误差理论与数据处理

丁振良 编

哈尔滨工业大学出版社

误差理论与数据处理

丁振良　主编

哈尔滨工业大学出版社

（黑）新登字第4号

内 容 提 要

本书系统地介绍了测量误差的基本理论与测量数据处理的基本方法，包括测量误差的基本概念、特征规律性、表述方法及传递计算，一般测量问题中的数据处理方法，不确定度的估计与合成，最小二乘法和回归分析。本书为高等工科院校精密仪器专业本科生教材，也适合有关工程技术人员自学。

误 差 理 论 与 数 据 处 理

丁振良 主编

*

哈尔滨工业大学出版社出版
新华书店首都发行所发行
哈尔滨市外文印刷厂印刷

*

开本787×1092 1/16 印张 16.75 字数 385千字
1992年12月第1版 1992年12月第1次印刷
印数 1—3000
ISBN 7-5603-0388-9/TH·29 定价4.65元

前　　言

测量误差是不可避免的，研究测量误差的特征规律，正确地处理测量数据，以便获得可靠的测量结果，并对所得结果的可信赖程度作出评定，这是每一个从事精密测量、精密仪器研究工作的技术人员必须掌握的基本知识。对测量误差的分析研究不仅用于给出测量数据的正确处理方法和相应的精度估计，而且对合理地拟定测量方法和设计测量仪器有指导意义。随着测量技术的发展，对测量误差和测量数据处理方法的研究变得越来越重要。

本书以概率论与数理统计为基础，叙述了测量误差的基本理论与数据处理的基本方法。在编写体系和叙述方法上除考虑教学要求外，还顾及到自学的需要。为便于读者掌握和运用所讲述的内容，编入了不同层次的例题和一定数量的习题。

本书为高等工科院校精密仪器专业本科生教材，也可供有关技术人员自学。

本书由丁振良主编，参加编写的有丁振良（第一、二、三、五、六、七章），赵辉（第四章），谭久彬（第八章）。本书由蒋作民主审。

因编者水平所限，难免有不当之处，望读者批评指正。

编　　者

1992年3月

目　录

第一章 概 述

恰当地处理测量数据，给出正确的处理结果，并对所得结果的可靠性作出确切的估计和评价，这是测量工作中的基本环节。因此，有关测量误差与测量数据处理的基本理论和基本方法是测量工作者必须掌握的基本知识和基本技能。本书的有关内容不仅适用于测量数据的处理和可靠性的评定，而且对分析、改进以及拟定新的测量方法都具有指导意义，同时也为仪器检定和精度分析提供了基本依据。

本章首先对有关的一些基本概念作一简要说明。

§ 1-1 测量的基本概念

测量误差的理论及测量数据处理的研究与测量内容有着不可分割的联系。数据处理和误差分析不可避免地要涉及到测量的仪器设备、原理方法、环境条件等方面。

一、测量的定义

为确定被测对象的量值而进行的实验称为测量。测量过程中，将被测量与体现测量单位的标准量进行比较，比较的结果给出被测量是测量单位的若干倍或几分之几。设L为被测量，E为测量单位，则有如下测量方程式

$$L = qE \tag{1-1}$$

式中比值$q=L/E$为反映被测量值的数字，对于确定的量L，q值与所选测量单位的大小成反比。例如对于1m的长度量，若以cm为单位应为100cm，以mm为单位则为1 000mm。科学研究和生产实践中，测量的具体问题是多种多样的，涉及到各类被测量，测量的精度和其它要求各不相同，测量方法也千差万别。但测量数据处理的基本理论和基本方法却是相同的。

二、测量单位和测量基准

对不同的被测量采用不同的测量单位（见附录二）。在国际单位制中，测量单位一般采用十进制，只有少数测量单位例外。

测量过程中，测量单位必须以物质形式体现出来，这就需要有相应的标准器具和仪器。

为保证量值准确统一，对基本量已建立了相应的基准，由基准给出量值单位的真值（约定真值）。为满足不同精度的测量要求，需要建立量值的传递系统。实现量值的逐级传递需要一定的测量器具和测量方法，并应有相应的精度要求。

