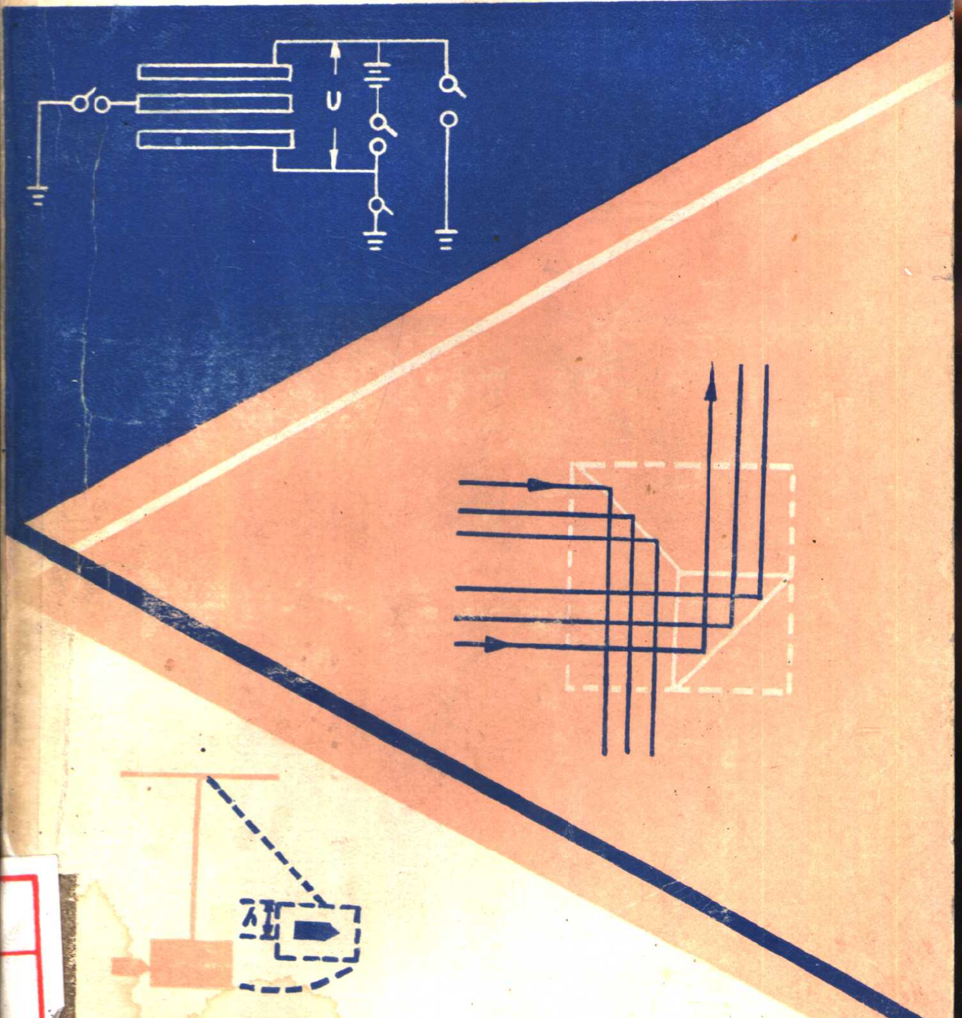
普通物理学解题指导



上海科学技术文献出版社

普通物理学解题指导

华东师范大学物理系
普通物理教研组　编

上海科学技术文献出版社

普通物理学解题指导

华东师范大学物理系
普通物理教研组 编

*

上海科学技术文献出版社出版

（上海市武康路2号）

新华书店上海发行所发行

上海商务印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/32 印张 14.5 字数 351,000

1984年11月第1版 1984年11月第1次印刷

印数：1--48,000

书号：13192·65 定价：2.08元

《科技新书目》81-209

编写说明

普通物理学的教学中，习题课是教学基本环节之一，为了提供一本习题课方面的教学参考书，特选编了一些例题汇编成册，其中每部分，先写明基本要求，以便读者掌握要点，并对每个题目辅以解答，解题中注重概念和分析。题末附有小结，着重分析解题的思路和解题中得到的启迪，供读者参考。

