21世纪高等学校辅导教材·力学系列丛书

流体力学 水力学 题解

莫乃榕　槐文信　编著

A0976324

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

流体力学/水力学题解/莫乃榕 槐文信 编著
武汉:华中科技大学出版社, 2002年1月
ISBN 7-5609-2625-8

Ⅰ. 流…
Ⅱ. ①莫… ②槐…
Ⅲ. 流体力学/水力学-题解
Ⅳ. O35:TV13

流体力学/水力学题解 莫乃榕 槐文信 编著

责任编辑:周芬娜 封面设计:潘 群
责任校对:蔡晓瑚 责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87545012

印 刷:华中科技大学印刷厂

开本:850×1168 1/32 印张:15.125 字数:360 000
版次:2002年1月第1版 印次:2002年9月第2次印刷 印数:4 001—8 000
ISBN 7-5609-2625-8/O·245 定价:20.80元

前　　言

习题训练是一个重要的学习环节，对水力学，流体力学的基本理论的理解和掌握，都要通过反复解题才能得以实现。“水力学”和“流体力学”这两门课程的内容和研究方法虽然有所差异，但基本原理、基本方法是相同的，都是运用连续性方程、运动方程、能量方程去解决各类流动问题，事实上这两门课程的很多内容是完全一样的，因此我们将这两门课程的习题解汇集在一起。本书是各专业均适用的教学参考书。我们编写本书的目的，是引导学习“水力学”和“流体力学”的人深入思考和理解课程的基本概念、基本原理和基本公式，运用基本理论去分析和解决实际问题，掌握必要的解题技巧和方法。

本书各章分为学习导引，难点分析，习题详解，自测试题及解答等四个模块。学习导引简洁介绍有关的基本概念、理论和公式。难点分析则是针对读者在解题过程中可能遇到的疑难问题提供一些必要的解题方法和技巧。习题详解是本书精华部分，在这个模块里，我们不但告诉读者如何解题，更重要的是讲清为什么要这样解题。看了这些题解，读者将会感到解题是如此轻松，就像在解题的风景区内旅游一样，本书就像是在导游。使读者知其然，更知其所以然，这是我们的编写目的。在解题时，读者不必为教材中众多的复杂公式所困扰。在解题过程中我们将向读者展示这样一个现实：只要掌握为数不多的公式就能解一般的题目，死记硬背公式是一种多余的事情。自测试题这一模块中的题目选自一些高校的课程考试试题以及研究生入学考试试题，并附有参考解答，这些解答对正确解题者必然是一个鼓舞，对不正确解题者也是及时的答疑。

水力学、流体力学的内容和研究方法发展得比较成熟，但是解题方法应有新意，应有时代特点。对于那些多少有点过时的解题方

法，我们已经不再采用，在本书中我们力图向读者提供一些富有创意的解题方法。例如，管流水计算中我们不提倡查莫迪图，查流量模数表，而是用简捷的方法就可以求出沿程损失系数。读者手中只要有一个计算器，就可以完成必要的计算。在可压缩流动的计算中也不用查阅气体动力学函数表以及激波参数表，取代它们的将是牛顿迭代法——一种简单易行的办法。如果你从未接触过，那么可以边看边学边掌握，即学即用。

本书按照目前国内的“流体力学”、“水力学”的课程内容进行编排。全书共分十四章，前十三章每章涉及一个专门的流动问题。最后一章为最新的研究生入学考试试题和课程考试试题。本书由莫乃榕（第一～第八、十、十一章）和槐文信（第九、十二、十三章）共同编写。第十四章的试题解答由两人共同完成。编者敬请本书读者指出可能存在的解题错误，欢迎提供更有新意的解题方法。

