器人位置检测中的编码盘测量控制系统中得到应用研究与开发。由于公用控制技术的独特优点,在计算机软硬件中应用,会节省大量存储空间和逻辑门电路,还会进一步在数码显示、密码技术、点阵式文字显示或打印,以及光电变换系统等方面发挥出更具特色的作用。

本书包括绪论、公用控制原理、周期序列、移位寄存器序列、公用控制方案、公用控制件及其控制系统设计等6章正文,附录有本原多项式和公用控制方案表,方案表中给出常用二态件和三态件公用控制方案。

王启义教授早在70年代提出公用控制概念之后,带领一批人多年来致力于公用控制技术研究工作,取得诸多重要成果,为公用控制理论的不完善,为公用控制技术的实用化以及应用领域的进一步开拓奠定了基础。这项研究工作得到国家自然科学基金资助。参加这项研究工作的还有薛嘉庆、吴玉国、周喜忠、杨英、郑书东、孙军、阎喜仁、邢伟、王伟等同志。本书经多年酝酿准备才写成,初稿由王启义、吴玉国、阎喜仁参加撰写,由王启义统一定稿。

由于成稿时间仓促,水平所限,书中会有错误和欠妥之处,敬请读者批评指正。

编 者

1995年2月

575267/12

目 录

前言

1 绪论	1	4.3 线性移位寄存器序列	54
1.1 概述	1	4.3.1 线性移位寄存器序列性质	54
1.2 公用控制件与普通控制件	1	4.3.2 线性移位寄存器综合算法	55
1.3 公用控制理论研究综述	3	4.4 m 序列	57
2 公用控制原理	5	4.4.1 m 序列性质	57
2.1 公用控制系统举例	5	4.4.2 m 序列构造算法	59
2.2 公用控制原理	6	4.5 非线性移位寄存器序列	60
3 周期序列	8	4.5.1 非奇异移位寄存器性质	60
3.1 二元周期序列	8	4.5.2 非线性移位寄存器综合算法	61
3.1.1 本原周期序列	8	4.6 M 序列	68
3.1.2 自互反周期序列	12	4.6.1 M 序列的性质及计数	68
3.1.3 自互补周期序列	17	4.6.2 M 序列和反馈函数构造方法	68
3.1.4 自互反补周期序列	21	5 公用控制方案	73
3.1.5 自互反且自互补周期序列	24	5.1 概述	73
3.1.6 等价序列及其排除	27	5.2 控制端位置组合	74
3.1.7 特殊序列标识的计算机算法	30	5.2.1 控制端位置组合表示法	74
3.1.8 长周期序列渐近计数	30	5.2.2 控制端位置角数区间与等价位 置组合排除	75
3.1.9 序列组成分析示例	32	5.2.3 控制端独立位置组合构造算法	76
3.1.10 状态变换次数	33	5.2.4 位置组合计数	77
3.2 三元周期序列	35	5.2.5 完全对称和不完全对称控制端 位置组合	78
3.2.1 本原周期序列	35	5.3 可用周期序列	80
3.2.2 自互反周期序列	39	5.3.1 可用二元周期序列	80
3.2.3 自互补周期序列	39	5.3.2 可用三元周期序列	82
3.2.4 自互反补周期序列	41	5.3.3 含子周期序列	85
3.2.5 自互反且自互补周期序列	42	5.4 序列可用性判别法	85
3.2.6 等价序列及其排除	43	5.4.1 状态判别法	85
3.2.7 长周期序列渐近计数	44	5.4.2 状态剔除判别法	86
3.2.8 序列组成分析示例	45	5.4.3 降维判别法	91
3.2.9 状态变换次数	46	5.4.4 最长游程判别法	94
4 移位寄存器序列	49	5.5 公用控制方案计算机搜寻技术	96
4.1 基本概念	49	5.5.1 公用控制方案搜寻框图	97
4.2 de Bruijn-Good 图	51	5.5.2 公用控制方案搜寻程序及编程 语言	97
4.2.1 预备知识	51	5.5.3 公用控制方案计算结果	102
4.2.2 G_2 图构造	52	5.5.4 公用控制 Gray 码计算机搜寻技	
4.2.3 G_2 图产生周期序列方法	52		
4.2.4 de Bruijn-Good 图计数	54		

