《现代控制系统理论》小丛书

线性控制系统的能控性和能观测性

中国科学院数学研究所
控制理论研究室编

科学出版社

《现代控制系统理论》小丛书

线性控制系统的能控性和能观测性

中国科学院数学研究所控制理论研究室编
（执笔人：关肇直　陈翰馥）

科学出版社
1975

内 容 简 介

本书是《现代控制系统理论》小丛书之一．这套小丛书介绍了现代控制系统理论的各个部分，并着重说明这种理论是怎样由工程实践的需要而产生，怎样应用它来解决工程设计中的实际问题．

书共分三章，它仅仅论述了发展得较成熟、应用得最广泛的线性系统的能控性与能观测性概念，简单地介绍了控制系统理论中直接建立在这两个概念之上的部分，并举例说明了这些理论如何用来指导工程设计的实践．

《现代控制系统理论》小丛书

线性控制系统的能控性和能观测性

中国科学院数学研究所控制理论研究室编

（执笔人：关肇直　陈翰馥）

*

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1975年11月第一版　开本：787×1092　1/32

1975年11月第一次印刷　印张：4 1/8

印数：0001—10,050　字数：90,000

统一书号：13031·343

本社书号：522·13—1

定价：0.43元

《现代控制系统理论》小丛书总序

在五十年代末六十年代初，在大量工程实践的基础上，特别是在空间技术等方面的实践的基础上，自动调节原理发展成现代控制理论．这种新的理论对于控制系统的性能提供了更深入的认识，使得在实践中发现的一些现象得到更好的说明．这些理论上的成果在以往的十几年当中又在许多空间技术的型号与航海、航空的型号的工程设计中得到了应用，受到了检验．

工程实践迫切需要发展这种理论，而许多新技术——其中特别是计算技术与科学理论——特别是现代数学的方法，使现代控制理论的发展成为可能．为了控制更复杂的系统，并提高控制的精度，数字控制逐渐代替模拟装置，这一方面是利用数字电子计算机，一方面有赖于利用新的数学方法．

毛主席教导我们："**我们必须打破常规，尽量采用先进技术，在一个不太长的历史时期内，把我国建设成为一个社会主义的现代化的强国．**"近年来，在毛主席的革命路线指引下，我国科学技术蓬勃发展．我国人造地球卫星的发射成功以及其它尖端技术上的伟大成就都表明我国的控制技术已经达到了很高的水平．我们应当本着"**精益求精**"的精神，使利用数字电子计算机来控制的这种先进技术更广泛地应用于各种有关的工程技术中去，并且在工程实践中不断总结提高．我们编写这一套《现代控制系统理论》小丛书，就是为了介绍现代控制系统理论的各个部分，并着重说明这种理论怎样由工程实践的需要而产生，又怎样用来解决工程设计中的实际问题．

前　　言

在五十年代末和六十年代工程技术实践的基础上，特别是在空间技术实践的基础上，控制系统理论取得了重大进展．尤其是状态变量描述方法对控制系统的内部联系提供更深入的理解．早在六十年代一开始被揭示出来的两个基本概念：能控性与能观测性，标志了我们对于控制系统认识的深化．这种在实践基础上提出来的基本概念使我们更好地理解了控制系统的一些属性及其相互关联．十几年来空间技术的实践检验了基于这些概念的现代控制系统理论．

这本小册子仅仅论述发展得较成熟、应用得最广泛的线性系统的能控性与能观测性概念，并简单地介绍一下控制系统理论中直接建立在这两个概念之上的部分，并举例说明这些理论如何用来指导工程设计的实践．《现代控制系统理论》小丛书中许多别的书将用到这些基本概念．