本书的出版承蒙华中科技大学出版社的大力支持，武汉大学，华中科技大学，山东大学，河海大学的有关教师给编者提供了各类试题，编者谨致衷心感谢。

编者

2001年10月

目 录

第一章　流体的物理性质

学习导引

1. 流体的压缩性与热胀性

流体具有质量，单位体积里的质量称为密度，记作ρ，其单位是kg/m^3。

流体的密度与压强p和温度T有关，即

$$\rho = \rho(p, T)$$

上式称为流体的状态方程。

气体的状态方程是

$$p = \rho RT \tag{1-1}$$

式中，p是压强，单位是N/m^2或Pa；T是绝对温度，单位是K（开）；R是气体常数，对于空气，$R=287\ N\cdot m/(kg\cdot K)$。

液体的状态方程比较复杂，下面列出20℃时液体的状态方程：

$$\frac{p}{p_0} = (B+1)\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n - B \tag{1-2}$$

式中，常数B和n与液体性质有关，对于水，$B=3000$，$n=7$；ρ_0是液体在标准大气压$p_0=1.01325\times10^5$Pa情况下的密度，对于水，$\rho_0=998.23\ kg/m^3$。

密度的倒数称为比容，记作$v=1/\rho$，单位是m^3/kg，它表示单位质量流体所占据的体积。

温度和压强的变化都会引起密度的变化，根据全微分的概念，密度的变化率为

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial p}dp + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial T}dT = \kappa dp - \alpha_T dT$$

式中，
$$\alpha_T = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial T} = \frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial T}$$
称为热膨胀系数，单位是 1/K，它表示增加单位温度时，体积的变化率。

$$\kappa = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial p} = -\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial p} \tag{1-3}$$

称为体积压缩系数，它表示在温度不变时，增加单位压强所引起的体积压缩率。

κ 的倒数记作 E，称为体积弹性系数，即

$$E = \rho\frac{\partial p}{\partial\rho} = -v\frac{\partial p}{\partial v} \tag{1-4}$$

单位是Pa，它表示体积压缩率为 1 时所需的压强增量。

由式(1-1)得气体的体积弹性系数为

$$E = p$$

由式(1-2)得液体在 20℃时的体积弹性系数

$$E = np_0\left(\frac{p}{p_0} + B\right) \tag{1-5}$$

2. 流体的粘性

粘性是流体抵抗变形运动的能力。粘性产生的原因是流体的分子之间存在内聚力以及流体内部存在剧烈的动量交换。

粘性切应力是粘性的具体表现。粘性切应力 τ 与流体微团的角变形速率有关。对于一元流动，

$$\tau = \mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} \tag{1-6}$$

式中，μ 称为流体的动力粘性系数，单位是 $\mathrm{N\cdot s/m^2}$。流体的运动粘性系数记作 ν，其定义是

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

单位是 $\mathrm{m^2/s}$。

3. 表面张力

液体的表面有张力。液体自由面上单位长度的流体线所受到

的拉力称为表面张力系数，记作σ，单位是N/m。

液体与固体壁面接触时，在液体表面与固壁面的交界处作液体表面的切面，此切面与固壁面在液体内部所夹的角度θ称为接触角。

当液体表面发生弯曲时，液体内部的压强p与外部的流体介质的压强p_0之差与曲面的两个主曲率半径R_1和R_2有关：

$$p - p_0 = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \tag{1-7}$$

此式称为拉普拉斯表面张力方程。

难点分析

1. 粘性切应力的计算

粘性切应力的计算常常很复杂。如果流体作一元运动，速度不太大，粘性系数比较大，边界条件简单，则其速度分布可视为线性变化。这样由式(1-6)就容易算出τ。例如，图1-1(a)表示间隙为δ的两个同心圆柱体，外筒固定，内筒以角速度ω旋转。内柱表面的粘性切应力为$\tau=\mu\omega r/\delta$。图1-1(b)表示两个同轴圆柱体，间隙为δ，内筒以速度U沿轴线方向运动，内筒表面的粘性切应力为$\tau=\mu U/\delta$。