本书是以大专院校普通物理教师、中等学校物理教师以及自学普通物理课程的读者为主要对象，兼顾大学物理系低年级学生的需要。

在编写过程中，我们参考了目前使用较广泛的各种国内外教材，同时结合我们教学中所遇到的一些问题，选题是根据普通物理学教学大纲的基本要求，力求具有典型性和综合性。

本书包括力学、热学、电磁学、光学和原子物理学等内容的例题。其中力学部分由唐建国编，热学、电磁学和光学等部分由宣桂鑫编，原子物理和原子核物理部分由蒋可玉编。鉴于我们业务水平有限，教学经验不足，从选题到解答难免有不妥之处，恳请读者不吝指正。

编　　者

1983 年 12 月

目　录

• • •

第一部分 力 学

§1-1 速度、加速度、运动方程和轨道方程

一、基本要求

(1) 明确位矢 $\boldsymbol{r}$、速度 $\boldsymbol{v}$ 和加速度 $\boldsymbol{a}$ 这三个矢量的物理意义及其相互关系；认识时间 t 作为独立参量的含义。

(2) 牢固掌握 $\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{a}$ 这三个量在直角坐标系、极坐标系、自然坐标系中具体表示形式，及其它们之间的相互关系。

(3) 学会求轨道方程的一般方法，培养空间想象能力。

(4) 熟练运用矢量运算法则。

二、基本公式

(1) 设 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 为某正交坐标系的单位矢量，即基矢，则

$$\boldsymbol{A}=A_1\boldsymbol{e}_1+A_2\boldsymbol{e}_2+A_3\boldsymbol{e}_3 \tag{1-1-1}$$

其中 A_1、A_2、A_3 分别为矢量 $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 方向上的投影。如图 1-1-1 所示。

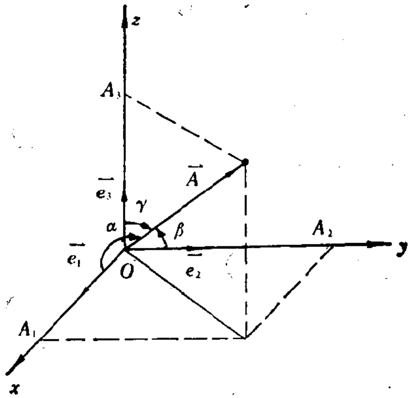


图 1-1-1

矢量 $\boldsymbol{A}$ 的绝对值为

$$A=|\boldsymbol{A}|=\sqrt{A_1^2+A_2^2+A_3^2} \tag{1-1-2}$$

设 α、β、γ 分别为矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 的夹角，则三个方向余弦分别为

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha &= A_1/A\\ \cos\beta &= A_2/A\\ \cos\gamma &= A_3/A\end{aligned}\right\} \tag{1-1-3}$$

矢量 $\boldsymbol{A}$ 的基矢

$$\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{A}/A = \cos\alpha\boldsymbol{e}_1 + \cos\beta\boldsymbol{e}_2 + \cos\gamma\boldsymbol{e}_3 \tag{1-1-4}$$

(2)

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \dot{\boldsymbol{r}} \tag{1-1-5}$$

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \dot{\boldsymbol{v}} = \ddot{\boldsymbol{r}} \tag{1-1-6}$$

(3)

$$\boldsymbol{r} = \int_{t_0}^{t}\boldsymbol{v}\,dt + \boldsymbol{r}_0 \tag{1-1-7}$$

$$\boldsymbol{v} = \int_{t_0}^{t}\boldsymbol{a}\,dt + \boldsymbol{v}_0 \tag{1-1-8}$$

其中 $\boldsymbol{r}_0$、$\boldsymbol{v}_0$ 分别为 $t=t_0$ 时的初位矢与初速度。

(4) 任意时刻 t, 质点在某坐标系中坐标为

$$\left.\begin{aligned}q_1 &= q_1(t)\\ q_2 &= q_2(t)\\ q_3 &= q_3(t)\end{aligned}\right\} \tag{1-1-9}$$

此即运动方程。

从运动方程组中消去时间 t, 得

$$\begin{cases}F_1(q_1,\ q_2)=0\\ F_2(q_2,\ q_3)=0\end{cases};\quad \begin{cases}F_2(q_2,\ q_3)=0\\ F_3(q_3,\ q_1)=0\end{cases};\quad \begin{cases}F_1(q_1,\ q_2)=0\\ F_3(q_3,\ q_1)=0\end{cases} \tag{1-1-10}$$

