面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

机械工程基础实验

孟兆生 主编
傅鹤龄 副主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

379

面 向 21 世 纪 课 程 教 材
Textbook Series for 21st Century

机械工程基础实验

孟兆生 主 编
傅鹤龄 副主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书是教育部"面向21世纪高等教育教学内容和课程体系改革计划"项目的研究成果，是面向21世纪课程教材和教育部高职高专规划教材。

全书共分5章，分别为：误差基本理论及测试基础；工程材料热处理及应变测量；机械部件的技术测量；机电产品质量检验；实验设计。

本书可作为高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院和民办高校机械工程基础实验课程的教学用书，也可供有关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

机械工程基础实验/孟兆生主编.—北京：高等教育出版社，2001

面向21世纪课程教材

ISBN 7-04-009343-X

Ⅰ.机… Ⅱ.孟… Ⅲ.机械工程-实验-高等学校-教材 Ⅳ.TH-33

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第07891号

责任编辑 伦克己 **封面设计** 张 楠 **责任绘图** 朱 静

版式设计 马静如 **责任校对** 康晓燕 **责任印制** 杨 明

机械工程基础实验

孟兆生 主编

出版发行	高等教育出版社		
社 址	北京市东城区沙滩后街55号	**邮政编码**	100009
电 话	010-64054588	**传 真**	010-64014048
网 址	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn		
经 销	新华书店北京发行所		
排 版	高等教育出版社照排中心		
印 刷	国防工业出版社印刷厂		
开 本	787×960 1/16	**版 次**	2001年6月第1版
印 张	9.75	**印 次**	2001年6月第1次印刷
字 数	170 000	**定 价**	8.90元

前　　言

本书是教育部“面向21世纪高等教育教学内容和课程体系改革计划”项目的研究成果，是教育部高职高专规划教材。全书共分5章，推荐授课时数为40学时。

本书强调以培养学生机械测试技术能力为核心，重组了实验内容，紧密联系工程实践并与机械基础系列课程教材相配套，为学生掌握机械工程技术奠定实验技能基础。本书内容突出工程应用性、综合性和设计性的特点，强化创新能力和机械工程实验技能培养。

参加本书编写的有：黑龙江工程学院孟兆生（绪论，第1、4、5章），南京机械高等专科学校傅鹤龄（第2章，第4章4.5节中的实验七、八、九），华北航天工业学院肖尧平（第3章）。本书由孟兆生主编、傅鹤龄副主编，哈尔滨理工大学崔承琦主审。

在本书编写过程中得到了“面向21世纪普通高等工程专科工程制图与机械基础系列课程教学内容和课程体系改革的研究与实践”项目组领导及第四子项目负责人徐锦康教授和有关老师的关心、支持与指教，在此表示衷心地感谢！

由于编者水平有限和编写时间仓促，书中缺点和错误在所难免，恳请广大教师、读者批评指正。

编　者

1999年8月

绪　论

一、机械工程基础实验的目的、性质及基本内容

“机械工程基础实验”课程是机械类专业的一门基础实验课。设置“机械工程基础实验”课程的目的是：以培养学生机械检测技术能力为核心，重组机械基础系列课程实验内容，紧密联系工程实践，与本系列改革课程配套，为学生掌握机械工程技术应用能力奠定实验技能基础。其主要内容如下：

1. 误差基本理论及测试基础　主要是使学生在实验过程中掌握误差的基本理论以及误差处理，掌握测试系统的基础知识及选用原则。

2. 工程材料热处理及应变测量　本实验是通过一个典型机械零件（例如轴），对其进行铁碳合金平衡组织观察，并对其热处理及硬度测量，再观察该零件热处理后的显微组织，测量该零件材料的 E、μ 值并测定该轴弯扭组合变形。

3. 机械部件的技术测量　本实验主要是通过一个典型机械部件（例如减速器），对其进行几何尺寸及公差技术测量。即对轴进行圆柱度、位置误差、表面粗糙度的测量；对齿轮进行公法线及齿厚测量；对螺纹用影像法测量螺纹主要参数；对箱体进行轴承孔径、中心距和箱体位置误差的测量。

4. 机电产品质量检验　主要使学生提高对机电产品的质量意识，了解产品质量检验的概念，了解质量检验的职能、要素和程序，了解检验的目的、作用与原则，掌握质量检验的依据。通过对典型机电产品（例如洗衣机）进行出厂检验实验以及对其振动、噪声和发热检验等使学生掌握机电产品质量检验工作。

5. 实验设计　主要包括实验的构成、作用、类型以及基本程序，掌握实验方案的拟定，懂得实验设计，培养学生科研能力及创新意识。

二、机械工程实验的基本方法及标准

实验与试验是科学研究与工程技术研究的重要手段和方法，在科学技术直接向现实物质生产力的转化过程中，起着极为重要的作用。科学地掌握实验与试验方法、熟练地运用实验与试验技术，是对从事工程技术研究工作的当代工程技术人员的基本要求之一。

实验是科学研究的重要组成部分，是人们按照一定的目的，把研究对象置于可控制的条件下，排除次要因素的干扰，使主要因素重复发生，并利用仪器设备加以观察和记录，以便探求事物规律性的一种科研方法及工具。试验是工程技术研究的一种重要手段和方法，在科学技术直接向现实物质生产力的转化中起

