新编考研冲刺系列丛书

各类考研数学全真试题与解答

刘三阳 张卓奎 陈慧婵 编著

专家解答题典

★ 统考·单考

★ 工科·理科

★ 硕士·博士

★ 本校·外校

西安电子科技大学出版社

2001

内 容 简 介

本书根据不同专业、不同类别、不同层次考生的备考需要，搜集汇编了最近几年来的全国硕士生入学统考数学试题、西安电子科技大学工科硕士生入学单考高等数学试题、物理专业和经济管理专业高等数学统考试题及数学专业各科目统考试题。这些试题附有详解。此外还给出了近年来西安电子科技大学博士生入学考试的10门数学科目的试题和部分外单位的硕士生入学考试试题。全书题源广泛、题型多样、解答详细、涉及面宽、适应面广，其中不少试题是以往难以看到的。

本书适合多种专业、各种类别、不同层次的考生在考前的短期内进行全面复习和模拟训练，掌握解题方法和技巧，并熟悉各类试题的特点和命题的动态趋势。

希望本书能为各类考生提供帮助，并对本科生和研究生数学教学起到参考作用。

图书在版编目(CIP)数据

各类考研数学全真试题与解答/刘三阳等编著.
—西安：西安电子科技大学出版社，2001.10
(新编考研冲刺系列丛书)
ISBN 7-5606-1053-6
Ⅰ.各…　Ⅱ.刘…　Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—试题　Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第050933号

策划编辑　毛红兵　李惠萍
责任编辑　戚文艳
出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)
电　　话　(029)8227828　　邮　编　710071
http://www.xduph.com　　E-mail：xdupfxb@pub.xaonline.com
经　　销　新华书店
印　　刷　西安兰翔印刷厂
版　　次　2001年10月第1版　2001年10月第1次印刷
开　　本　787毫米×960毫米　1/16　印张19.25
字　　数　384千字
印　　数　1～6000册
定　　价　25.00元
ISBN 7-5606-1053-6/O·0050

序

人类走过了又一个千年之交。世界正在发生深刻变化。这一变化是20世纪以来科学技术革命不断深入的必然结果，她已经成为推动社会发展与文明进步的革命性力量。人类走过了农业经济时代、工业经济时代，正在进入知识经济时代。

自1978年国家恢复招收研究生和1980年建立学位制度至今，研究生教育已经走过了20多年的历程，她是我国教育结构中最高层次的教育，肩负着为国家现代化培养高素质、高层次创造性人才的重任，是我国增强综合国力、增强国际竞争力的重要支撑力量。研究生教育的改革和发展，直接关系到21世纪我国第三步战略目标的实现。

西安电子科技大学是一所有70年历史的教育部直属的重点高等学校，也是国家"211"重点建设高校，同时又是国家首批具有硕士、博士授予权的单位之一。现有在校生15 000多人，其中研究生2000余人。学校建有研究生院等10个学院，有3个国家重点学科和27个省部级重点学科；同时建有3个国家重点实验室和16个省部级重点实验室，在"通信与信息系统"、"信号与信息处理"、"电路与系统"、"微电子与固体电子学"、"电磁场与微波技术"和"密码学"等领域设有"长江计划"特聘教授岗位。近年来，西安电子科技大学研究生教育得到了迅速的发展，年招生已超过1000人，招生质量和培养质量在省内名列前茅。毕业生遍布国内外，受到了广泛赞誉。

当前，研究生教育面临新的挑战，同时给研究生教育的发展带来了新的机遇。如何选拔优秀人才是一项长期的研究课题。西安电子科技大学出版社组织我校长期在教学科研第一线、在国内有一定知名度的教授编写了这套考研辅导丛书，并从重点、难点、考点、典型例题分析及自测题等方面进行有剖析、对比总结性的阐述，有助于考生在有限的时间内复习所学内容，并有新的提高和启发。

我们相信此套丛书的出版对我国工科电子信息类研究生教育的发展会起到积极的促进作用。

西安电子科技大学研究生院

博士生导师　焦李成

2000年7月

前　言

近年来，考研热持续升温，为了给理工科各类考生提供一套比较全面的复习参考资料，我们编写《各类考研数学全真试题与解答》一书。本书收集了20世纪90年代以来的全国硕士研究生入学统一考试数学试题、西安电子科技大学硕士生入学单独考试高等数学试题、物理专业和经济管理专业高等数学统考试题、数学专业(数学分析、线性代数、概率论、计算方法等科目)的统考试题。这些试题同时附有详细解答。此外，还给出了近年来西安电子科技大学博士生入学考试的多门数学试题(包括离散数学、基础代数、泛函分析、概率论、矩阵分析、最优化计算方法、凸分析与最优化理论、数值分析等)和某些其它院校的硕士生入学考试数学试题。全书资料丰富、题源广阔、题型多样、解答详尽、覆盖面宽、信息量大、适应面广，其中不少试题是平时不易找到的。