这三个方程组都是质点在空间的轨道方程，其中只有一个是独立的。

(5) 三种坐标系中的 $\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{a}$ 的具体表示如下表所示。

在柱面坐标系表中令 $z=\dot{z}=\ddot{z}=0$, 则就得平面极坐标的相应公式。其中 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 分别为 x、y、z 轴正方向的基矢; $\boldsymbol{R}^o$、$\boldsymbol{\varphi}^o$ 分别

坐标名称	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{a}$
直　　角	$x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$	$\dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{y}\boldsymbol{j}+\dot{z}\boldsymbol{k}$	$\ddot{x}\boldsymbol{i}+\ddot{y}\boldsymbol{j}+\ddot{z}\boldsymbol{k}$
柱　　面	$R\boldsymbol{R}^{\circ}+z\boldsymbol{k}$	$\dot{R}\boldsymbol{R}^{\circ}+R\dot{\varphi}\boldsymbol{\varphi}^{\circ}+\dot{z}\boldsymbol{k}$	$(\ddot{R}-R\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{R}^{\circ}+\frac{1}{R}\frac{d(R^2\dot{\varphi})}{dt}\boldsymbol{\varphi}^{\circ}+\ddot{z}\boldsymbol{k}$
自　　然	$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$	$\dot{s}\boldsymbol{\tau}$	$\ddot{s}\boldsymbol{\tau}+\frac{\dot{s}^2}{\rho}\boldsymbol{n}$

称为径向基矢和横向基矢；s 称为自然坐标，实际为弧长，而 $\boldsymbol{\tau}$、$\boldsymbol{n}$ 分别为自然坐标中切向基矢和法向基矢。

三、例题示范

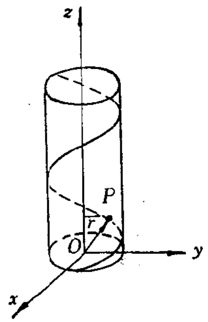


图 1-1-2

1-1-1 设有一质点在螺旋形轨道上运动，在任意时刻 t，它的位置用直角坐标系可表示为

$$\begin{cases} x=A\cos\omega t \\ y=A\sin\omega t \\ z=Bt \end{cases} \qquad (1)$$

这里 A、B、ω 都是大于零的常数。试求质点在任意时刻 t 的速度 $\boldsymbol{v}$、加速度 $\boldsymbol{a}$ 和其轨道方程。

［解］ 此题给出了用直角坐标系表示的质点的运动规律，即给出了运动方程。由此可知，质点是在半径为

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{A^2(\cos^2\omega t+\sin^2\omega t)}=\sqrt{A^2\cdot 1}=A$$

的圆柱面上以角速度 ω 绕 z 轴，以分速度

$$v_z=\dot{z}=B$$

作螺旋运动。根据这运动特点和已知条件，我们可用直角坐标系、柱面坐标系来解，又由于轨道实际已由运动方程确定，所以还可用自然坐标系来解，下面我们就用这三种坐标系分别求解。

(1) 第一解法

因为在直角坐标系中基矢 $\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{k}$, 则由(1-1-1)

式可知，位矢为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \tag{2}$$

把已知条件(1)代入，则得任意时刻 t 质点的位矢

$$\boldsymbol{r}=A\cos\omega t\boldsymbol{i}+A\sin\omega t\boldsymbol{j}+Bt\boldsymbol{k} \tag{3}$$

由此式我们可得出质点 P 离坐标原点的距离，即位矢的大小由式(1-1-2)可知，为

$$\begin{aligned} r=|\boldsymbol{r}|&=\sqrt{(A\cos\omega t)^2+(A\sin\omega t)^2+(Bt)^2} \\ &=\sqrt{A^2(\cos^2\omega t+\sin^2\omega t)+(Bt)^2} \\ &=\sqrt{A^2+B^2t^2} \end{aligned} \tag{4}$$

位矢的方向由(1-1-4)式给出，为

$$\boldsymbol{r}^0=\frac{\boldsymbol{r}}{r}=(A\cos\omega t\boldsymbol{i}+A\sin\omega t\boldsymbol{j}+Bt\boldsymbol{k})(A^2+B^2t^2)^{-\frac{1}{2}} \tag{5}$$