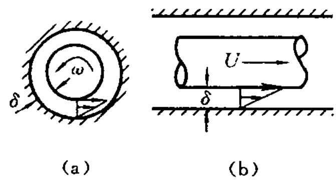


图1-1

2. 表面张力的计算

在一般工程问题中通常不考虑表面张力。但如果涉及到流体计量、物理化学变化等问题，则表面张力通常要加以考虑。

(1) 空气中的液滴

如果不考虑重力影响，液体内部压强为常数，根据式(1-7)知，

$1/R_1+1/R_2=$常数，又根据对称性知，两个主曲率半径相等，这时液滴必为球体，内外压强差为 $p-p_0=2\sigma/R$。如果考虑重力影响，则液滴不再是球体，越靠近下方，液滴的曲率半径越小。

（2）液体气泡

液体气泡有内表面和外表面，其半径分别为R_1 和R_2，参见图1-2。气泡内气体压强为p，外部空气压强为 p_0，液体的压强为 p_1，对于内表面和外表面分别应用式（1-7），有

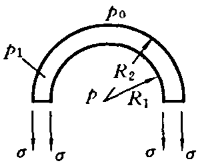


图 1-2

$$p-p_1=\frac{2\sigma}{R_1},\quad p_1-p_0=\frac{2\sigma}{R_2}$$

液膜很薄，内外半径可视为相等，即 $R_1=R_2=R$，上面两式相加，得

$$p-p_0=\frac{4\sigma}{R}$$

上式也可以这样推证：过球心作一切面将液体球膜分成两部分。对于其中一个半球面，压强差 $p-p_0$ 产生的压力应等于张力，而张力在内外表面均存在，于是，$(p-p_0)\pi R^2=2\sigma\cdot 2\pi R$，化简后就得到上式。

（3）毛细液柱

将一根细管插入液体中，由于表面张力的影响，管内液柱将上升h，如图1-3 所示。设液柱表面最低处的液体压强为p，外部大气压强为 p_0，则

$$(p_0-p)\frac{\pi d^2}{4}=\sigma\pi d\cos\theta$$

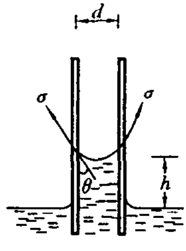


图 1-3

由流体静力学知，$p+\rho gh=p_0$，因此，毛细液体上升的高度为

$$h=\frac{4\sigma\cos\theta}{\rho gd}\qquad(1\text{-}8)$$

例如，水的 $\sigma=0.0728$ N/m，水与洁净玻璃的接触角 $\theta=8°$，$\rho=1000$ kg/m³，重力加速度$g=9.806$ m²/s，如果$d=3$ mm$=3\times10^{-3}$ m，算得 $h=9.8024\times10^{-3}$ m $=9.8024$ mm。又如水银，

$\sigma=0.5137\ \mathrm{N/m}$，与洁净玻璃的接触角$\theta=139^{\circ}$，如果$d=3\ \mathrm{mm}$，则$h=-0.05272\ \mathrm{m}=-52.72\ \mathrm{mm}$。负号表示毛细液柱是下降的。

（4）铅直固壁上的液面

如图 1-4 所示，表面张力将使液面弯曲，其爬升的最大高度为h。

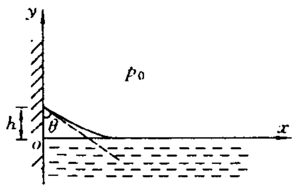


图 1-4

在弯曲液面上的任一点应用式（1-7），有

$$p_0-p=\frac{\sigma}{R}$$

式中，R是该点的曲率半径。根据高等数学，有

$$\frac{1}{R}=\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

设该点的高度为y，则$p_0-p=\rho g y$，因此，

$$y=\frac{\sigma}{\rho g}\cdot\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

令$a=\sqrt{\dfrac{2\sigma}{\rho g}}$，它具有长度的量纲。上式化为

$$\frac{2}{a^2}y=\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

上式两边同乘y'，并注意到$y''=\dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}$，则有

$$\frac{2}{a^2}yy'\mathrm{d}x=\frac{y'\mathrm{d}y'}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