本书数学符号

$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\lambda}$	矢量
$\mathbf{0}$	零矢量
A, B, C, P	矩阵
O	零矩阵
A^{-1}	A阵的逆阵
A^{τ}	A阵的转置
$\mathbf{R}^n$	n维欧几里得(Euclid)空间
L_r^2	希尔伯特(Hilbert)空间,它的元是以r个平方可积的复值函数为分量的矢量
$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{R}^n(\text{或 } L_r^2)}$	在$\mathbf{R}^n$(或L_r^2)空间中的内积
T^*	算子T的伴随算子: $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$. 当$T$是阵时,$T^*$就是$T$取共轭复数再转置
$\dot{x}(t)$	$\dfrac{dx(t)}{dt}$
$\dot{B}(t)$	阵$B(t)$的每个元素取对t的导数
$L\{Q\}$	Q阵的列张成的线性子空间
$\oplus$	直接和
$\det A$	阵A的行列式
$\operatorname{Adj} A$	以A阵的代数余子式作为元而形成的阵

max	极大
min	极小
inf	下确界
Re	实部
Im	虚部
$\|a\|$	a 的绝对值
tr	迹
$\\|\cdot\\|$	范数
$\perp$	垂直
$\in$	属于
$\subset$	包含

目　　录

第一章　时变系统的能控性和能观测性

§1. 问题的提法

为了控制一个工程系统（例如一枚导弹、一颗人造卫星）达到某种目的，首先必须了解系统的状态．而要了解系统的状态，只有通过对系统的某些数量特征——例如飞行器的位置、速度等——进行量测，然后根据量测数据加以判断．但当飞行器在高空飞行时，要量测它的数量特征，并不是很简单的事情．因此，很有必要知道，对工程系统的哪些特征进行量测，就足以确定系统的全部状态？这就是能观测性问题．了解了系统的状态后，为了使系统达到一定的技术目的，还必须加以控制．但如果控制量选得不合适，就不能把系统控制到预定的目的．因此需要知道，对系统的哪些状态加以控制，就足以把系统引向预定目的？这就是能控性问题．

举通讯卫星为例．常常需要使通讯卫星保持同步赤道圆形轨道．但一般卫星有环绕其初始同步位置的一种长时间的摆形运动，所以要保持赤道同步轨道，必须用推力来抵消这种运动．由于近圆形的卫星运动方程能线性化，所以可以用现代控制理论中的线性系统的能控性与能观测性的理论来判断，应该采用哪几个量作为观测量，应该在哪几个方向上加推力作为控制量．根据这种判断可以制定卫星的自动轨道控制方案．使卫星的星载数字控制器根据量测数据，计算出校正卫星轨道所需的推力，发出控制指令，自动地使推力发动机点火，以保持赤道同步轨道．由此可知，对系统能控性和能观测

性的判断，对设计控制系统是极为重要的.

为了从直观上了解能控性和能观测性，我们举卫星的姿态控制为例. 我们只考虑单通道姿态控制的简化模型.

用 ϑ 表示卫星的姿态角，ω 表示姿态角速度，α 表示由各种干扰(例为卫星质心偏移，推力偏差，状态方程的解耦等)引起的角加速度，u 表示控制力矩所产生的角加速度. 这时，卫星绕质心运动在单平面内的简化模型为:

$$\begin{cases}\dot{\vartheta} = \omega, \\ \dot{\omega} = \alpha + u, \\ \dot{\alpha} = 0.\end{cases} \tag{1.1}$$

从这个模型出发，我们看到由于控制量 u 的影响，可以控制 ω 到任意值，因此也能控制 ϑ 到任意值. 所以 ϑ 和 ω 是能控的. 但是从上面这组方程的第三个方程看，干扰角加速度 α 不受 u 的直接影响，而且在方程的右端也不出现能控的状态量 ϑ 和 ω，就是说 α 也不受控制量 u 的间接影响. 象 α 这种既不受控制量 u 的直接影响，也不受 u 的间接影响的状态变量，就是不能控的.

现在考察观测性问题. 如果对 ϑ, ω, α 三个状态变量全部进行量测，也就是我们能了解系统的全部状态变量，不言而喻，这时系统是完全能观测的. 但在工程实践中，量测一个量就要一套设备，而添加一套设备，譬如说在空间技术中，无论从减轻重量来说，或是从减少造价来说都是应该避免的. 所以应该力求通过量测尽可能少的量而保证系统的能观测性.