例如在长度计量中，以光在真空中1/299792458秒的时间间隔内行程的长度定义为

"米"，这就是长度的基准。在规定的条件下，可以将这一基准长度以一定的精度复现出来，并按量块与线纹尺两大系统分别逐级传递下去，直到被测量值。根据被测量的精度要求，由传递系统按相应级别传递尺寸。

三、测量方法及其分类

对不同的被测量和不同的测量要求，需要采用不同的测量方法。这里，测量方法是泛指测量中所涉及到的测量原理、测量方式、测量系统及测量环境条件等诸项测量环节的总和。测量中这些环节的一系列误差因素都会使测量结果偏离真实值而产生一定的误差。因此，对测量过程诸环节的分析研究是测量数据处理及其精度估计的基础。

按不同的原则测量方法可分为直接测量和间接测量，绝对测量和相对测量，单项测量和综合测量，工序测量和终结测量，静态测量和动态测量等。测量方法不同，测量数据的具体处理方法也不相同。

1. 直接测量与间接测量

直接测量是将被测量与作为标准的量直接进行比较，或者用经标准量标定了的仪器对被测量进行测量，从而直接（不需再按某种函数关系计算）获得被测量值。例如，用尺子测量长度、用温度计测量温度、用电流表测量电流就可分别直接得到长度、温度、电流量。

间接测量是指直接测量与被测量有确定函数关系的其它量，然后按这一函数关系间接地获得被测量值的方法。例如，为测量圆的面积s，可直接测量其直径d，然后根据函数关系$s=\pi d^2/4$，求得面积s。

间接测量的数据处理方法，随测量的具体问题而有所不同。

2. 绝对测量和相对测量

在绝对测量中，通过测量所得数据直接得到被测量值的绝对大小。

相对测量所得测量数据是被测量相对于标准量的偏差值，被测量的绝对大小应是标准量与这一偏差值的和。

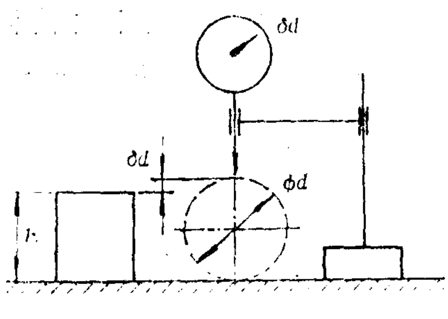

图 1-1

例如图1-1中，为测量直径d，可用中心长度与圆柱公称直径相同的量块校对指示表，使示值为零。用该表测量圆柱直径时，其示值为圆柱直径与量块尺寸之差，即$\Delta d=d-h$，圆柱直径则为量块尺寸与该偏差尺寸之和，即$d=h+\Delta d$。

与绝对测量相比，相对测量中的某些误差因素的影响大为减小，因此就某些方面来说相对测量比较容易满足精度要求。

3. 静态测量与动态测量

静态测量是指对某种不随时间改变的量进行的测量。

动态测量是指对随时间变化的量连续进行的测量，其数据处理通常要用到随机过程理论。

此外，测量方法还可按其它原则分类。

四、测量的精确度

测量的精确程度以“不确定度”表征。不确定度表示由于存在测量误差而使被测量值不能肯定的程度，它是评价测量方法优劣的基本指标之一。根据误差理论提供的依据，可对测量的不确定度作出估计。为了满足对测量精确度的要求，需要在深入分析测量方法的基础上，正确运用误差理论知识，恰当地设计测量方法。但应看到，提高测量精确度的任何努力都要付出一定的代价，因此对测量精确度的要求应该适当，不能盲目地追求高精度。从经济效果的角度考虑，在满足测量要求的前提下，应尽量降低对精确度的要求。