$\boldsymbol{r}^0$ 为位矢 $\boldsymbol{r}$ 的基矢，由上二式可见位矢的大小和方向都随时间 t 变化。

又由(1-1-5)式可得

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{d(x\boldsymbol{i})}{dt}+\frac{d(y\boldsymbol{j})}{dt}+\frac{d(z\boldsymbol{k})}{dt}$$

因为直角坐标系在本题是固定坐标系，故其三个轴向基矢 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 都是不随时间变化的固定矢量，所以

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}=0$$

则 $$\frac{d(x\boldsymbol{i})}{dt}=\frac{dx}{dt}\boldsymbol{i}+x\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}=\frac{dx}{dt}\boldsymbol{i}=\dot{x}\boldsymbol{i}$$

同理可得 $$\frac{d(y\boldsymbol{j})}{dt}=\dot{y}\boldsymbol{j},\quad \frac{d(z\boldsymbol{k})}{dt}=\dot{z}\boldsymbol{k}$$

所以质点 P 的速度为

$$\boldsymbol{v}=\dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{y}\boldsymbol{j}+\dot{z}\boldsymbol{k} \tag{6}$$

即得出表中的结果，又由公式(1-1-1)给出

$$\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k} \tag{7}$$

对照(6)(7)两式，可得

$$\begin{cases} v_x=\dot{x}=\dfrac{d(A\cos\omega t)}{dt}=-A\omega\sin\omega t \\ v_y=\dot{y}=\dfrac{d(A\sin\omega t)}{dt}=A\omega\cos\omega t \\ v_z=\dot{z}=\dfrac{d(Bt)}{dt}=B \end{cases} \tag{8}$$

代回(6)式，则得质点 P 在任意时刻 t 的速度为：

$$\boldsymbol{v}=-A\omega\sin\omega t\boldsymbol{i}+A\omega\cos\omega t\boldsymbol{j}+B\boldsymbol{k} \tag{9}$$

由公式(1-1-2)得

$$v=|\boldsymbol{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2} \tag{10}$$

代入(8)式，则

$$\begin{aligned} v&=\sqrt{(-A\omega\sin\omega t)^2+(A\omega\cos\omega t)^2+B^2} \\ &=\sqrt{A^2\omega^2(\sin^2\omega t+\cos^2\omega t)+B^2} \end{aligned}$$

考虑到 $\sin^2\omega t+\cos^2\omega t=1$，则得

$$v=\sqrt{A^2\omega^2+B^2} \tag{11}$$

可见速度 $\boldsymbol{v}$ 的大小，即速率 v 是个不随时间变化的常数，但由公式(1-1-4)可知，其速度基矢 $\boldsymbol{\tau}$ 并不是常数，因为

$$\boldsymbol{\tau}=\frac{\boldsymbol{v}}{v}=(-A\omega\sin\omega t\boldsymbol{i}+A\omega\cos\omega t\boldsymbol{j}+B\boldsymbol{k})(A^2\omega^2+B^2)^{-\frac{1}{2}} \tag{12}$$

它是时间 t 的函数。由此可见，尽管速率 v 为常数，但质点沿螺旋轨道运动时，速度方向会随时间变化，所以速度也会随时间变化，因此质点作变速运动。究竟其速度如何变化，则还需看其加速度 $\boldsymbol{a}$。

由公式(1-1-6)与式(7)，同时考虑到 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 是固定基矢，不难得出

$$\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{dv_x}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{dv_y}{dt}\boldsymbol{j}+\frac{dv_z}{dt}\boldsymbol{k} \tag{13}$$

又由公式(1-1-1)可得

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k} \tag{14}$$

对照(13)(14)两式，同时将(8)式代入，可得

$$\begin{cases} a_x=\dfrac{dv_x}{dt}=\dfrac{d(-A\omega\sin\omega t)}{dt}=-A\omega^2\cos\omega t \\ a_y=\dfrac{dv_y}{dt}=\dfrac{d(A\omega\cos\omega t)}{dt}=-A\omega^2\sin\omega t \\ a_z=\dfrac{dv_z}{dt}=\dfrac{d(B)}{dt}=0 \end{cases} \tag{15}$$

代回到(14)式，则得加速度

$$\boldsymbol{a}=-A\omega^2\cos\omega t\boldsymbol{i}-A\omega^2\sin\omega t\boldsymbol{j} \tag{16}$$