对系统 (1.1)，如果仅观测一个状态变量 ϑ，那么经过微分后，我们也就获得了 ω 及 α 的值. 因此，这时系统也是完全能观测的. 但是如果仅观测 ω，这时，虽然 ω 和 α 仍是能观测的，但 ϑ 这个量既没有被直接观测，也没有出现在能观测的状态量 ω 及 α 的方程的右端，也就是说不能间接地受到观测.

因此 ϑ 是观测不到的．系统(1.1)就不是完全能观测的．

在上面这个简单的例子中，我们对能控性和能观测性做了直观的解释和直观的判断．在后面的章节中，我们将看到，这种直观的判据有它的普遍意义．

§2. 线性系统的能控性

考察变系数线性系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t), \tag{2.1}$$

$$\mathbf{y}(t) = C(t)\mathbf{x}(t), \tag{2.2}$$

这里 $\mathbf{x}(t)$ 是 n 维状态变量，$\mathbf{u}(t)$ 是 r 维的输入，$\mathbf{y}(t)$ 是 m 维的输出．

设区间 J 是系统 (2.1)，(2.2)的定义域．如不特别说明，下面用到的各种时刻，例如 t_0，t_α 等，假设都在系统 (2.1)，(2.2)的定义域 J 内．

设 t_0 为初始时刻，t_α 为任意时刻．要考察方程(2.1)满足初值 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ 的解在任意时刻 t_α 的值．

我们要求输入 $\mathbf{u}(t)$ 的元在所考察的区间 $[t_0, t_\alpha]$ 上是平方可积的：$\int_{t_0}^{t_\alpha} |\mathbf{u}(t)|^2 dt < +\infty$．即容许控制 $\mathbf{u} \in L_r^2[t_0, t_\alpha]$．这里 $L_r^2[t_0, t_\alpha]$ 是希尔伯特(Hilbert)空间，其元是具有 r 个分量的矢量，且每个分量是按勒贝格 (Lebesgue) 意义平方可积的复值函数．这空间的内积定义如下：

设

$$\mathbf{u}^1 = \begin{bmatrix} u_1^1 \\ \vdots \\ u_r^1 \end{bmatrix} \in L_r^2[t_0, t_\alpha], \quad \mathbf{u}^2 = \begin{bmatrix} u_1^2 \\ \vdots \\ u_r^2 \end{bmatrix} \in L_r^2[t_0, t_\alpha],$$

则 $\mathbf{u}^1$ 和 $\mathbf{u}^2$ 的内积为

$$\langle \mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2\rangle_{L^2} = \int_{t_0}^{t_\alpha} \sum_{i=1}^{r} u_i^1(s)\overline{u_i^2(s)}ds,$$

此处 $\overline{u_i^2(s)}$ 为 $u_i^2(s)$ 的共轭复数.

在(2.1)及(2.2)中，$A(t)$ 是 $n\times n$ 阵，$B(t)$ 是 $n\times r$ 阵，$C(t)$ 是 $m\times n$ 阵.

设 $A(t)$ 的元 $a_{ij}(t)$是定义在$[t_0, t_\alpha]$ 上的绝对可积函数：$\int_{t_0}^{t_\alpha}|a_{ij}(t)|dt<\infty$，$B(t)$ 和 $C(t)$ 的元 $b_{ij}(t)$ 和 $C_{ij}(t)$ 是定义在 $[t_0, t_\alpha]$ 上的平方可积的函数：

$$\int_{t_0}^{t_\alpha}|b_{ij}(t)|^2dt<\infty,\quad \int_{t_0}^{t_\alpha}|C_{ij}(t)|^2dt<\infty.$$

在下面的章节中，如不特别说明，我们认为上面对系统(2.1)(2.2)所做的种种假设是得到满足的．利用 Schwarz 不等式知：

$$\sum_{k=1}^{r}\int_{t_0}^{t_\alpha}|b_{ik}(t)u_{kj}(t)|dt\leqslant\sum_{k=1}^{r}\left[\int_{t_0}^{t_\alpha}|b_{ik}(t)|^2dt\cdot\int_{t_0}^{t_\alpha}|u_{kj}(t)|^2dt\right]^{1/2}.$$

所以 $B(t)\mathbf{u}(t)$ 的元是绝对可积的函数．因此存在唯一解 $\mathbf{x}(\cdot)$，使 $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$，且方程(2.1)几乎处处得到满足[1].