§ 1-2 测量误差的基本概念

测量误差是本书研究的核心内容，先对测量误差的一些基本概念作简略说明。

一、测量的绝对误差

人们在进行各种实验时，所获得的实验结果往往以相应数据的形式反映出来。例如，天文观测、大地测量、标准量值的传递、机械零件加工、仪器的装调、实弹射击、导弹发射等，这些实验结果给出相应的实验数据。

实验给出的某个量值的实验数据总不会与该量值的理论期望值完全相同，因此称实验或实验数据存在误差。即

$$实验误差=实验数据-期望值 \tag{1-2}$$

例如，按某一尺寸加工零件时，该尺寸的设计值是加工尺寸的期望值，加工完成以后所获得的零件尺寸与这一期望值之差，就是加工误差；按某一要求调整仪器的工作状态时，规定的工作状态参数（如电流、电压、温度等）是调整的期望值，调整后的工作状态参数与期望的工作状态参数之差就是仪器的调整误差；打靶射击时、靶心是期望的弹着点位置，实际弹着点偏离靶心的一段距离就是射击误差。

在精密测试工作中，对某个量进行测量，该量的客观真值（客观上的实际值）是测量的期望值，测量所得数据与其差值即为测量误差。因此，更具体地说，测量误差定义为被测量的测得值与其相应的真值之差。即

$$测量误差=测得值-真值 \tag{1-3}$$

对于测量仪器

$$示值误差=仪器示值-真值 \tag{1-4}$$

应当注意，这里的“真值”是指被测量的客观真实值。一般来说，这一客观真值是未知的，仅在一些特殊的场合真值才是已知的，例如某些理论分析值。国际计量大会规定的最高基准量也可看作是真值，这是约定真值。有时可通过某种手段获得这一真值的近似值，当这一近似值与真值的差值在实际问题中可以忽略不计时，就可以用这一近似值代替真值，从而计算出测量误差。此时，称这一近似值为相对真值。

此外，应注意测量误差的正负符号，弄错符号就会给出错误的结果。

上述定义是误差的基本表达形式。为区别于相对误差，上述定义的误差也称绝对误差，以下如不特别指明，测量误差均指绝对误差。

绝对误差给出的是测量结果的实际误差值，其量纲与被测量的量纲相同。在对测量结果进行修正时要依据绝对误差的数值。在对误差特征规律的研究、不确定度的合成及一般测量问题的数据处理中，通常也使用绝对误差这一概念。

二、测量的相对误差

测量误差可按绝对误差和相对误差两种方式表示，选用何种方式依所研究的具体问题而定。

相对误差定义为测量的绝对误差与被测量的真值之比，即

$$\text{相对误差}=\frac{\text{绝对误差}}{\text{真值}}\times 100\% \tag{1-5}$$

通常测得值的绝对误差很小，因而相对误差又可表示为

$$\text{相对误差}=\frac{\text{绝对误差}}{\text{测得值}}\times 100\% \tag{1-6}$$

相对误差通常以百分数（%）表示，为无名数，因而不能给出被测量的量纲。但应注意，其分子与分母应具有相同的量纲。

用相对误差能确切地反映测量效果，被测量的量值大小不同，允许的测量误差也应有所不同。被测量的量值越小，允许的测量绝对误差值也应越小。引入相对误差的概念就能很好地反映这一差别。

测量的相对误差应限定在一定的范围内，这个限定范围以最大允许相对误差给出

$$\text{最大允许相对误差}=\frac{\text{最大允许绝对误差}}{\text{真值（或测得值）}}\times 100\%$$

在某些场合下，还使用引用误差。引用误差也属相对误差，常常用于仪表，特别是多档仪表的精度评定。因其各档次、各刻度位置上的示值误差都不一样，不宜使用绝对误差。而按式（1-6）计算相对误差也十分不便。为便于仪表精度等级的评定，规定了引用误差

$$\text{引用误差}=\frac{\text{示值误差}}{\text{最大示值}}\times 100\% \tag{1-7}$$

这里，示值误差是仪表指示数值的绝对误差；而最大示值是指该仪表测量范围的上限。按仪表的精度，规定了最大的允许引用误差，仪表各刻度位置上的引用误差不得超过这一最大允许值。