术	103	6.4.3 单向机电跟踪控制系统设计	130
5.5.5 给定组合状态公用控制方案计 算机搜寻技术	107	6.4.4 双向机电跟踪控制系统设计	133
5.6 公用控制方案直接生成法	111	6.4.5 机电跟踪控制公用转阀变换系 统设计	135
5.6.1 位置角倍数与序列周期互素情况	111	6.5 编码盘测量系统	138
5.6.2 位置角倍数与序列周期有公约 数情况	113	6.5.1 编码盘测量原理	138
5.6.3 直接生成法算例	114	6.5.2 公用码道编码盘方案设计	139
5.7 等价方案生成方法	115	6.6 移位法数字显示系统	140
5.7.1 互反方案生成方法	115	6.6.1 数字显示传统方法	140
5.7.2 互补方案生成方法	116	6.6.2 数字显示移位法	141
5.7.3 互反补方案生成方法	116	6.7 移位法点阵字符显示系统	143
6 公用控制件及其控制系统设计	118	6.7.1 点阵字符显示原理	143
6.1 概述	118	6.7.2 点阵字符显示移位法	144
6.2 公用凸轮及其控制系统设计	119	6.8 特殊公用控制件设计	144
6.3 转阀及其控制系统设计	121	6.8.1 混合态公用控制件设计	144
6.3.1 转阀控制系统工作原理	122	6.8.2 具有 Gray 码特点的公用控制 件设计	147
6.3.2 普通转阀方案设计	122	6.8.3 自互补方案公用控制件设计	149
6.3.3 二位公用转阀方案设计	123	6.9 公用控制件 CAD 程序框图	150
6.3.4 三位公用转阀方案设计	125	附录 I 本原多项式	153
6.4 机电跟踪控制系统设计	126	附录 II 公用控制方案表	156
6.4.1 机电跟踪控制系统工作原理	126	I-1 二态件公用控制方案表	156
6.4.2 公用组合开关片形方案设计	130	I-2 三态件公用控制方案表	232
		参考文献	251

1 绪 论

1.1 概述

在机电设备中,经常见到具有两个或三个工作位置或状态的多位或多态元件。如滑移齿轮、离合器、定位油缸、气缸及电磁铁等具有两个或三个变换位置;再如编码盘及电器、光电子元件的每个输出端具有高低电(光)位两个状态。由这样若干个多位或多态(以下统称多态)元件构成的控制系统或装置,通过各元件不同状态的组合,即能实现所需要的控制功能。在这种包含若干个多态件的控制系统中,多态件是执行件或称被控件,对这些被控件起控制作用的元件称为控制件。在旧式机电设备中,一般是由多个控制件分别对各自的被控件进行控制,这种分散控制方式存在结构复杂、体积庞大、控制麻烦、费时、效率低下和工作可靠性差等问题,尤其是被控件数日较多时问题更为突出。这也正是当前现代机电设备中集成控制信息量越来越大,却又要求简化结构、缩小体积、提高工作可靠性等所面临的一大难题。

对于控制系统中若干多态件的组合状态变换,可抽象为以下数学问题。若多态件的不同状态用数字 $0, 1, \dots$ 表示,则 Z 个多态件的组合状态的输出就是由这 Z 个数字组成的状态数字,它代表了要实现的一种变换状态或控制功能。为了实现所需要的各种变换状态或控制功能,可采用分散控制或者集中控制方式。为了用最少的元件或控制点来实现所需控制的各种变换状态,即用最少的输入量获得最大的输出量,可采用集中公用控制方式,用一个控制件上最少的一组公用控制点,对若干个多态件进行集中控制。这种控制系统称为公用组合控制系统或公用控制系统,该控制件称为公用控制件,它是公用控制系统的核心元件。这种公用控制系统具有体积最小、结构最简、控制方便、工作可靠等优点,适用于机械、液压、气动、电器电(光)子、数字电路等若干多态件的集中组合控制。

1.2 公用控制件与普通控制件

现以简单直观的凸轮控制系统为例,说明公用控制件与普通控制件的区别。

图1-1a所示为4级变速系统,采用两个双联滑移齿轮实现,即变速级数 $n=2 \times 2=4$ 。由图1-1b转速图可列出滑移齿轮A和B的位置表,见表1-1。由表可见,只要使齿轮A,B得到这4种组合状态,就能完成4级变速。为比较起见,可采用三种凸轮控制件实现上述要求。

(1)多曲线凸轮控制件

图1-2a所示,凸轮上两条曲线,通过滚子 a, b 使两个摆杆 M, N 分别控制滑移齿轮A和B。当转动凸轮到各变速位置时,由于滚子 a, b 在凸轮曲线上定位点的状态(定位半径的大小)不同,可使齿轮到达不同位置。如 a 定位半径为大半径 r_1 时,可使A到右位;为小半径 r_0 时,A到左位。据摆杆结构类型,可将滑移齿轮的位置转换为滚子定位点的定位半径状态。现设1,0分别表示大半径 r_1 和小半径 r_0 。则可列出凸轮各变换位置时,滚子 a, b 所构成的状态排列以及与转速的对应关系,见表1-2中的a)。可见,凸轮仅起传动作用,其上滚子定位点状态才起控制作用。这种普通凸轮控制件的曲线多、定位点数量多、尺寸大、结构复杂、制造困难。