由于$2yy'\mathrm{d}x=2y\mathrm{d}y=\mathrm{d}(y^2)$，$y'\mathrm{d}y'=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}(y'^2)$，上式积分，得

$$\left(\frac{y}{a}\right)^2=C-\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\tag{1-9}$$

当$x=\infty$时，$y=0$，$y'=0$，因此$C=1$。当$x=0$时，$y=h$，$y=-\cot\theta$，所以爬升高度为

$$h=a\sqrt{1-\sin\theta}=\sqrt{\frac{2\sigma}{\rho g}(1-\sin\theta)}$$

例如，水：$\sigma=0.0728\ \mathrm{N/m}$，$\theta=8°$，$a=\sqrt{\frac{2\sigma}{\rho g}}=3.8533\times10^{-3}\ \mathrm{m}$，$h=a\sqrt{1-\sin\theta}=3.5751\times10^{-3}\ \mathrm{m}$。

如果要求液面形状，则可将式(1-9)变成

$$y'^2=\frac{1}{\left[1-\left(\frac{y}{a}\right)^2\right]^2}-1=\frac{2\left(\frac{a}{y}\right)^2-1}{\left[\left(\frac{a}{y}\right)^2-1\right]^2} \tag{1-10}$$

为了积分上式，可作变量代换：$\sqrt{2}\left(\frac{a}{y}\right)=\cosh u$，其积分结果为

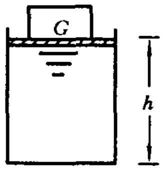
$$x=a\sqrt{2-\left(\frac{y}{a}\right)^2}-\frac{a}{\sqrt{2}}\operatorname{arcosh}\left(\sqrt{2}\frac{a}{y}\right)+x_0$$

当$x=0$时，$y=h=a\sqrt{1-\sin\theta}$，因此，积分常数x_0是

$$x_0=\frac{a}{\sqrt{2}}\operatorname{arcosh}\sqrt{\frac{2}{1-\sin\theta}}-a\sqrt{1+\sin\theta}$$

习题详解

【1-1】 底面积$A=0.2\ \mathrm{m}\times0.2\ \mathrm{m}$的水容器，水面上有一块无重密封盖板，板上面放置一个重量为$G_1=3000\ \mathrm{N}$的铁块，测得水深$h=0.5\ \mathrm{m}$，如题1-1图所示。如果将铁块加重为$G_2=8000\ \mathrm{N}$，试求盖板下降高度Δh。



题1-1图

【解】 利用体积弹性系数计算体积压缩率：$\Delta v/v=\Delta p/E$。而E可根据式(1-5)计算。值得注意的是，p表示绝对压强。

当地大气压未知，权且用标准大气压$p_0=$

1.01325×10^5 Pa代替。

$$p_1 = p_0 + \frac{G_1}{A} = 1.76325 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$p_2 = p_0 + \frac{G_2}{A} = 3.01325 \times 10^5 \text{ Pa}$$

由于 p_1/p_0 和 p_2/p_0 不是很大，所以可选用其中任一个，例如，选用 p_2/p_0来计算体积弹性系数：

$$E = np_0(p_2/p_0 + B) = 2.1299 \times 10^9 \text{ Pa}$$

在工程实际中，当压强不太高时，可取 $E=2.1\times10^9$ Pa。

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta p}{E} = \frac{p_2 - p_1}{E} = 6.4827 \times 10^{-5}$$

$$\Delta h = 6.4827 \times 10^{-5} h = 3.2413 \times 10^{-5} \text{ m}$$

【1-2】 海平面上海水的密度 $\rho_0=1026$ kg/m³，气压 $p_0=1.01325\times10^5$ Pa。试求马里亚纳海沟底部（深 11022 m）的海水密度及海水的体积弹性系数。

【解】 利用式(1-2)、(1-5)计算 ρ 和 E。计算 $h=11022$ m 深处的压强时使用静压公式，并把密度视作常数。

$$p = p_0 + \rho gh = 1109.9318 \times 10^5 \text{ Pa}$$

由
$$\frac{p}{p_0}=(B+1)\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n-B,\quad E=np_0\left(\frac{p}{p_0}+B\right)$$