同样由公式(1-1-2)给出其大小为

$$\begin{aligned} a=|\boldsymbol{a}| &=\sqrt{(-A\omega^2\cos\omega t)^2+(-A\omega^2\sin\omega t)^2} \\ &=\sqrt{(A\omega^2)^2(\cos^2\omega t+\sin^2\omega t)} \\ &=A\omega^2 \end{aligned} \tag{17}$$

其基矢由公式(1-1-4)给出

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{a}=-\cos\omega t\boldsymbol{i}-\sin\omega t\boldsymbol{j} \tag{18}$$

由此可见质点在运动过程中，虽然加速度 $\boldsymbol{a}$ 的大小 a 不变，但方向 $\boldsymbol{a}^0$ 随时间变化，因此质点作变加速运动。

由(1-1-9)和(1-1-10)两式可知，若消去(1)式中任两式里的 t，可得反映质点运动的同一轨道的三组方程组，其中任意一组都可表示质点运动的轨道方程。这里 $q_1=x$, $q_2=y$, $q_3=z$。如由(1)式中第一式的平方加上第二式的平方，则可得

$$x^2+y^2=A^2 \quad 即 \quad F_1(x, y)=x^2+y^2-A^2=0 \tag{19}$$

将(1)式的第三式改成 $t=\dfrac{z}{B}$ 形式，然后分别代入第一、二式，则

可得

$$x=A\cos\frac{\omega z}{B} \quad 即 \quad F_2(z,\ x)=A\cos\frac{\omega z}{B}-x=0 \tag{20}$$

$$y=A\sin\frac{\omega z}{B} \qquad F_3(y,\ z)=y-A\sin\frac{\omega z}{B}=0 \tag{21}$$

由上三式中任选两式，如选(19)、(20)则得

$$\begin{cases} x^2+y^2=A^2 \\ x=A\cos\dfrac{\omega z}{B} \end{cases} \tag{22}$$

令 $\dfrac{\omega z}{B}=2\pi$，则 $z=\dfrac{2\pi B}{\omega}$。可见质点轨道曲线是在半径为 A，母线和 z 轴平行的圆柱面上的螺距为 $\dfrac{2\pi B}{\omega}$ 的螺旋线。由于(21)式的平方加上(20)式的平方正好等于(19)式，可见这三个方程只有二个是独立的，因此我们在这三个方程中，任选两个组成方程组所表示的空间曲线，就是质点的轨道曲线。故(22)式可以看作质点轨道方程。

(2) 第二解法

由于质点在半径为 A 的圆柱面上沿 z 轴正向绕 z 轴作螺旋运动，显然如用柱面坐标来表示，则会很方便。而在柱面坐标中，空间任意一点 P 的位矢由

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{R}+z\boldsymbol{k} \tag{23}$$

表示，如图 1-1-3。不难看出，它和直角坐标系中坐标的几何关系为

$$\begin{cases} x=R\cos\varphi \\ y=R\sin\varphi \\ z=z \end{cases} \tag{24}$$

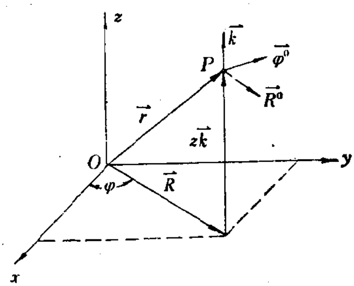


图 1-1-3

其中 φ 为极角。把此式和(1)式进行比较可知，用柱面坐标表示

的质点 P 的运动方程为

$$\begin{cases} R=A \\ \varphi=\omega t \\ z=Bt \end{cases} \tag{25}$$

而柱面坐标三个基矢分别为 $\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{R}^o$, $\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{\varphi}^o$, $\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{k}$。将上式代入(23)式，可得任意时刻质点位矢为

$$\boldsymbol{r}=A\boldsymbol{R}^o+Bt\boldsymbol{k} \tag{26}$$

其形式比用直角坐标所表示的位矢式(3)要简单得多。但要注意：在直角坐标系中三个基矢 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 都是固定基矢，即其方向不随时间变化；而在柱面坐标系中，除 $\boldsymbol{k}$ 固定外，$\boldsymbol{R}^o$、$\boldsymbol{\varphi}^o$ 的方向都会随质点 P 的运动而改变，即它们是活动基矢。由计算给出