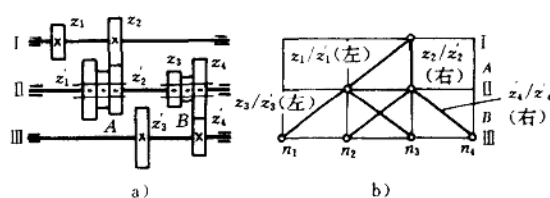


图 1-1 4 级变速系统

(2) 单曲线凸轮控制件

图 1-2b 所示凸轮上一条曲线有 8 个定位点, 滚子 a 经过的 4 个定位点状态排列为 0101, 而滚子 b 经过的另 4 个定位点状态排列为 0011 (表 1-2b), 由这 8 个定位点连接成一条封闭凸轮曲线, 实则内含两组定位点。这也是一种普通凸轮控制件, 定位点数量多、凸轮曲线性能较差、尺寸大、结构复杂。

(3) 公用凸轮控制件

图 1-2c 所示凸轮上一条封闭曲线仅有 4 个定位点, 是滚子 a 和 b 公用的。转动凸轮依次到各变速位置时, 滚子 a 经过的 4 个定位点状态排列为 0011, 与滚子 b 经过的这 4 个定位点状态排列 0110 是同一个环状排列, 后者仅是左移一位, 如表 1-2c 斜点线所示。滚子 a, b 所构成的 4 种定位点组合状态为 00, 01, 11, 10, 分别代表 4 种转速。这种公用凸轮控制件的定位点数量最少、凸轮曲线性能最好、结构简单、尺寸小、便于制造。

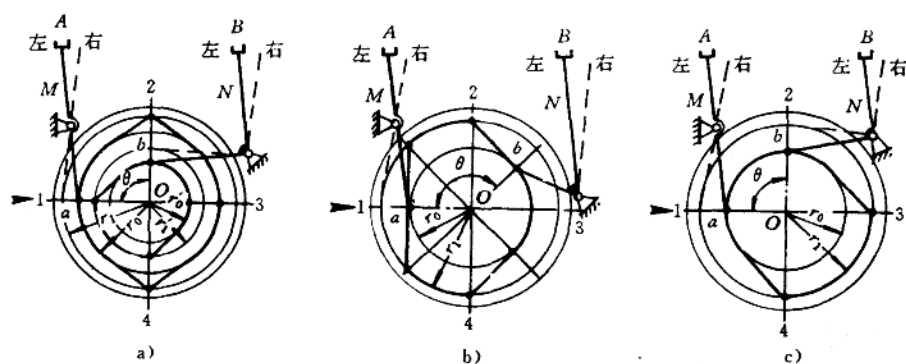


图 1-2 凸轮控制系统工作原理

表 1-2 凸轮滚子状态排列

凸轮控制件类型	a)、b)				c)			
变速位置	1	2	3	4	1	2	3	4
滚子 a	0	1	0	1	0	0	1	1
滚子 b	0	0	1	1	0	1	1	0
转速	n_1	n_2	n_3	n_4	n_1	n_3	n_4	n_2

由上例可见,公用控制件只有一组最少的公用控制点,可为所有被控多态件公用,因此公用控制件最简单、尺寸最小、工作可靠且便于制造。不仅机械公用控制件如此,液压、气动和电器电子等公用控制件,与普通控制件相比也都有这种明显的优点,特别是在现代控制系统中,当被控多态件的数量越大时,其优越性越显著。

1.3 公用控制理论研究综述

过去在机电设备中应用公用控制件还很少,出现较早的是公用凸轮。公用控制件的关键问题是搜寻适宜的公用控制方案,包括公用控制点(如凸轮定位点)的状态排列和控制端(如凸轮滚子)的相互位置。公用控制方案的搜寻,过去多采用试凑法,繁琐而费时,不易得到适宜方案,有时只能得到变换位数少的性能不佳的个别方案,优化方案更为困难。作者在70年代进行了公用凸轮、公用转阀、公用孔盘及公用转换开关等研究工作。1979年提出了公用控制件概念^{[6][7]},并给出了公用控制件方案的一些设计方法及常用的公用控制方案图表^[7],可方便地设计出公用凸轮及其它公用控制件,使公用控制方法的应用得以实用化。

机电跟踪控制系统中的组合开关片是公用控制件的又一应用实例。在机电跟踪控制系统中,有遥控和随动两种组合开关片。开关片一周分布着凸凹齿,若用1,0表示凸凹齿这两种状态,则片形可抽象为一个二元周期序列。组合开关片的控制端原为依次排列的^[37],因而开关片形即公用控制件的方案就归结为搜寻可用的二元周期序列,使开关片在不同变换位置时,各控制端输出的组合状态不相重复且排除全1码,这样随动部分才具有跟踪控制作用(见6.4节)。