设 $\Phi(t, s)$ 是方程(2.1)的基本解阵：

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, s)=A(t)\Phi(t, s), \tag{2.3}$$

$$\Phi(t, s)\Phi(s, \tau)=\Phi(t, \tau),\quad \Phi(t, t)=I, \tag{2.4}$$

这里 I 表示单位阵.

满足初值 $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$ 的解$\mathbf{x}(\cdot)$在 t_α 时刻的值为

$$\mathbf{x}(t_\alpha)=\Phi(t_\alpha, t_0)\mathbf{x}_0+\int_{t_0}^{t_\alpha}\Phi(t_\alpha, s)B(s)\mathbf{u}(s)ds. \tag{2.5}$$

我们定义

$$T_\alpha \mathbf{u} = \int_{t_0}^{t_\alpha} \Phi(t_\alpha, s)B(s)\mathbf{u}(s)ds, \quad \mathbf{u} \in L_r^2[t_0, t_\alpha]. \tag{2.6}$$

下面来证 T_α 是 $L_r^2[t_0, t_\alpha] \to \mathbf{R}^n$ 的连续线性变换. 首先，它是线性变换，这很显然.

现设 $\mathbf{u}_k = \begin{bmatrix} u_1^k \\ \vdots \\ u_r^k \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_k, \mathbf{u} \in L_r^2[t_0, t_\alpha]$.

$\mathbf{u}_k \to \mathbf{u}(k \to \infty$, 在 $L_r^2[t_0, t_\alpha]$中). 我们只要证明

$$\|T_\alpha \mathbf{u}_k - T_\alpha \mathbf{u}\|_{\mathbf{R}^n} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

就知道 T_α 是连续的了.

注意到 $\Phi(t_\alpha, s)$ 是连续函数阵，所以 $\Phi(t_\alpha, s)$ 诸元在 $[t_0, t_\alpha]$ 上有界，其绝对值小于常数 C. 所以

$$\|T_\alpha \mathbf{u}_k - T_\alpha \mathbf{u}\|_{\mathbf{R}^n} \leqslant C\left\| \int_{t_0}^{t_\alpha} B(s)[\mathbf{u}_k(s) - \mathbf{u}(s)]ds \right\|_{\mathbf{R}^n}$$

$$= C\left\{ \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{r} \int_{t_0}^{t_\alpha} b_{ij}(s)(u_j^k(s) - u_j(s))ds \right]^2 \right\}^{1/2}$$

$$\leqslant C\left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r} \int_{t_0}^{t_\alpha} |b_{ij}(s)|^2 ds \int_{t_0}^{t_\alpha} |u_j^k(s) - u_j(s)|^2 ds \right\}^{1/2}.$$

因为已设 $b_{ij}(t)$ 在 $[t_0, t_\alpha]$ 上平方可积，所以

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r} \int_{t_0}^{t_\alpha} |b_{ij}(s)|^2 ds < \infty, \text{ 因此}$$

$$\|T_\alpha \mathbf{u}_k - T_\alpha \mathbf{u}\|_{\mathbf{R}^n} \leqslant \text{常数}.$$

$$\cdot \left[\sum_{j=1}^{r} \int_{t_0}^{t_\alpha} |u_j^k(s) - u_j(s)|^2 ds \right]^{1/2}$$

$$= \text{常数} \cdot \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}\|_{L^2} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

这样我们就证明了 T_α 确实是 $L_r^2[t_0, t_\alpha] \to \mathbf{R}^n$ 的连续线性变换.