例 1-1 测量某一质量$G_1=50\text{g}$，误差为$\delta_1=2\text{g}$；测量另一质量$G_2=2\text{kg}$，误差为$\delta_2=50\text{g}$，问哪一个质量的测量效果较好？

解. 测量G_1的相对误差为

$$\gamma_1=\frac{\delta_1}{G_1}\times 100\%=\frac{2}{50}\times 100\%=4\%$$

测量G_2的相对误差为

$$\gamma_2=\frac{\delta_2}{G_2}\times 100\%=\frac{50}{2000}\times 100\%=2.5\%$$

所以，G_2的测量效果较好。

例 1-2 经检定发现，量程为250V的2.5级电压表在123V处的示值误差最大，为5V。问该电压表是否合格？

解 按电压表精度等级的规定，2.5级表的最大允许引用误差为2.5%。

而该电压表的最大引用误差应为

$$q=\frac{5}{250}\times 100\%=2\%$$

因最大引用误差小于最大允许引用误差，故该电压表合格。

三、测量误差的普遍性

实践证明，任何一种测量方法所获得的任何一个测量数据，无一是绝对准确而不含有误差的，只不过是测量误差大小不同而已。

即使是最高基准的测量传递手段（测量仪器设备和测量方法）也不是绝对准确的。以长度基准为例，18世纪末法国科学院提出“米制”建议，1791年法国国会批准，决定以通过巴黎的地球子午线长度的四千万分之一定义为“米”，1799年按这一定义制成了铂杆“档案尺”，以其两端之间的距离定义为“米”。这是第一个米的实物基准。但由于档案尺变形造成较大的误差，1872年在讨论米制的国际会议上决定废弃“档案尺”的米定义。1889年第一次国际计量大会决定采用铂铱合金的X形尺作为国际米原器，以该尺中性面上两端的二条刻线在0℃时的长度为“米”，其复现精度为$\pm(1\sim2)\times10^{-7}$。随着科学技术的发展，建立自然基准的条件日趋成熟，1960年第十一次国际计量大会决定废弃米原器，并定义“米”为Kr86原子在$2P_{10}$—$5d_5$能级间跃迁时，所幅射的谱线在真空中波长的1650763.73倍。使长度基准的复现精度提高到$\pm(0.5\sim1)\times10^{-8}$。1983年第十七届国际计量大会通过了“米”的新定义，即米是光在真空中1/299792458秒的时间间隔内行程的长度。废除原来的米定义，相对不确定度最高为$\pm1.3\times10^{-10}$。

可以预见，随着科学技术的进步，米基准的复现精度必将进一步的提高。但无论怎样改进和完善，米基准的复现也不会绝对准确。

在一定条件下，精确度的提高总要受到一定的限制。测量数据不可避免地含有一定的误差，只要误差在一定的范围内就应认为是正常的。

四、研究测量误差的意义

测量误差是不可避免的。因而，研究测量误差的规律具有普遍的意义。研究这一规

律的直接目的，一是要减小误差的影响，提高测量精度；二是要对所得结果的可靠性作出评定，即给出精确度的估计。

只有掌握测量误差的规律性，才能合理地设计测量仪器，拟定良好的测量方法，并正确地处理测量数据，以便在保证一定经济效果的条件下，尽量减小测量误差的影响，使所得测量结果有较高的可信程度。

随着科学技术的发展和生产水平的提高，对测量技术提出越来越高的要求。可以说在一定程度上，测量技术的水平反映了科学技术和生产发展的水平，而测量精度则是测量技术水平的主要标志之一。在某种意义上，测量技术进步的过程就是克服误差的过程，就是对测量误差规律性认识深化的过程。

当然，无论采取何种措施，测量误差总是不可穷尽的，精度的提高总要受到一定的限制。因而就要求对测量误差的影响作出评定，即应对测量精度作出估计，其目的就是要给出测量的可信程度。