本书适应多种专业、各种类别、不同层次考生的实际需要，可帮助考生在短时间内进行全面复习和模拟训练，掌握解题方法和技巧。洞悉各类试题的特点和动态趋势。另外，本书对本科生和研究生数学教学也具有参考价值。

作　者

2001年5月

目　录

全国硕士研究生入学统考数学试题与试题解答

西安电子科技大学硕士研究生入学单考高等数学试题与试题解答

西安电子科技大学硕士研究生入学考试数学专业各科目试题与试题解答

数学分析

线性代数

概率论

计算方法

西安电子科技大学硕士研究生入学统考物理专业高等数学试题与试题解答

西安电子科技大学硕士研究生入学统考经济管理专业高等数学试题与试题解答

西安电子科技大学博士研究生入学考试数学试题

部分外单位硕士研究生入学考试数学试题

西北工业大学

中国科学院计算数学与科学工程计算研究所

全国硕士研究生入学统考数学

试题与试题解答

1991 年 试 题

一、填空题(本题满分 15 分，每小题 3 分)

(1) 设$\begin{cases} x=1+t^2 \\ y=\cos t \end{cases}$，则$\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=$________.

(2) 由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 在点(1，0，−1)处的全微分 $\mathrm{d}z=$________.

(3) 已知两条直线的方程是 l_1：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-3}{-1}$；$l_2$：$\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$，则过 l_1 且平行于 l_2 的平面方程是________.

(4) 已知当 $x\to 0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小，则常数 $a=$________.

(5) 设 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的逆阵 $\boldsymbol{A}^{-1}=$________.

二、选择题(本题满分 15 分，每小题 3 分)

(1) 曲线 $y=\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$

A. 没有渐近线

B. 仅有水平渐近线

C. 仅有铅直渐近线

D. 既有水平渐近线又有铅直渐近线 【　】

(2) 若连续函数 $f(x)$满足关系式 $f(x)=\int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right)dt+\ln2$，则 $f(x)$等于

A. $e^x\ln2$　　B. $e^{2x}\ln2$

C. $e^x+\ln2$　　D. $e^{2x}+\ln2$ 【　】

(3) 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=2$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=5$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 等于

A. 3　B. 7　C. 8　D. 9 【　】

(4) 设 D 是 xoy 平面上以(1，1)、(−1，1)和(−1，−1)为顶点的三角形区域，D_1 是 D 在第一象限的部分，则 $\iint\limits_D(xy+\cos x\sin y)dx\,dy$ 等于

A. $2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\,dx\,dy$　　B. $2\iint\limits_{D_1}xy\,dx\,dy$

C. $4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)dx\,dy$　　D. 0 【　】

(5) 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 满足关系式 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位阵，则必有

A. $\boldsymbol{ACB}=\boldsymbol{E}$　　B. $\boldsymbol{CBA}=\boldsymbol{E}$

C. $\boldsymbol{BAC}=\boldsymbol{E}$　　D. $\boldsymbol{BCA}=\boldsymbol{E}$ 【　】

三、(本题满分 15 分，每小题 5 分)

(1) 求 $\lim\limits_{x\to0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}$.

(2) 设 $\boldsymbol{n}$ 是曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 $P(1，1，1)$处的指向外侧的法向量，求函数 $u=\dfrac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$ 在点 P 处沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数.

(3) 计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z)dv$，其中 Ω 是由曲线 $\begin{cases}y^2=2z\\x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面与

平面 $z=4$ 所围成的立体.

四、(本题满分 6 分) 在过点 $O(0,0)$和 $A(\pi,0)$的曲线族 $y=a\sin x\ (a>0)$中，求一条曲线 L，使沿该曲线从 O 到 A 的积分 $\int_L(1+y^3)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y$ 的值最小.

五、(本题满分 8 分) 将函数 $f(x)=2+|x|(-1\leqslant x\leqslant 1)$展开成以 2 为周期的傅里叶级数，并由此求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和.