定义. 如果线性系统 (2.1) 对 t_0 时刻存在时刻 $t_\alpha > t_0$,

$t_\alpha \in J$，对 t_0 时刻的任意初值 $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$ 可找到容许控制 $\mathbf{u}\in L_r^2[t_0, t_\alpha]$，使 $\mathbf{x}(t_\alpha)=\mathbf{0}$，则称线性系统(2.1)在 t_0 时刻是完全能控的，或者在 $[t_0, t_\alpha]$ 区间上是完全能控的.

如果系统(2.1)对任意的 $t_0\in J$，$t_0\neq J$ 的右端都完全能控，则称系统(2.1)为完全能控的.

从上面的定义来看，粗略地说，能控性就是存在容许控制，能够把系统从任意的初始状态引向原点. 在现代控制理论中，有时用到"能达性"这个概念. 能达性就是存在容许控制能把系统从原点引向预先指定的状态. 确切地说，如果任给在 t_α 时刻的值 $\mathbf{x}(t_\alpha)=\mathbf{x}_\alpha$，可找到容许控制 $\mathbf{u}\in L_r^2[t_0, t_\alpha]$，使 $T_\alpha\mathbf{u}=\mathbf{x}_\alpha$，则称系统(2.1)在 $[t_0, t_\alpha]$ 上完全能达. 下面可以看到，对连续时间的线性系统来讲，能控性和能达性是完全等价的.

注 1. 从能控性定义很容易看出，如果系统(2.1)在 $[t_0, t_\alpha]$ 上完全能控，那么对 $t_\beta>t_\alpha$，系统(2.1)在 $[t_0, t_\beta]$ 上也完全能控. 这因为

$$\begin{aligned}&\Phi(t_\beta, t_0)\mathbf{x}_0+\int_{t_0}^{t_\beta}\Phi(t_\beta, s)B(s)\mathbf{u}(s)\,ds\\&=\Phi(t_\beta, t_\alpha)\left[\Phi(t_\alpha, t_0)\mathbf{x}_0+\int_{t_0}^{t_\beta}\Phi(t_\alpha, s)B(s)\mathbf{u}(s)ds\right],\end{aligned}$$

并且，$L_r^2[t_0, t_\alpha]$ 中的函数，只要在 $(t_\alpha, t_\beta]$ 上定义为 $\mathbf{0}$，就是 $L_r^2[t_0, t_\beta]$ 中的函数了.

注 2. 如果在方程(2.1)右端叠加一项不依赖于控制量的 n 维绝对可积函数 $\mathbf{f}(t)$，也就是考察系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=A(t)\mathbf{x}(t)+B(t)\mathbf{u}(t)+\mathbf{f}(t),$$

这个方程满足初值 $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$ 的解在 t_α 时刻的值为

$$\mathbf{x}(t_\alpha)=\Phi(t_\alpha, t_0)\left[\mathbf{x}_0+\int_{t_0}^{t_\alpha}\Phi(t_0, s)\mathbf{f}(s)\,ds\right]+T_\alpha\mathbf{u}.$$

根据定义，从这个表达式很容易看出，系统(2.1)在$[t_0, t_\alpha]$

上完全能控等价于这个系统在 $[t_0, t_\alpha]$ 上完全能控. 也就是说,对系统(2.1)加上不依赖于控制量的扰动,并不影响它的能控性.

定理 1. i) 系统(2.1)在 $[t_0, t_\alpha]$ 上完全能控的充分必要条件是 T_α 不降秩[1], 即 T_α 的值域张满 $\mathbf{R}^n$ 全空间(这就是系统(2.1)在 $[t_0, t_\alpha]$ 上完全能达的意思).

ii) T_α 不降秩的充分必要条件是阵

$$T_\alpha T_\alpha^* = \int_{t_0}^{t_\alpha} \Phi(t_\alpha, s) B(s) B^*(s) \Phi^*(t_\alpha, s)\, ds \qquad (2.7)$$

不降秩,此处 T_α^* 表示算子 T_α 的伴随算子.