因此，任何测量数据总是相应于一定的精度，精度不同，其使用价值也就不同。可以说未知其精度的测量数据是没有意义的。因为这样的测量数据的可信程度是未知的，所以无法使用。在精密测试中，任何精密测量数据总要给出相应的精确度。

在精密测量中，为给出测量数据的精度，应确切掌握测量误差的特征规律，以便对数据的精度做出可靠的评定。

五、测量误差的分类

从不同的角度出发，可对测量误差作出种种区分，按照测量误差的来源可将其区分为装置误差、环境误差、方法误差、人员误差等；按照对测量误差掌握的程度，可将其区分为已知的和未知的误差；按照测量误差的特征规律，可将其区分为系统误差、随机误差和粗大误差等。

测量误差的分析研究与其特征规律有极为密切的关系，下面主要按测量误差的特征规律进行分类讨论，简述如下。

1．系统误差

在顺次测量的系列测量结果中，其值固定不变或按某一确定规律变化的误差称为系统误差。

所谓确定的规律是指在顺次考察各测量结果时，测量误差具有确定的值，在相同的考察条件下，这一规律可重复地表现出来，因而原则上可用函数的解析式、曲线或数表表达出来。通常，系统误差是由固定的或按一定规律变化的因素造成的。例如，加工误差会使量块具有一恒定的系统误差；温度变化会使刻尺产生误差；电压波动会使仪表示值产生误差等。

应当指出，系统误差的规律性是有确定的前提条件的，离开了这一前提条件，系统误差的规律性就无从谈起。

系统误差虽有确定的规律性，但这一规律性并不一定确知。按照对其掌握的程度可将系统误差分为已知的系统误差（确定性的系统误差）和未知的系统误差（不确定的系统误差）。

显然，数值已知的系统误差可通过“修正”的方法从测量结果中消除。

2．随机误差

在同一条件下对同一被测量进行多次重复测量时，各测量数据的误差值或大或小，或正或负，其取值的大小没有确定的规律性，是不可预知的，这类误差称为随机误差，也称为偶然误差。

例如，在同一条件下对某一工件的尺寸进行多次测量，测量结果的微小的无规则的变化就表明存在随机误差。

随机误差即为随机变量，具有随机变量的一切特征。它虽不具有确定的规律性，但却服从统计规律，其取值具有一定的分布特征，因而可利用概率论提供的理论和方法来研究。

在单个的测量数据中，这类误差表现出无规则性，但在大量的测量数据中却表现出统计规律性。这类误差相互间具有正负抵消的作用，这就是极为重要的“抵偿性”，是随机误差的统计特性的集中表现。

由于随机误差取值是不可预知的，因而不能通过“修正”的方法消除掉。随机误差对测量结果的影响不能以误差的具体值去表达，只能用统计的方法作出估计。

3．粗大误差

超出正常范围的大误差称为粗大误差，也称为“过失误差”。

所谓正常范围是指误差的正常分布规律决定的分布范围，只要误差取值不超过这一正常的范围，应是允许的。而粗大误差则超出了误差的正常分布范围，具有较大的数值。它虽具有随机性，但不同于随机误差。

含有粗大误差的数据是个别的、不正常的，粗大误差使测量数据受到了歪曲。因而，含粗大误差的数据应舍弃不用。

一般粗大误差是由测量中的失误造成的。例如，使用有缺陷的测量器具，测量操作不当，读数或记录错误，突然的冲击振动，电压波动，空气扰动等，都可使测量结果产生个别的大误差。

因为粗大误差与正常的随机误差或系统误差相比仅表现出数值大小上的差别，因而在数值差别不太明显时，则不容易区分。所以，测量数据是否含有粗大误差，应按统计方法进行判断。

六、测量误差的来源

测量数据经一定的方法处理以后，即可得到待求结果，这个结果称为估计量，或称为测量结果。这一结果的主要误差成分是测量误差，它是由测量过程中的诸因素造成的，可概括为如下几方面。