前苏联介绍的一个周期为10的序列,是用试凑法得到的片形方案,其结构和控制性能都很差。日本采用的一个周期为12的组合开关片形方案,是一个自互反补序列片形,性能虽有所改进,但也是用试凑法得到的。美国在618T-3通讯设备上采用了一个周期为28的组合开关片形,其片形序列为一般序列,控制、结构及加工性能都很差。由此可见,当时还没有从根本上解决片形方案的设计问题,即公用控制方案的搜寻问题^[37]。

1978年杨俊、肖国镇采用移位寄存器法、完全状态图法及树图法,解决了控制端依次排列的片形方案搜寻问题,取得了重要的研究成果^[37]。但是,组合开关片形上各控制端仅是依次排列的方案,限制了各控制端的合理设置,结构尺寸受到影响,而且运算工作量较大,只能搜寻到很少一部分片形方案,使得大量更具有普遍性的各控制端非依次排列的片形方案无法得到。可见,在此之前的国内外研究工作,其公用控制理论尚属于狭义的,开关片的结构性能和控制性能也较差。

为此,作者于1980年提出了控制端“依次排列”和“非依次排列”的概念,突破了在此之前仅限于依次排列的研究工作^[8],并在普遍范围内搜寻公用控制方案,包括控制端依次排列和非依次排列的各种公用控制方案,大大拓宽了公用控制思想的应用领域。提出了周期序列移位法^[8]、状态判别法^[12]、状态剔除判别法^[15]等,用这些方法可方便地搜寻公用控制方案,并可选择优化方案。

随着现代技术的发展,控制系统的集成信息量剧增,需搜寻大周期多控制端的公用控制方案,为此必须解决高效快速搜寻方法。作者推导了可用周期序列中元素数目的不等式^[16],排除大量不可用的元素组合,使计算量大为缩短。提出了公用控制方案的直接生成法^[17],避免了若干繁杂计算。提出本原二元周期序列的构造方法——01对换法或二元对换法^[9],通过二次合成又产生了本原三元周期序列的构造方法^[20]。应用组合数学和图论,导出特殊序列(自互反、

自互补、自互反补和自互反且自互补周期序列)的计数公式^{[10][11][13][14][18][25]},并给出序列标识及构造方法。导出含某一变换次数的本原周期序列的数目公式,以及波动分布规律^[16],提出了几种高效的可用公用控制方案判别法^[55]。

采用高档微型计算机,用汇编语言编制了公用控制方案的搜寻程序。已在 80386DX 微机上快速搜寻出变换位数 $n \leq 32$ 的全部二态公用控制方案^[23,21],并给出特殊方案标识。可在更大范围内提供全部公用控制方案,从中还可选择优化方案。然后用 Turbo C 程序,按照所选方案绘制出相应公用控制件的图形^[20],从而实现了从方案选择到控制件设计绘图全过程的自动化。

公用控制理论是根据实际问题提出的,其理论研究工作也是随着实际问题的解决而逐步深化。我们在研究工作中多次重复以下过程。根据实际需要,抽象出理论问题,给予解决后再回到实践中去检验,发现新问题后再从理论上解决。这是一个实践—认识—再实践—再认识的辩证过程。此外,还经常采用归纳法、演绎法、类推法等进行研究,对从理论角度或从实际中归纳总结出的公式和规律、规则等也采用现代工具在计算机上给予验证。

公用控制理论已在公用凸轮、公用孔盘及公用转阀等控制系统,机电跟踪控制系统,数控机床和机器人位置检测中的公用码道编码盘测量控制系统中得到应用研究与开发。

由于公用控制技术的独特优点,在计算机软硬件中应用,会节省大量的存贮空间和逻辑门电路。随着研究工作的深入,还会在 LED 数码显示、密码技术、点阵式汉字显示或打印,以及光电变换系统等方面发挥出更具特色的作用。

当然,公用控制理论还有待于不断完善和发展,应用范围也有待于进一步开拓。我们相信,公用控制理论与技术会被人们进一步认识和掌握,会作为一个有力工具而更加拓宽其应用领域。

2 公用控制原理

公用控制理论的基本思想就是公用最少的控制件或控制点来获得最大的输出信息量,也就是搜寻出一组公用控制点编码(周期序列)和各控制端位置分布(位置组合),这组控制点编码能够被各控制端所公用。当这组编码代表的控制点作循环移位时,在一个循环中的不同位置,各控制端输出不同的组合状态,从而获得最大的输出信息量。