证明. i) 根据在 $[t_0, t_\alpha]$ 上完全能控的定义,对任一 $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$, 存在 $\mathbf{u} \in L_r^2[t_0, t_\alpha]$, 使 $\mathbf{x}(t_\alpha) = \mathbf{0}$, 即

$$T_\alpha \mathbf{u} = -\Phi(t_\alpha, t_0)\mathbf{x}_0.$$

因为 $\Phi(t_\alpha, t_0)$ 是满秩的 $n \times n$ 阵,所以当 $\mathbf{x}_0$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中任意变化时, $-\Phi(t_\alpha, t_0)\mathbf{x}_0$ 可以是 $\mathbf{R}^n$ 中的任意元. 所以系统(2.1)在 $[t_0, t_\alpha]$ 上完全能控等价于连续线性变换 T_α 不降秩.

ii) 根据本节附录的辅助定理, T_α 不降秩等价于阵 $T_\alpha T_\alpha^*$ 不降秩. 剩下要证的是写出 $T_\alpha T_\alpha^*$ 的形式.

对任一 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{u} \in L_r^2[t_0, t_\alpha]$, 有

$$\begin{aligned}
\langle T_\alpha \mathbf{u}, \mathbf{x}\rangle_{\mathbf{R}^n} &= \left\langle \int_{t_0}^{t_\alpha} \Phi(t_\alpha, s) B(s)\mathbf{u}(s)\, ds, \mathbf{x}\right\rangle_{\mathbf{R}^n} \\
&= \int_{t_0}^{t_\alpha} \mathbf{x}^* \Phi(t_\alpha, s) B(s)\mathbf{u}(s)\, ds \\
&= \int_{t_0}^{t_\alpha} [B^*(s)\Phi^*(t_\alpha, s)\mathbf{x}]^* \mathbf{u}(s)\, ds \\
&= \langle \mathbf{u}(\cdot), B^*(\cdot)\Phi^*(t_\alpha, \cdot)\mathbf{x}\rangle_{L^2},
\end{aligned}$$

这里 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示内积,足标 L^2 表示所属的空间.

另一方面

1) 见本节附录.

$$\langle T_\alpha \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle_{\mathbf{R}^n} = \langle \mathbf{u}, T_\alpha^* \mathbf{x} \rangle_{L^{2[2]}},$$

所以

$$T_\alpha^* \mathbf{x} = B^*(\cdot)\Phi^*(t_\alpha, \cdot)\mathbf{x}^{[2]}, \qquad (2.8)$$

因此

$$T_\alpha T_\alpha^* = \int_{t_0}^{t_\alpha} \Phi(t_\alpha, s) B(s) B^*(s) \Phi^*(t_\alpha, s) ds.$$

证毕.

注 1. 这个定理的 i) 说明对连续时间的线性系统能控性和能达性的等价性.

注 2. 令

$$W(t_\alpha, t_0) = \int_{t_0}^{t_\alpha} \Phi(t_0, s) B(s) B^*(s) \Phi^*(t_0, s) ds,$$

由于阵 $\Phi(t_\alpha, t_0)$ 不降秩,并且(2.7)式的 $T_\alpha T_\alpha^*$ 可表达为

$$T_\alpha T_\alpha^* = \Phi(t_\alpha, t_0) W(t_\alpha, t_0) \Phi^*(t_\alpha, t_0),$$

所以阵 $W(t_\alpha, t_0)$ 满秩等价于 (2.7) 满秩. 因此系统 (2.1) 在 $[t_0, t_\alpha]$上完全能控的充分必要条件是阵 $W(t_\alpha, t_0)$ 满秩.

上面我们给出了系统在有限时间区间内完全能控性的一个判据. 下面我们再给出另外的判据, 从中可以推出判断定常系统能控性的有用的条件 (见第二章§1).

定理 2. 系统(2.1) 在 $[t_0, t_\alpha]$ 上完全能控的充分必要条件是阵 $K(t) = \Phi(t_\alpha, t)B(t)$ 的行线性独立,即对任一非 **0** 的 n 维矢量 $\mathbf{a}$, 有

$$\mathbf{a}^\tau K(t) \not\equiv \mathbf{0}, \quad t \in [t_0, t_\alpha],$$

此处上标“τ”表示转置.