1．测量方法误差

测量方法误差是由测量原理的近似，测量方法的不完善，测量操作不正确等原因造成的，有时被测对象本身也会造成一定误差。

对测量原理或测量方法作了某种简化和近似以后，可能产生一定的误差，这是原理误差。例如，用线性关系代替非线性关系，用弦长代替弧长等都会带来这种误差。

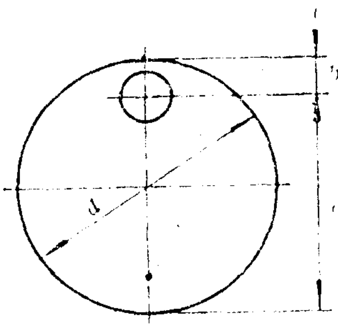

图 1-2

测量方法不完善也是常见的误差因素，例如，通过测量圆上三点确定被测圆心的位置，工件本身圆度误差造成所给圆心位置有误差。这是由被测对象本身误差引起的，因测量方法不完善而反映到测量结果中。又如，尺寸测量时被测尺寸与标准尺不在同一直线上，则可引入一次方误差。

图1-2中，待测量为a，现改为b，则d的误差就会反映到测量结果中，这是基准变换造成的。

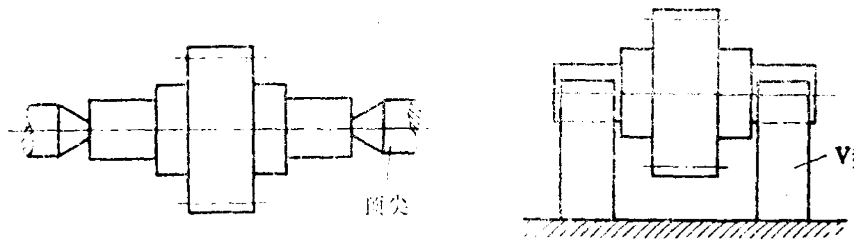

图 1-3

图1-3中的情形与图1-2类似，加工时以顶尖定位，测量时以外圆定位，基准的改换也会带来误差。

这类误差有时会限制测量精度的进一步提高。

2．测量器具误差

测量仪器、设备和各种器具是测量误差的重要来源，包括仪器设备设计的原理误差，仪器零、部件的加工、装配、调整及检验误差，零件的磨损、受力变形，元器件的老化等。

恰当的测量方法和正确的测量操作可使部分这类误差得到控制。例如，当度盘有偏心误差时，使用对径位置上的两条刻线测量，测量结果的平均值即可消除这一误差的影响（§6-3）。在尺寸测量时，将被测尺寸放在标准尺的延长线上，可减小或消除仪器的一次方误差。

通常，作为商品的仪器设备，均由检定证书或检定规程给出了相应的精度指标，在作精度分析时可直接查用。

3．测量环境条件误差

测量环境条件对测量结果有很大影响，如测量环境的温度、气压、湿度、振动、灰尘、气流等。环境条件偏离标准状态会引入一定的测量误差。例如，激光光波比长测量中，空气的温度、湿度和大气压力影响到空气的折射率，因而影响到激光波长，造成测量误差。气流对高精度的准直测量也有一定影响。在一般的几何量计量中，温度的波动常会造成较大的影响。

通过对环境条件的改善可减小这种误差，但要付出一定的经济代价。在采取适当的测量方法以后，也可获得减小这种误差的效果。例如采用相对法测量时，温度偏差引起的工件变形和标准件的变形相近，因而可消除或减小这种误差。

4．人员误差

测量者调整仪器和测量操作的熟练程度、操作习惯、生理条件，以及测量时的情

绪，责任心等都可能影响到测量结果。随着测量技术的进步，自动化的测量仪器有了很大发展，测量过程和数据处理摆脱了人的具体干预，使测量者对测量过程与数据处理的人为影响大为减小。此时人为因素只在仪器的调整等环节中才起一定的作用，因而对测量者的要求也有所降低。

对测量误差来源的分析是测量精度分析的依据，并为我们指出了减小测量误差、提高测量精度的途径。进一步分析这些误差因素，可帮助我们分析误差的系统性和随机性，这对数据处理和精度估计极为有用。