2.1 公用控制系统举例

为了阐述公用控制过程和工作原理,仍以简明直观的公用凸轮控制系统为例加以说明。

图 2-1 是三个双联滑移齿轮的公用凸轮控制系统。凸轮曲线上的定位点有 r_1 和 r_0 两种定位半径。凸轮旋转一周有 8 个变换位置,相应地凸轮曲线上有 8 个定位点,被 3 个滚子 a, b, c 所公用。通过 3 个摆杆 M, N, P 控制滑移齿轮到达不同位置(即不同状态),从而实现转速变换。公用凸轮的每一个变换位置,对应于各滚子的一种状态组合(见表 2-1);通过摆杆,又与滑移齿轮的一种状态组合(某种转速)对应。这里,公用凸轮即为公用控制件,滚子 a, b, c 为控制端,滑移齿轮为被控件。

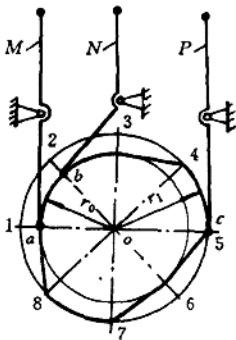


图 2-1 公用凸轮控制系统

表 2-1 控制端组合状态

控制端	变换位置							
	1	2	3	4	5	6	7	8
a	0	0	0	1	1	0	1	1
b	0	0	1	1	0	1	1	0
c	1	0	1	1	0	0	0	1
状态数字 S_i	1	0	3	7	4	2	6	5

公用控制件的一个变换位置所对应的转角称为单位位置角。单位位置角为公用控制件的一个重要参数。根据定义,有

$$\theta_0 = 360^\circ/n \quad (2-1)$$

式中 θ_0 ——单位位置角($^\circ$);

n ——变换位置数,简称变换位数,亦为对应序列的周期。

若取公用控制件的一个控制端 a 为基准,则其它控制端相对基准控制端 a 的角度为相应控制端的位置角,它们为单位位置角 θ_0 的倍数,这个倍数称为位置角数。因此,有

$$\theta_i = u_i \theta_0 \quad i = 1, 2, \dots, Z-1 \quad (2-2)$$

式中 θ_i ——控制端的位置角($^\circ$);

u_i ——控制端的位置角数;

Z —— 控制端数。

本例中, 变换位数 $n=8$, 控制端数 $Z=3$, 故由式(2-1)和式(2-2), 得

单位位置角 $\theta_0=360^\circ/8=45^\circ$,

控制端 b, c 的位置角分别为 $\theta_1=45^\circ, \theta_2=180^\circ$,

控制端 b, c 的位置角数分别为 $u_1=1, u_2=4$ 。

若公用凸轮的大、小半径这两种状态分别用 1, 0 表示, 则沿公用凸轮的逆时针方向从初始位置 0 可写出定位点环状排列为 00011011, 此排列为 1 个二元周期序列。再将各控制端 a, b, c 沿圆周的位置写出(以控制端 a 为基准且以位置角数表示), 得到 0-1-4, 若省略基准控制端 0, 则得到 1-4, 此即控制端位置组合。

控制端 a 的状态排列(序列)为 00011011, 根据位置组合 1-4, 将 a 对应的序列分别向左移 1 和 4 位, 可得出控制端 b 和 c 的状态排列分别为 00110110 和 10110001。这 3 个控制端对应的序列为同一周期序列。由此得出在旋转公用控制件实现变换过程中, 各控制端经过的状态排列(环状)相同, 只是相差相应控制端的位置角数, 即各控制端经过的状态排列移位等价。

为了实现各种状态(如转速)的变换, 当控制件在不同变换位置时各被控件的组合状态不能重复, 即状态数字 $S_i, i=1, 2, \dots, n$ 各不相同。如表 2-1, 在第一变换位置时, 状态数字 $S_1=(001)_2=1; \dots$ 。这就决定了公用控制点环状排列和控制端位置分布的编码规则。只有遵循这些规则, 才能求出可用的编码方案。由此可见, 采用公用控制方法能以最简的结构获得最大的组合控制功能。对凸轮控制件而言, 可从多条曲线变成一条公用定位点曲线。

2.2 公用控制原理

将上例公用凸轮控制系统工作原理一般化, 归纳出以下公用控制原理。

公用控制系统的核心元件——公用控制件上, 有环状排列的一组(n 个)不同状态(2 或 3 态)的公用控制点, 且在某 Z 个控制点处设有控制端, 所有控制端公用这同一组控制点。当这组控制点作循环移位时, 各控制端输出相应的组合状态数字, 则这些状态数字描绘了公用控制件所处的位置或控制系统正在变换的状态。因此, 公用控制件的位置不同(即循环移位的位数不同)时, 输出的组合状态数字也不同, 从而实现了最大数目的组合状态变换。公用控制件的每个工作位置, 与公用控制系统正在变换的状态一一对应, 既没有重复的, 也没有不确定的状态。这里, 该组公用控制点的环状排列为一周期序列, Z 个控制端所在的控制点相对位置称为位置组合, 用位置角数表示。此“周期序列”和“位置组合”共同构成一个公用控制方案。因这种控制方式只需一个控制件或一组控制点, 输入只是公用控制件的转位或循环移位, 故公用控制件的结构最简、体积最小, 而且工作可靠性得到提高, 这种控制方法是组合状态变换的最优方法。但是, 在组合状态变换中采用公用控制方法时, 必须遵循公用控制理论寻求公用控制方案, 即可用周期序列和控制端位置组合。