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{R}^o}{dt}=\dfrac{d\varphi}{dt}\boldsymbol{\varphi}^o=\dot{\varphi}\boldsymbol{\varphi}^o \\ \dfrac{d\boldsymbol{\varphi}^o}{dt}=-\dfrac{d\varphi}{dt}\boldsymbol{R}^o=-\dot{\varphi}\boldsymbol{R}^o \end{cases} \tag{27}$$

根据公式(1-1-5)和(23)式，可得

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{R}}{dt}+\dot{z}\boldsymbol{k}$$

又因为 $\boldsymbol{R}=R\boldsymbol{R}^o$，同时考虑到(27)式，则

$$\frac{d\boldsymbol{R}}{dt}=\frac{d(R\boldsymbol{R}^o)}{dt}=\frac{dR}{dt}\boldsymbol{R}^o+R\frac{d\boldsymbol{R}^o}{dt}$$

$$=\dot{R}\boldsymbol{R}^o+R\dot{\varphi}\boldsymbol{\varphi}^o$$

所以速度 $\boldsymbol{v}$ 用柱面坐标表示应为

$$\boldsymbol{v}=\dot{R}\boldsymbol{R}^o+R\dot{\varphi}\boldsymbol{\varphi}^o+\dot{z}\boldsymbol{k} \tag{28}$$

即为前表所示的形式。而由(1-1-1)式可知

$$\boldsymbol{v}=v_R\boldsymbol{R}^o+v_\varphi\boldsymbol{\varphi}^o+v_z\boldsymbol{k} \tag{29}$$

对照上、下两式，不难看出

$$
\begin{cases}
v_R = \dot{R} \\
v_\varphi = R\dot{\varphi} \\
v_z = z
\end{cases}
\tag{30}
$$

这就是柱面坐标中速度分量的表达式。把(25)式代入(30)式，则可得

$$
\begin{cases}
v_R = \dfrac{dA}{dt} = 0 \\
v_\varphi = A\,\dfrac{d(\omega t)}{dt} = A\omega \\
v_z = \dfrac{d(Bt)}{dt} = B
\end{cases}
\tag{31}
$$

将(31)式代回(29)式，则得

$$
\boldsymbol{v} = A\omega\boldsymbol{\varphi}^o + B\boldsymbol{k} \tag{32}
$$

当然此式也可由(25)式代入(28)式而直接求得。从此式可见，质点在 $\boldsymbol{R}^o$ 方向上不存在分速度，这点是可以预料的。因为质点是在半径为 A 的圆柱面上运动，如果存在径向分速度 v_R，则质点将会离开柱面，就和题目的要求不符。

由(1-1-2)式可知，速率

$$
v = \sqrt{v_R^2 + v_\varphi^2 + v_z^2} \tag{33}
$$

把(31)式代入(33)式，则可得

$$
v = \sqrt{(A\omega)^2 + B^2} \tag{34}
$$

此式和(11)式完全一样。由此可见，尽管采用不同的坐标系来描述质点运动，只是数学形式不一样，所反映质点运动的实质是一样的。

由公式(1-1-6)、式(28)以及式(27)，得

$$
\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{R}\boldsymbol{R}^o + R\dot{\varphi}\,\boldsymbol{\varphi}^o + \dot{z}\boldsymbol{k})
$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{d\dot{R}}{dt}\boldsymbol{R}^{o}+\dot{R}\frac{d\boldsymbol{R}^{o}}{dt}+\frac{d(R\dot{\varphi})}{dt}\boldsymbol{\varphi}^{o}+R\dot{\varphi}\frac{d\boldsymbol{\varphi}^{o}}{dt}+\frac{d\dot{z}}{dt}\boldsymbol{k}\\
&=\ddot{R}\boldsymbol{R}^{o}+\dot{R}(\dot{\varphi}\boldsymbol{\varphi}^{o})+(\dot{R}\dot{\varphi}+R\ddot{\varphi})\boldsymbol{\varphi}^{o}-R\dot{\varphi}\dot{\varphi}\boldsymbol{R}^{o}+\ddot{z}\boldsymbol{k}\\
&=(\ddot{R}-R\dot{\varphi}^{2})\boldsymbol{R}^{o}+(2\dot{R}\dot{\varphi}+R\ddot{\varphi})\boldsymbol{\varphi}^{o}+\ddot{z}\boldsymbol{k}\\
&=(\ddot{R}-R\dot{\varphi}^{2})\boldsymbol{R}^{o}+\frac{1}{R}\frac{d}{dt}(R^{2}\dot{\varphi})\boldsymbol{\varphi}^{o}+\ddot{z}\boldsymbol{k} \qquad (35)
\end{aligned}
$$