当然，对误差来源的深入分析必须结合测量实践的具体问题。测量误差因素是多种多样的，没有固定的模式，因而离开了测量的具体问题就无法对误差因素作出确切的分析。

§ 1-3　数理统计的基本概念

测量数据处理要用到数理统计中的若干结果。为便于叙述，下面结合测量数据处理的问题对有关数理统计的几个基本概念作简要的说明。这些概念的严格叙述和讨论请参阅数理统计方面的有关著述。

一、总体与子样

数理统计是研究随机现象的数学分支，它以概率论为基础，根据统计实验获得的数据对相应问题作出估计与检验。

在数理统计中，把对某一问题的研究对象的全体称为总体（或母体）ξ，组成总体的每个基本单元ξ_i称为个体，从总体中随机抽取n个个体（ξ_1，ξ_2，…，ξ_n）称为抽样，抽取的n个个体称为容量为n的子样（或样本）。实际上，常难于对总体作全面的研究，一般只能取有限个个体（即子样）加以研究，以推出总体的某种特征。当然，子样并不是总体，因而由子样给出的结果只能说是总体特征的近似。这里子样应是随机抽取的，并满足如下条件：抽取的子样个体ξ_i是独立的，且与总体ξ具有相同的分布。

例如在测量问题中，考察对量X的测量结果x。这一结果有无穷多个随机取值，可表示为一随机变量，所有可能的测量结果的整体就是所研究的x的总体（或母体）。其中每个测量结果x_i为其个体。进行n次重复测量，得到测量结果（x_1，x_2，…，x_n），这就是x的容量为n的子样，这里x_1，x_2，…，x_n为相互独立的随机变量，且与总体x具有相同的分布。有时（x_1，x_2，…，x_n）也表示某组具体的测得值（子样的观测值）。当仅有随机误差时，测量结果x的数学期望（均值）$\mu=E(x)$应是被测量的真值X

$$\mu=E(x)=X$$

为得到μ值，应给出全部的测量结果（即x的所有可能取值），则$E(x)$值应为全部测量结果的平均值。显然，这是做不到的。通常是测得1个或几个结果（$x_1,x_2,\cdots,x_n$），由此给出总体x的参数μ（即X）。

这里的测量就是抽样。测量的目的就是通过有限次的测量结果求出理论真值的近似值。

就一般情形而言，测量问题的数据处理总是可归结为用子样特征去估计或推断总体的某种特征。

二、统计量和估计量

设总体以随机变量ξ表示，容量为n的子样以随机变量（ξ_1，ξ_2，…，ξ_n）表示。现作子样的实值函数

$$T=T\ (\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n)$$

则T（ξ_1，ξ_2，…，ξ_n）也为一随机变量，称T或T（ξ_1，ξ_2，…，ξ_n）为统计量。

在用子样（ξ_1，ξ_2，…，ξ_n）获得的信息对总体ξ作出估计与推断时，要按不同的统计问题的要求来规定子样函数（统计量）。通常，所涉及到的子样函数都是多维连续函数。

一般来说，为了估计总体ξ的某一参数θ，由子样（ξ_1，ξ_2，…，ξ_n）建立不带有未知参量的某一统计量T（ξ_1，ξ_2，…，ξ_n），当获得子样的某一具体观测值（l_1,l_2，…，l_n）时，依此计算出统计量的值T（l_1，l_2，…，l_n）$=t$可作为θ的估计值（这里l_1,l_2…，l_n与t都是指具体的数值或数据），则称T（ξ_1，ξ_2，…，ξ_n）为θ的估计量。

θ的估计量写为$\hat{\theta}$，即

$$\hat{\theta}=T\ (\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n)$$

若随机变量ξ的分布函数F（x；θ_1，θ_2，…，θ_k）中有k个不同的未知参数，则要由子样（ξ_1，ξ_2，…，ξ_n）建立k个不带任何未知参数的统计量作为这k个未知参数的估计量，即