前面介绍了公用控制系统中的一些基本概念, 如公用控制件, 组合状态, 状态数字, 公用控制方案, 位置组合等。下面再补充几个有关的概念。

(1) 变换位数

公用控制件所能控制或变换的最大状态数目称为变换位数。这个数目也为公用控制件上一组公用控制点的数目, 如公用凸轮曲线定位点的数目, 或可用周期序列中元素的数目。一般, 公用控制件的变换位数与所控制的执行件的组合状态数目相等, 特殊情况也可不等, 这时公用

控制件有空态,如混合态件。本书中用 n 表示变换位数,它刻划了公用控制件控制功能的大小,是公用控制件设计的重要参数。

(2) 控制端或输出端

公用控制件的控制端为其输出部分,通过中间媒介(如杠杆、线路、油路等)控制多态件,因此亦称为输出端。每个输出端有二种或三种状态,与控制点状态数目相同。

(3) 多态件与混合态件

具有多个位置或状态的元件称为多态件。多态件中最常见的是二态件和三态件。多态件是与控制端紧密相关的,控制端所具有的状态数目,一般与多态件的状态数目相同,多态件的动作则是由公用控制件发出的控制信号通过控制端实现的。

混合态件是指公用控制系统中的被控元件既有二态件又有三态件。控制混合态件的公用控制件称为混合态公用控制件。

3 周期序列

前已论及,若将公用控制点的状态用数字 $0, 1, \dots$ 表示,则它的环状排列为一周期序列。周期序列是公用控制方案的一个重要组成部分,是研究公用控制理论的基础。本章主要论述二元、三元周期序列的有关性质、计数及构造方法。

3.1 二元周期序列

3.1.1 本原周期序列

3.1.1.1 定义

由仅含两个元素 $0, 1$ 的有限域 $GF(2)$ 上的元素 a_i (即 $a_i = 0$ 或 1) 构成的序列

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

称为二元序列或二元无穷序列。

若存在一个正整数 n , 使得

$$a_{i+n} = a_i \quad i=1, 2, \dots$$

则称此序列为二元周期序列。这里, n 为该序列的周期或长度。

从序列中截取长度为 n 的一段序列, 即一个二元周期序列, 其中元素 0 和 1 的数目分别用 n_0 和 n_1 表示, 则

$$n_0 + n_1 = n \quad (3-1)$$

将这样截取的一段二元周期序列看作是一个二进制整数, 称之为相应周期序列的特征数。例如, $(00101101)_2$ 就是周期序列 $0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1$ 的特征数。

周期为 n 的一个周期序列最多有 n 个不同的特征数, 我们把其中最小特征数所对应的序列称为本原周期序列, 其余的称为非本原周期序列。

在周期为 n 的二元周期序列

$$a_1, a_2, \dots, a_n \quad (3-2)$$

中, 若存在 n 的约数 d , 使得

$$a_{i+d} = a_i \quad i=1, 2, \dots, n-d$$

则称 $a_1, a_2, \dots, a_d$ 为周期序列 (3-2) 的子周期序列, d 为该周期序列的子周期, 这种序列称为含子周期序列。否则, 序列 (3-2) 为不含子周期序列。

3.1.1.2 性质

(1) 一个周期序列有且只有一个本原周期序列。

(2) 从一个周期序列 (无穷形式) 的不同位置截取的元素数目等于该周期数的序列, 与该周期序列的本原周期序列移位等价或平移等价。

例如, 序列 $01011010, 10110100, 01101001, 11010010, 10100101, 01001011, 10010110$ 都与本原周期序列移位等价。

为简单起见, 去掉了序列元素之间的逗号。

(3) 由 n_0 个 0 , n_1 个 1 组成的周期为 n 的二元周期序列, 当 n_0 和 n_1 有公约数时, 排列出的

全部周期序列中一定含有子周期为 $n/k (k > 1)$ 的序列。其中, $k | (n_0, n_1)$, 即 k 遍取 (n_0, n_1) 的所有因子, (n_0, n_1) 为 n_0, n_1 的最大公约数。当 n_0 和 n_1 互为素数(以下简称互素)时不含子周期序列。

例如, 当 $n_0 = 6, n_1 = 4$ 时, $n = 10, (n_0, n_1) = (6, 4) = 2$ 。由 $k | (n_0, n_1)$ 得 $k = 2$, 所以, 由 6 个 0, 4 个 1 组成的周期为 10 的全部二元周期序列中, 含有子周期为 $n/k |_{k=2} = 5$ 的序列。