即前表所给出的结果。又由(1-1-1)式可知

$$\boldsymbol{a}=a_{R}\boldsymbol{R}^{o}+a_{\varphi}\boldsymbol{\varphi}^{o}+a_{z}\boldsymbol{k} \qquad (36)$$

对照(35)、(36)两式，则得

$$
\begin{cases}
a_{R}=\ddot{R}-R\dot{\varphi}^{2}\\
a_{\varphi}=2\dot{R}\dot{\varphi}+R\ddot{\varphi}=\dfrac{1}{R}\dfrac{d(R^{2}\dot{\varphi})}{dt}\\
a_{z}=\ddot{z}
\end{cases} \qquad (37)
$$

把(25)式代入上式，可得

$$
\begin{cases}
a_{R}=\dfrac{d^{2}A}{dt^{2}}-A\left[\dfrac{d(\omega t)}{dt}\right]^{2}=-A\omega^{2}\\
a_{\varphi}=2\dfrac{dA}{dt}\cdot\dfrac{d(\omega t)}{dt}+A\dfrac{d^{2}(\omega t)}{dt^{2}}=0\\
a_{z}=\dfrac{d^{2}(Bt)}{dt^{2}}=0
\end{cases} \qquad (38)
$$

把(38)式代回(36)式，可知

$$\boldsymbol{a}=-A\omega^{2}\boldsymbol{R}^{o} \qquad (39)$$

由此可见，加速度 $\boldsymbol{a}$ 是绕 z 轴转动的向轴加速度，其方向和矢径 $\boldsymbol{R}$ 的方向相反，垂直指向 z 轴，而它的大小由 (1-1-2) 式可知，为

$$a=|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_{R}^{2}+a_{\varphi}^{2}+a_{z}^{2}}$$

代入(38)式，不难得出

$$a=A\omega^{2} \qquad (40)$$

加速度的大小和用直角坐标系表示的结果，即(17)式完全相同。

把(25)式中第三式除以第二式，可消去 t，则得

$$z=\frac{B}{\omega}\varphi$$

与第一式联立，就可得质点用柱面坐标表示的轨道方程

$$\begin{cases} z=\dfrac{B}{\omega}\varphi \\ R=A \end{cases} \tag{41}$$

当 $\varphi=2\pi$ 时，$z=\dfrac{2\pi B}{\omega}$，此即为螺旋线的螺距，和直角坐标表示的结果一样。由此可见，不管在什么坐标系中，求轨道方程的方法都是设法消去时间 t，再任选二个方程构成方程组。

(3) 第三解法

由于本题给出了质点的运动规律，也就确定了质点的轨道方程。在轨道已知的情况下，为了使问题简单、物理图像清楚起见，我们往往就把此轨道作为坐标轴，以弧长 s 作为坐标来进行讨论，即用自然坐标来表示质点的位置、速度与加速度。又因为在自然坐标中，位矢 $\boldsymbol{r}$ 和坐标 s 一一对应，即

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$$

当 s 确定后，$\boldsymbol{r}$ 也相应确定了。因此，用自然坐标来确定质点的位置时，实际上是用弧长 s 这个标量来表示，而不是用位矢 $\boldsymbol{r}$ 这个矢量来表示的。$\boldsymbol{r}$ 和 s 的关系由图 1-1-4 给出。

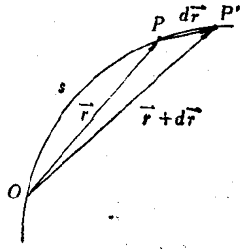


图 1-1-4

又因为弧元 ds 等于位移绝对值，

$$ds=|d\boldsymbol{r}|=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}$$
$$=\sqrt{(\dot{x}\,dt)^2+(\dot{y}\,dt)^2+(\dot{z}\,dt)^2}$$

因为时间总是愈来愈大，所以 $dt>0$，这样上式中根号里 dt 就可