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_1&=T_1\ (\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n)\\ \hat{\theta}_2&=T_2\ (\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n)\\ &\vdots\qquad\cdots\\ \hat{\theta}_k&=T_k\ (\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n)\end{aligned}$$

这就是参数θ_1，θ_2，…，θ_k的点估计。所给估计量$\hat{\theta}_1$，$\hat{\theta}_2$，…，$\hat{\theta}_k$都是随机变量

在不至于引起混淆的场合下，本书将估计量符号上的角号省掉，将$\hat{\theta}_1$，$\hat{\theta}_2$，…，$\hat{\theta}_k$写作θ_1，θ_2，…，θ_k。在测量问题中，为研究某一量的测量结果x（总体），进行n次重复测量，得到测量结果（x_1，x_2，…，x_n），这是容量为n的子样。若测量结果x服从正态分布，则其分布函数含有二个不同的未知参数：数学期望μ和标准差σ。可由子样（x_1，x_2，…，x_n）建立二个不带任何未知参数的统计量作为μ与σ的估计量（以后将讨论这些估计量）。

$$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\ (x_1+x_2+\cdots+x_n)$$

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{(x_1-\hat{\mu})^2+(x_2-\hat{\mu})^2+\cdots+(x_n-\hat{\mu})^2}{n-1}}$$

在不引起混淆的情况下，本书也将$\hat{\mu}$、$\hat{\sigma}$写成μ、σ。

通过n次重复测量获得n个具体的数据，代入估计量的表达式可得到$\hat{\mu}$与$\hat{\sigma}$的一组具体值。因为估计量$\hat{\mu}$与$\hat{\sigma}$是随机变量，所以将再次的重复测量所获得的n个具体数据代入估计量的表达式，所求得的$\hat{\mu}$与$\hat{\sigma}$值将是不同。因而估计量$\hat{\mu}$与$\hat{\sigma}$只是μ与σ的具有一定概率意义的近似，并无绝对“相等”之意。

三、估计量的评价

如前所述，由子样函数给出待求参数θ_i的估计量$\hat{\theta}_i$，这是参数θ_i的点估计。参数的点估计有许多方法，如矩法、最大似然法、最小二乘法等。对同一参数，用不同方法来估计可能得到不同的估计量。究竟什么样的估计量较好，应按一定的标准作出评价。现给出以下几个评价标准。

1．无偏性

设$\hat{\theta}$为未知参数θ的估计量，若

$$E(\hat{\theta})=\theta$$

则称$\hat{\theta}$为θ的无偏估计量。

因为估计量是随机变量，对于不同的样本现实它有不同的估计值，即估计量的取值具有随机波动性。若$E(\hat{\theta})=\theta$，则表明估计量$\hat{\theta}$的波动中心为θ，此时估计量$\hat{\theta}$相对θ仅有随机波动而无系统偏移。

2．有效性

无偏估计量$\hat{\theta}$在θ附近取值的分散程度可用$E[(\hat{\theta}-\theta)^2]$来衡量。因为$\hat{\theta}$是无偏的，故

$$E[(\hat{\theta}-\theta)^2]=D(\hat{\theta})$$

这表明无偏估计量以方差较小为好，即较为有效。

设$\hat{\theta}_1$与$\hat{\theta}_2$都是θ的无偏估计量，若

$$D(\hat{\theta}_1)<D(\hat{\theta}_2)$$

则称$\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_2$有效。

在某些条件下，估计量$\hat{\theta}$的方差$D(\hat{\theta})$有一下界，即

$$D(\hat{\theta})\geqslant\frac{1}{nE\left\{\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x,\theta)\right]^2\right\}}$$

上式为罗-克拉美不等式，不等式右端即为方差下界，它依赖于总体的概率密度$f(x,\theta)$，也依赖于样本容量n。

当无偏估计量$\hat{\theta}$的方差$D(\hat{\theta})$恰好等于它的下界时，称它为最小方差无偏估计量或称最优无偏估计量。