由周期序列的定义和性质可见, 研究周期序列, 只要研究其本原周期序列即可。

3.1.1.3 本原周期序列计数

应用多元 Möbius 反演公式和 Polya 计数定理均能推导出本原周期序列的计数公式, 为深刻理解这种环状排列的生成情况, 现应用排列组合及 Möbius 公式推导此计数公式。

二元周期序列的计数问题, 也就是重集合 $\{n_0 \cdot 0, n_1 \cdot 1\}$ 上的有限可重环状排列问题。

设 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 是一个这样的环状排列, 如果这种环状排列有子周期 d , 则 d 一定是 n, n_0, n_1 的因子, 且这种环状排列可以看作是

$$\underbrace{a_1 a_2 \cdots a_d a_1 a_2 \cdots a_d \cdots a_1 a_2 \cdots a_d}_{\text{重复 } n/d \text{ 次}}$$

设 $M(n'_0, n'_1)$ 表示子周期为 d 的环状排列的数目, 因这样一个环状排列可以展成 d 个不相同的线排列, 而所有线排列的数目为

$$\frac{n!}{n'_0! n'_1!}$$

将所有子周期对应的线排列求和, 得到

$$\sum_{k | (n_0, n_1)} \frac{n}{k} \cdot M\left(\frac{n_0}{k}, \frac{n_1}{k}\right) = \frac{n!}{n_0! n_1!} \quad (3-3)$$

应用多元 Möbius 反演公式解得

$$M(n_0, n_1) = \frac{1}{n} \sum_{d | (n_0, n_1)} \mu(d) \frac{(n/d)!}{(n_0/d)! (n_1/d)!} \quad (3-4)$$

式(3-4)即为由 n_0 个 0 和 n_1 个 1 所能生成的不含子周期的全部本原周期序列的数目计算公式。

进一步, 再次应用 Möbius 公式, 又得到全部本原周期序列的数目计算公式

$$N(n_0, n_1) = \frac{1}{n} \sum_{d | (n_0, n_1)} \varphi(d) \frac{(n/d)!}{(n_0/d)! (n_1/d)!} \quad (3-5)$$

式(3-4)和(3-5)中, $\mu(d)$ 为 Möbius 函数, $\varphi(d)$ 为 Euler 函数。其定义和求法如下:

将任一个大于 1 的自然数 d 分解为素数幂的乘积, 即

$$d = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$$

其中, $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ 都是素数; $a_i (i = 1, 2, \cdots, k)$ 为正整数。

定义

$$\mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{当 } d = 1 \\ 0, & \text{当某 } a_i > 1 \\ (-1)^k, & \text{当 } a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 1 \end{cases}$$

$$\varphi(d) = d \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

例如, $\mu(2) = (-1)^1 = -1$, $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 1$

当 n_0, n_1 互素时, $(n_0, n_1) = 1$, 由式(3-4)和式(3-5)得到, 此时全部本原周期序列数目与不含子周期序列数目相同, 即

$$N(n_0, n_1) = M(n_0, n_1) = \frac{(n-1)!}{n_0! n_1!} \quad (n_0, n_1 \text{ 互素}) \quad (3-6)$$

这种情况没有子周期序列。

例 3-1 已知 $n_0 = 6, n_1 = 4$, 求本原周期序列数目。

解 因为 $(n_0, n_1) = 2, n = 10$, 代入式(3-5)中, 得到全部本原周期序列数目为

$$N(6, 4) = \frac{1}{10} \sum_{d|2} \varphi(d) \cdot \frac{(10/d)!}{(6/d)!(4/d)!} = \frac{1}{10} \left(\varphi(1) \frac{10!}{6!4!} + \varphi(2) \frac{5!}{3!2!} \right) = 22$$

代入式(3-4)中, 得到不含子周期序列数目为

$$M(6, 4) = \frac{1}{10} \sum_{d|2} \mu(d) \frac{(10/d)!}{(6/d)!(4/d)!} = \frac{1}{10} \left(\mu(1) \frac{10!}{6!4!} + \mu(2) \frac{5!}{3!2!} \right) = 20$$

3.1.1.4 本原周期序列构造方法

设想由 n_0 个 0, n_1 个 1 组成的全部本原周期序列按特征数由小到大排列, 则可用下述的 01 对换法(或称二元对换法)构造出全部的本原二元周期序列。

(1) 基本算法

- ① 输入元素数目 n_0, n_1 , 用式(3-5)计算全部本原周期序列的数目 $N(n_0, n_1)$ 。
- ② 构造初始本原周期序列

$$\underbrace{00 \cdots 0}_{n_0 \text{ 个}} \quad \underbrace{1 \cdots 1}_{n_1 \text{ 个}}$$