六、(本题满分 7 分) 设函数 $f(x)$在$[0,1]$上连续，$(0,1)$内可导，且 $3\int_{\frac{2}{3}}^{1}f(x)\mathrm{d}x=f(0)$，证明在$(0,1)$内存在一点 c，使 $f'(c)=0$.

七、(本题满分 8 分) 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,3,5)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,a+2,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,2,4,a+8)$及 $\boldsymbol{\beta}=(1,1,b+3,5)$.

(1) a、b 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$不能表示成 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合？

(2) a、b 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$有 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 的唯一的线性表示式？并写出该表示式.

八、(本题满分 6 分) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定阵，$\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位阵，证明 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的行列式大于 1.

九、(本题满分 8 分)在上半平面求一条向上凹的曲线，其上任一点 $P(x,y)$处的曲率等于此曲线在该点的法线段 PQ 长度的倒数(Q 是法线与 x 轴的交点)，且曲线在点$(1,1)$处的切线与 x 轴平行.

十、填空题(本题满分 6 分，每小题 3 分)

(1) 若随机变量 X 服从均值为 2、方差为 σ^2 的正态分布，且 $P\{2<X<4\}=0.3$，则 $P\{X<0\}=$________.

(2) 随机地向半圆 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}$(a 为正常数)内掷一点，点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比，则原点和该点的连线与 x 轴的夹角小于$\frac{\pi}{4}$的概率为________.

十一、(本题满分 6 分) 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-(x+2y)}, & x>0,\ y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求随机变量 $Z=X+2Y$ 的分布函数.

1991 年试题解答

一、(1) $\dfrac{\sin t - t\cos t}{4t^3}$　　(2) $dx - \sqrt{2}\,dy$　　(3) $x-3y+z+2=0$

(4) $-\dfrac{3}{2}$　　(5) $\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -6 & 0 & 0 \\ -6 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

二、(1) D　(2) B　(3) C　(4) A　(5) D

三、(1) 因 $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\pi \ln\cos\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\pi}{\cos\sqrt{x}}\cdot\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}=-\frac{\pi}{2}$$

所以，原式$=e^{-\frac{\pi}{2}}$.

(2) 设 $$F(x, y, z)=2x^2+3y^2+z^2-6$$

则 $$F_x'|_P=4x|_P=4,\quad F_y'|_P=6y|_P=6,\quad F_z'|_P=2z|_P=2$$

所以，$\boldsymbol{n}=4\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，单位化得 $\boldsymbol{n}^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{14}}(2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P=\left.\frac{6x}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}\right|_P=\frac{6}{\sqrt{14}}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_P=\left.\frac{8y}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}\right|_P=\frac{8}{\sqrt{14}}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_P=-\left.\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z^2}\right|_P=-\sqrt{14}$$

从而 $$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_P=\frac{6}{\sqrt{14}}\cdot\frac{2}{\sqrt{14}}+\frac{8}{\sqrt{14}}\cdot\frac{3}{\sqrt{14}}-\sqrt{14}\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}=\frac{11}{7}$$

(3) **解法一** $$\iiint_\Omega (x^2+y^2+z)\,dv=\int_0^4 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2z}}(r^2+z)r\,dr$$
$$=4\pi\int_0^4 z^2\,dz=\frac{256}{3}\pi$$

解法二 $$\iiint_\Omega (x^2+y^2+z)dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{8}}r\,dr\int_{\frac{r^2}{2}}^4 (r^2+z)\,dz$$
$$=2\pi\int_0^{\sqrt{8}}\left(4r^3+8r-\frac{5r^5}{8}\right)dr$$
$$=\frac{256}{3}\pi$$

四、
$$
\begin{aligned}
I(a) &= \int_L (1+y^3)\,\mathrm{d}x + (2x+y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\pi} [1 + a^3\sin^3 x + (2x + a\sin x)a\cos x]\,\mathrm{d}x \\
&= \pi - 4a + \frac{4}{3}a^3
\end{aligned}
$$

令 $I'(a) = 4(a^2-1) = 0$，求得 $a = 1$（$a = -1$ 舍去），且 $a = 1$ 是 $I(a)$ 在 $(0, +\infty)$ 内的唯一驻点.

又由于 $I''(1) = 8 > 0$，所以，$I(a)$ 在 $a = 1$ 处取到最小值，因此，所求曲线是 $y = \sin x (0 \leqslant x \leqslant \pi)$.