证明. 充分性: 设 $K(t)$ 的行线性独立. 反设系统 (2.1) 在 $[t_0, t_\alpha]$ 上不完全能控. 根据定理 1, T_α 降秩. 所以存在非 **0** 的 n 维矢量 $\mathbf{a}$, 对一切 $\mathbf{u} \in L_r^2[t_0, t_\alpha]$, 有

$$\langle \mathbf{u}, T_\alpha^* \mathbf{a} \rangle_{L^2} = \langle T_\alpha \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle_{\mathbf{R}^n} = 0,$$

所以 $T_\alpha^* \mathbf{a} = 0$, 根据(2.8)知

$$B^*(t)\Phi^*(t_\alpha, t)\mathbf{a} \equiv 0, \qquad t \in [t_0, t_\alpha],$$

或者

$$\mathbf{a}^\tau \Phi(t_\alpha, t)B(t) \equiv 0, \qquad t \in [t_0, t_\alpha],$$

即 $K(t)$ 的行线性相关．得出矛盾！因此(2.1)在 $[t_0, t_\alpha]$ 上完全能控．

必要性：设系统(2.1)在 $[t_0, t_\alpha]$ 上完全能控．根据定理 1，T_α 不降秩．反设存在 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$，使 $\mathbf{a}^\tau \Phi(t_\alpha, t)B(t) \equiv \mathbf{0}$，$t \in [t_0, t_\alpha]$，则对一切 $\mathbf{u} \in L_r^2[t_0, t_\alpha]$ 有 $\mathbf{a}^\tau T_\alpha U = 0$．这和 T_α 满秩相矛盾．所以 $K(t)$ 的行在 $[t_0, t_\alpha]$ 上线性独立．

证毕．

注．$K(t)$ 阵是连续线性变换 T_α 的积分核．因此定理 2 可以改述如下：使 $L_r^2[t_0, t_\alpha] \to \mathbf{R}^n$ 的连续线性变换 T_α：

$$T_\alpha \mathbf{u} = \int_{t_0}^{t_\alpha} \Phi(t_\alpha, t)B(t)\mathbf{u}(t)dt, \quad \mathbf{u} \in L_r^2[t_0, t_\alpha]$$

满秩的充分必要条件是它的积分核的行线性独立．

在讨论完全能观测性时，将要用到这个注记．

下面我们给出一个使系统(2.1)在 $[t_0, t_\alpha]$ 上完全能控的充分条件．

定理 3． 设系统(2.1)中的 A 阵和 B 阵分别是$(n-2)$次和$(n-1)$次连续可微．记

$$B_1 = B, \quad B_i = -AB_{i-1} + \dot{B}_{i-1}, \quad i = 2, \cdots, n.$$

若阵 $Q(t) \equiv [B_1(t) \vdots B_2(t) \vdots \cdots \vdots B_n(t)]$ 当 $t = t_\alpha$ 时满秩，则系统(2.1)在 $[t_0, t_\alpha]$ 上完全能控．

证明． 反设系统(2.1)在 $[t_0, t_\alpha]$ 上不完全能控．根据定理 2，存在 n 维矢量 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$，使

$$\mathbf{a}^\tau K(t) \equiv \mathbf{a}^\tau \Phi(t_\alpha, t)B(t) \equiv \mathbf{a}^\tau \Phi(t_\alpha, t)B_1(t) \equiv \mathbf{0},$$

$$t \in [t_0, t_\alpha], \tag{2.9}$$

因为 $\Phi(t, t_\alpha) \cdot \Phi(t_\alpha, t) = I$，所以用(2.3)、(2.4)知

$$\frac{d\Phi(t_\alpha, t)}{dt} = -\Phi(t_\alpha, t)\frac{d\Phi(t, t_\alpha)}{dt} \cdot \Phi(t_\alpha, t)$$