得
$$\frac{\rho}{\rho_0}=1.04595,\quad \rho=1073.14 \text{ kg/m}^3$$

$$E=2.9151\times10^9 \text{ Pa}$$

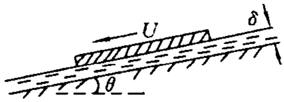
【1-3】 将一容器内的空气压缩，使其压强从 $p_1=0.98\times10^5$ Pa 增至 $p_2=5.88\times10^5$ Pa，温度从20℃升至78℃，问空气的体积减少了多少？

【解】 由气体状态方程 $pV=RT$ 得

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1T_2}{p_2T_1} = 0.1997$$

$$\frac{V_1 - V_2}{V_1} = 0.8003$$

【1-4】 倾角$\theta=25°$的斜面涂有厚度$\delta=0.5$ mm 的润滑油。一块重量未知，底面积 $A=0.02$ m^2 的木板沿此斜面以等速度 $U=0.2$ m/s 下滑，如题1-4 图所示。如果在板上加一个重量$G_1=5$ N 的重物，则下滑速度为$U_1=0.6$ m/s。试求润滑油的动力粘性系数μ。



题 1-4 图

【解】 板面受到的粘性切应力为$\tau=\mu U/\delta$，当物体作匀速运动时，外力和为零。设板自重为G，则

$$G\sin\theta=\mu\frac{U}{\delta}A$$

加上重物G_1时，

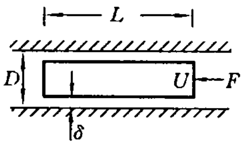
$$(G+G_1)\sin\theta=\mu\frac{U_1}{\delta}A$$

两式相减得

$$G_1\sin\theta=\mu\frac{U_1-U}{\delta}A$$

以G_1,θ,U_1,U,A 的值以及$\delta=0.5\times10^{-3}$ m 代入，解得$\mu=0.1321$ N·s/m^2。

【1-5】 动力粘性系数$\mu=0.065$ N·s/m^2 的油充满在活塞和气缸的间隙中，气缸直径$D=12$ cm，间隙$\delta=0.4$ mm，活塞长$L=14$ cm，如题1-5 图所示，若对活塞施以8.6 N的力，求活塞的运动速度。



题 1-5 图

【解】 间隙中的油液的速度呈线性分布，活塞表面的粘性切应力为$\tau=\mu U/\delta$，粘性力与外力F 相等，因此，

$$F=\mu\frac{U}{\delta}\pi(D-2\delta)L$$

将F,μ,δ,D,L 的值代入，长度单位一律使用m，则得$U=1.0095$ m/s。

【1-6】 有两个同心圆筒，长$L=300$ mm，间隙$\delta=10$ mm，间

隙内充有密度$\rho=900\ \mathrm{kg/m^3}$、运动粘性系数$\nu=0.26\times10^{-3}\ \mathrm{m^2/s}$的油，内筒直径$d=200\ \mathrm{mm}$，它以角速度$\omega=10\ \mathrm{rad/s}$转动，求施加于内筒的转矩$M$。

【解】 内筒的线速度为ωr，内筒表面的粘性切应力为$\tau=\mu\omega r/\delta$，内筒表面积为$2\pi rL$，因此，粘性力对转轴的力矩等于外力矩M，即

$$M=\mu\frac{\omega r}{\delta}2\pi rLr$$

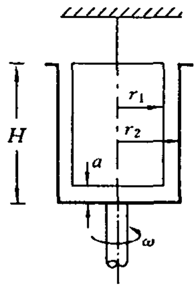
以$\mu=\rho\nu=0.234\ \mathrm{Pa\cdot s}$，$\omega=10\ \mathrm{rad/s}$，$\delta=10^{-2}\mathrm{m}$，$r=d/2=0.1\ \mathrm{m}$，$L=0.3\ \mathrm{m}$代入，得$M=0.4411\ \mathrm{N\cdot m}$。