五、由于 $f(x) = 2 + |x| (-1 \leqslant x \leqslant 1)$ 是偶函数，因而

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 2\int_0^1 (2+x)\,\mathrm{d}x = 5 \\
a_n &= 2\int_0^1 (2+x)\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2(\cos n\pi - 1)}{n^2\pi^2} \qquad (n = 1, 2, \cdots) \\
b_n &= 0 \qquad (n = 1, 2, \cdots)
\end{aligned}
$$

因为所给函数在区间 $[-1, 1]$ 上满足收敛定理的条件，故

$$
\begin{aligned}
2 + |x| &= \frac{5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(\cos n\pi - 1)}{n^2\pi^2}\cos n\pi x \\
&= \frac{5}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}
\end{aligned}
$$

当 $x = 0$ 时，$2 = \dfrac{5}{2} - \dfrac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}$，从而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}$.

又
$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}
$$

所以
$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{4}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}
$$

六、由积分中值定理知，在 $\left[\dfrac{2}{3}, 1\right]$ 上至少存在一点 c_1，使

$$
\int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}f(c_1)
$$

从而 $f(c_1) = f(0)$，故 $f(x)$ 在区间 $[0, c_1]$ 上满足罗尔定理的条件，因此，在 $(0, c_1)$ 内存在一点 c，使得

$$f'(c)=0,\quad c\in(0,c_1)\subset(0,1)$$

七、用高斯消去法可得

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\2&3&a+2&4&b+3\\3&5&1&a+8&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&0&a+1&0&b\\0&0&0&a+1&0\end{bmatrix}$$

故

(1) 当 $a=-1$，$b\neq 0$ 时，$\boldsymbol{\beta}$ 不能用 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示.

(2) 当 $a\neq -1$，b 为任何实数，$\boldsymbol{\beta}$ 皆可用 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性唯一表示，且

$$\boldsymbol{\beta}=-\frac{2b}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{a+b+1}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{b}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_3+0\boldsymbol{\alpha}_4$$

八、解法一 由于 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值均大于 0，从而 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 的特征值均大于 1，设 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$，存在 $\boldsymbol{P}$(正交阵)，使

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}$$

故 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n>1$.

解法二 因为 $\boldsymbol{A}$ 是正定阵，故存在正交阵 $\boldsymbol{Q}$，使

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}$$

其中，$\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，因此

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}+\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}\lambda_1+1&&&\\&\lambda_2+1&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n+1\end{bmatrix}$$

在上式两端取行列式得

$$\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i+1)=|\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{Q}|=|\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}||\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}||\boldsymbol{Q}|=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$$

从而 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|>1$.

九、曲线 $y=y(x)$ 在点 (x,y) 处的法线方程为

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x) \qquad (y'\neq 0)$$

它与 x 轴的交点是 $(x+yy',0)$，从而该点到 x 轴之间的法线 PQ 的长度为

$$\sqrt{(yy')^2+y^2}=y(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (y'=0 \text{ 也满足上式})$$

根据题意得微分方程：

$$\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{y(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}$$

由于 $y''>0$，有 $yy''=1+y'^2$，且当 $x=1$ 时，$y=1$，$y'=0$.

令 $y'=p$，$y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，代入微分方程得

$$yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=1+p^2 \quad 或 \quad \frac{p}{1+p^2}\mathrm{d}p=\frac{\mathrm{d}y}{y}$$

积分并注意到 $y=1$ 时，$p=0$，得 $y=\sqrt{1+p^2}$，代入 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p$ 中，得

$$y'=\pm\sqrt{y^2-1}, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2-1}}=\pm\,\mathrm{d}x$$

积分上式，并注意到 $x=1$ 时，$y=1$，得

$$\ln(y+\sqrt{y^2-1})=\pm(x-1)$$

因此，所求曲线方程为

$$y+\sqrt{y^2-1}=\mathrm{e}^{\pm(x-1)}$$

将 y 移至右边再平方，整理得

$$y=\frac{1}{2}[\mathrm{e}^{x-1}+\mathrm{e}^{-(x-1)}]=\mathrm{ch}(x-1)$$

十、(1) 0.2 　　　(2) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}$

十一、

$$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+2Y\leqslant z\}=\iint\limits_{x+2y\leqslant z}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

当 $z \leqslant 0$ 时，

$$P\{Z \leqslant z\} = 0$$

当 $z > 0$ 时，

$$P\{Z \leqslant z\} = \int_0^z \mathrm{d}x \int_0^{\frac{z-x}{2}} 2\mathrm{e}^{-(x+2y)}\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^z \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \int_0^{\frac{z-x}{2}} 2\mathrm{e}^{-2y}\,\mathrm{d}y = \int_0^z (\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-z})\,\mathrm{d}x$$

$$= 1 - \mathrm{e}^{-z} - z\mathrm{e}^{-z}$$

所以，$Z = X + 2Y$ 的分布函数：

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leqslant 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-z} - z\mathrm{e}^{-z}, & z > 0 \end{cases}$$

1992 年试题

一、填空题(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分，把答案填在题中横线上)

(1) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^{x+y} + \cos(xy) = 0$ 确定，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} =$ ________.