置 $k=1$ 后输出该序列。

- ③ 从右数第二位起逐一向左查看序列, 找到第一个“01”, 并记下查看的 0 的个数, 赋给 l 。

④ 将这个“01”右边的所有 0(共 l 个)调换到这个“01”的相邻后面。

⑤ 对换这个“01”中的 0 和 1, 然后判断如此生成的序列是否为本原的, 若是, 则置 $k=k+1$, 输出此本原序列, 若为含子周期序列, 则给出标识 s , 转⑥; 否则转③。

⑥ 若 $k \leq N(n_0, n_1)$, 则转③; 否则停止。

判断一个序列是否为本原周期序列的基本方法是, 将该序列依次进行 $1, 2, \dots, n-1$ 次移位, 如果所得序列的特征数全部大于或等于原序列的特征数(若相等则为含子周期序列, 给出标识 s , 这样的序列不可用, 求公用控制方案时应予排除, 见第 5 章), 则这个序列就是新的本原周期序列; 否则不是。

(2) 改进算法

本原周期序列构造的基本算法中, 每对换一次 01 就要判断一次生成序列是否为本原序

列;此外,从倒数第二个本原周期序列来构造最后 一个的过程中,一般需要经过生成多个非本原序列的步骤才能得出,周期越大则此过程越长,此间的计算量相当大,且是不必要的。

现对基本构造算法做以下改进:

1) 当 n_0 为偶数时,生成序列出现形如

$$\underbrace{00\cdots 011\cdots 1}_{n_0/2 \text{ 个 } [n_1/2]+1 \text{ 个}} \times \times \cdots \times$$

的序列;或者,当 n_0 为奇数时,生成序列出现前 0 的个数 $\leq [n_0/2]$ 以后才需判断是否为本原周期序列,此序列之前的所有生成序列都是本原的。

事实上,当 n_0 为奇数时,若生成序列的前 0 个数 $> [n_0/2]$,则此序列后部分的连续 0 的个数一定不大于 $[n_0/2]$,因而将此序列移位后得到的新序列的特征数均大于原序列的。当 n_0 为偶数时类似。

如对 $n_0=n_1=6$ 的情况,只需在出现 000111100011 序列后判断本原性,该序列是第 53 个生成序列(全部本原周期序列数目是 80),可见只需判断一半以下的本原序列即可,减少了大量不必要的计算。

2) 最后一个本原周期序列可直接排列。

当 $n_0=n_1$ 时,最后一个本原周期序列为 0101 $\cdots$ 01,为含子周期序列。

当 $n_1 < n_0 < 2n_1$ 时,先构造出 $\underbrace{001\cdots 01}_{n_1 \text{ 个 } 01}$,然后在左数第 $\left[\frac{n_1}{n_0-n_1} i \right]$, ($i=1, 2, \cdots, n_0-n_1-1$) 个

1 右边放置 0,如 $n_0=9, n_1=7$ 时,最后一个本原周期序列为 0010101001010101。

当 $n_0 < n_1 < 2n_0$ 时,以上排列法中只要将 0,1 对换即可生成最后一个周期序列。

当 n_0 与 n_1 有公约数 c 时,按照以上排列法,因对于 $\underbrace{0101\cdots 01}_{n_1 \text{ 个 } 01}$,在左数第 $\left[\frac{n_1}{n_0-n_1} i \right]$, $i=0, 1,$

$\cdots, n_0-n_1-1$ (设 $n_0 > n_1$) 个 01 右放置 0,则在 $\left[\frac{n_1}{n_0-n_1} \left(i + \frac{n_0-n_1}{c} \right) \right] = \frac{n_1}{c} + \left[\frac{n_1}{n_0-n_1} i \right]$ 个 01 右也放置 0,故所生成的最后一个本原周期序列可分成 c 段周期为 n/c 的序列,这种含子周期的序列不可用。

还可以证明,最后一个本原序列是自互反序列,当 $n_0=n_1$ 时还是自互补序列(见本章 3.1.2 和 3.1.3)。

这样,二元对换法的基本算法从⑤步开始要做如下改动(在原第①步先置 $p=0$):

⑤ 对换“01”中的 0 和 1。

⑥ 若 $p=1$,则判断生成序列是否为本原的,若是,转⑧;否则转③。

⑦ 判断生成序列是否为 $\underbrace{00\cdots 0}_{n_0/2 \text{ 个 }} \underbrace{11\cdots 1}_{[n_1/2]+1 \text{ 个 }} \times \times \cdots \times$ (n_0 为偶数时)或生成序列前 0 的个数 $\leq [n_0/2]$ (n_0 为奇数时),若是,置 $p=1$,转⑥。

⑧ 置 $k=k+1$,输出此本原序列。

⑨ 若 $k \leq N(n_0, n_1)-1$,转③。

⑩ 直接构造最后一个本原周期序列并输出。

⑪ 停机。

(3) 本原周期序列构造举例