如果我们再计算出外筒受到的粘性力的力矩，就会发现，内外筒受到的力矩并不相等。仿照上面的计算，外筒受到的力矩为

$$M_1=\mu\frac{\omega r}{\delta}2\pi(r+\delta)L(r+\delta)=0.5337\ \mathrm{N\cdot m}$$

事实上，内外筒的力矩应该相等。产生上面的误差的原因在于油液的速度并不是严格的线性分布。

【1-7】 粘度测量仪由内外两个同心圆筒组成，两筒的间隙充满油液。外筒与转轴连接，其半径为r_2，旋转角速度为ω。内筒悬挂于一金属丝下，金属丝上所受的力矩M可以通过扭转角的值确定。外筒与内筒底面间隙为a，内筒高H，如题1-7图所示。试推出油液动力粘性系数μ的计算式。



题1-7图

【解】 内筒侧面的粘性切应力为$\tau=\mu\omega r_2/\delta$，这里的$\delta=r_2-r_1$，粘性力对转轴的力矩为

$$M_1=\mu\frac{\omega r_2}{\delta}2\pi r_1Hr_1$$

在内筒底面上，距离转轴r处的粘性切应力为$\tau=\mu\omega r/a$，显然τ的值是变化的，值得注意的是内筒是静止的，虽然开始时它会发

生转动，但当扭转一个角度之后，金属丝的扭矩与粘性力矩平衡时，内筒则不再发生转动。而ωr是外筒的线速度。内筒的底面受到的粘性力对于转轴的力矩是

$$M_2 = \int_0^{r_1} \mu \frac{\omega r}{a} 2\pi r^2 \mathrm{d}r = \frac{1}{2}\mu \frac{\omega}{a}\pi r_1^4$$

显然，$M = M_1 + M_2$，因此，

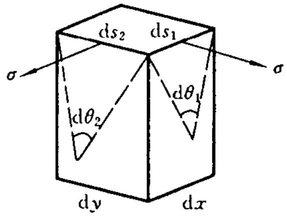
$$\mu = \frac{M}{\frac{\omega}{a}\pi r_1^4\left[\frac{1}{2} + \frac{2ar_2H}{r_1^2(r_2 - r_1)}\right]}$$

【1-8】 如题1-8图所示，设液面上某点的两个主曲率半径分别为R_1和R_2，试推导液体的压强p与液面上方大气压强p_0的差值的拉普拉斯公式：

$$p - p_0 = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

式中，σ是液体的表面张力系数。

【解】 在液面下方取一个柱体，底面积为$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，上表面的两条曲边的边长记为$\mathrm{d}s_1$和$\mathrm{d}s_2$，它们倾角变化量记为$\mathrm{d}\theta_1$和$\mathrm{d}\theta_2$。



题1-8图

设液面下方的压强为p，则液体压力与大气压力的合力为$(p-p_0)\mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2$，其方向就是表面的外法向。表面的两周边受表面张力作用，在$\mathrm{d}s_1$和$\mathrm{d}s_2$两条曲边上，表面张力与切面的夹角分别为$\mathrm{d}\theta_2/2$和$\mathrm{d}\theta_1/2$。压力和张力平衡：

$$(p - p_0)\mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2 = 2\sigma\mathrm{d}s_1\sin\frac{\mathrm{d}\theta_2}{2} + 2\sigma\mathrm{d}s_2\sin\frac{\mathrm{d}\theta_1}{2}$$

对于微小角度，$\sin\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\approx\frac{\mathrm{d}\theta}{2}$，上式化简得

$$p - p_0 = \sigma\left(\frac{\mathrm{d}\theta_2}{\mathrm{d}s_2} + \frac{\mathrm{d}\theta_1}{\mathrm{d}s_1}\right)$$

根据曲率半径的定义，$\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}s = 1/R$，因此，