(2) 函数 $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ 在点 $M(1, 2, -2)$ 处的梯度 $\mathrm{grad}u\,|_M =$ ________.

(3) 设 $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x \leqslant 0 \\ 1 + x^2, & 0 < x \leqslant \pi \end{cases}$，则其以 2π 为周期的傅里叶级数在点 $x = \pi$ 处收敛于________.

(4) 微分方程 $y' + y\tan x = \cos x$ 的通解为 $y =$ ________.

(5) 设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{bmatrix}$，其中 $a_i \neq 0$，$b_i \neq 0$，$(i = 1, 2, \cdots, n)$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A}) =$ ________.

二、选择题(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 当 $x \to 1$ 时，函数 $\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限

A. 等于 2　　B. 等于 0

C. 为 ∞　　D. 不存在但不为 ∞　　【　】

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{a}{n}\right)$(常数 $a>0$)

A. 发散　　B. 条件收敛

C. 绝对收敛　　D. 收敛性与 a 有关　　【　】

(3) 在曲线 $x=t$，$y=-t^2$，$z=t^3$ 的所有切线中，与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线

A. 只有 1 条　　B. 只有 2 条

C. 至少有 3 条　　D. 不存在　　【　】

(4) 设 $f(x)=3x^3+x^2|x|$，则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 n 为

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3　　【　】

(5) 要使 $\xi_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$，$\xi_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$ 都是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，只要系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为

A. $\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\end{bmatrix}$　　B. $\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\0 & 1 & -1\end{bmatrix}$　　D. $\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\4 & -2 & -2\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}$　　【　】

三、(本题共 3 小题，每小题 5 分，满分 15 分)

(1) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-1}{1-\sqrt{1-x^2}}$.

(2) 设 $z=f(e^x\sin y, x^2+y^2)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(3) 设 $f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x\leqslant 0\\ e^{-x}, & x>0\end{cases}$，求 $\int_1^3 f(x-2)\mathrm{d}x$.

四、(本题满分 6 分) 求微分方程 $y''+2y'-3y=e^{-3x}$ 的通解.

五、(本题满分 8 分) 计算曲面积分

$$\iint_{\Sigma}(x^3+az^2)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

其中 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧.

六、(本题满分 7 分) 设 $f''(x)<0$，$f(0)=0$，证明对任何 $x_1>0$，$x_2>0$，有 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

七、(本题满分 8 分) 在变力 $\boldsymbol{F}=yz\boldsymbol{i}+zx\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$ 的作用下，质点由原点沿直线运动到椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 上的第一卦限的点 $M(\xi,\eta,\zeta)$，问当 ξ、η、ζ 取何值时，力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功 W 最大？并求出 W 的最大值.

八、(本题满分 7 分) 设向量组 α_1，α_2，α_3 线性相关，向量组 α_2，α_3，α_4 线性无关，问：

(1) α_1 能否由 α_2，α_3 线性表出？证明你的结论.

(2) α_4 能否由 α_1，α_2，α_3 线性表出？证明你的结论.

九、(本题满分 7 分) 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=3$，对应的特征向量依次为

$$\xi_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\quad \xi_2=\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix},\quad \xi_3=\begin{bmatrix}1\\3\\9\end{bmatrix},\quad \text{又向量 }\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}.$$

(1) 将 $\boldsymbol{\beta}$ 用 ξ_1，ξ_2，ξ_3 线性表出.

(2) 求 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}$ (n 为自然数).

十、填空题

(1) 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{6}$，则事件 A、B、C 全不发生的概率为________.

(2) 设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布，则数学期望 $E\{X+\mathrm{e}^{-2X}\}=$________.

十一、(本题满分 6 分) 设随机变量 X 与 Y 独立，X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，Y 服从 $[-\pi,\pi]$ 上的均匀分布，试求 $Z=X+Y$ 的概率分布密度(计算结果用标准正态分布函数 Φ 表示，其中 $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$).