着极为重要的作用。

在机械工程实验中，任何一项实验都离不开对被测量的测量。测量是实验的基本手段。随着科学技术的发展，测量的领域不断扩大，参数范围也在不断地延伸。在很多情况下需要测试的信息往往与其他一些背景物理量掺杂在一起，在测量中我们要把需要的信息从杂乱的背景中选择出来，因此往往通过简单的实验难以完成测量任务，为此，要应用比较复杂的测量器具。我们常把简单的操作过程称为狭义的测量；而对能完成对被测对象进行检出、变换、分析、处理、判断、比较、存储、控制、显示等功能的综合过程称为广义的测量。

所谓实验方法就是“把可测的量测量出来，并把不可测的量变成可测的量”的方法。下面介绍几种常见的实验方法。

1. 比较法　比较法是测量中应用得最广泛、最基本的方法。它是将被测量与相关的标准量具进行直接比较或间接比较而得到测量值的方法。直尺、卡尺、角规、天平、电桥、电表等都是根据比较法设计的仪器和仪表。

2. 放大法　在测量中由于被测量过分小，以至无法被实验者感知，这时可通过某种途径将被测量放大，然后再进行测量，这就是放大法。例如，微米级的伸长量通过光杠杆放大，可以在毫米尺上得到充分的反映；通常人眼无法辨认的微小间距可以通过螺旋测微计进行螺旋放大而准确测知；更小的间距还可以首先通过显微镜进行视角放大，再由螺旋测微装置测读，这就是读数显微镜。光杠杆、光点式检流计、螺旋测微计、显微镜、望远镜、示波器等都是利用放大法的仪表。

3. 补偿法　在测量中，若对被测量的测量精度要求很高，可采用补偿法。首先令被测量在特定的装置中产生某种效应，然后让高精度的标准量具在同一装置中产生一个相反的效应并与原效应相补偿(或相抵消)。例如被测电动势 E_x 在闭合回路中会使检流计向一个方向偏转，我们可以创造一个可变标准电源 E_n，把它连接在同一回路中以抵消检流计指针的偏转。当检流计平衡时，$E_x = E_n$。电位差计就是利用补偿法制成的测量电压的仪器。

4. 转换法　很多被测量，不便于直接测量或根本无法测量，可把这些量转变成能方便测量的量，然后再进行测量，这就是转换测量法。水银温度计就是将温度的测量转换为长度的测量。

将非电量转换为电量的测量叫非电量的电测法，如热敏电阻温度计测温，示波器测声速等。

将非光学量转换为光学量的测量方法叫非光学量的光测法，如用迈氏干涉仪测位移，辐射高温计测温等。

由于电测法的速度快、灵敏度高、容易实现自动控制以及光测法测量精度高、容易实现无接触测量等一系列优点，目前这两种方法都已经成为现代测量技

术的重要分支。

5. 模拟法　在测量中，由于被测对象过分庞大，或者测量所付出代价过高，使我们难以进行直接测量，可以制定与被测对象有一定关系的模型，用对模型的测量代替对原型的测量。这种模型可以是数学模型，也可以是物理模型。例如，可以用稳恒电流的等位线来模拟静电场的等位线。这是因为静电场和稳恒电场具有相同的数学方程式。可以用测金属的导电率来模拟测量金属的导热率，这是因为同一种金属具有相同的导电和导热的传输机制。

6. 干涉测量法　在精密测量中，干涉的应用非常广泛。利用干涉技术可以测长度、角度、光学度、折射率及检查光学元件的质量。干涉测量容易实现自动显示和自动控制。由于长度基准为光在真空中于给定时间间隔(1/299 792 458 s)内所经路径的长度，又由于激光器的普遍使用，这使干涉测量得到了迅速的发展。

在机械工程实验中，不但要选择正确的方法、还要注意遵循国际标准、国家标准以及行业标准中有关实验或试验标准。

三、机械工程实验的发展趋势

机械工程实验的发展主要取决于现代测试技术的发展，主要体现在以下几个方面：

1. 量程范围更加宽广　在目前测试技术中，测试量程越来越广。如在压力测试技术中，对常规压力小于 600 MPa 被测量的测试，采用钢柱(或铜球)测压器或压电传感器均可满足要求。在高压测试中，压力可达到 800 MPa～1 000 MPa 甚至 1 000 MPa 以上，并伴随着很高的冲击加速度，这就促使压力测试技术要相应地发展，研制测压范围更宽的压力传感器及配套的压力动态标定装置，并且这种测压传感器和测温传感器要能在高冲击加速度下稳定工作。

2. 传感器向新型、微型和智能型发展　随着科学技术和工业自动化的发展，对测试技术提出了更高更新的要求。首先要根据被测参数的特性开发相应的传感器，除前面提到的高压传感器和高加速度传感器外，如要解决量值差别较大(10:1 以上)的双量程推力传感器和双量程压力传感器。在某些测试中甚至提出了双参数传感器的问题，即用一个传感器同时测量两个不同的参数，如同时测量压力和温度、力和位移、压力和速度等。另外，在某些研究工作的特殊场合需开发多分力传感器来测量多个方向的作用力，多分力传感器在研究切削加工中刀具受力状态和人体运动机能方面都有着广阔的应用前景。而在机器人工程的发展中，则需要研制高灵敏度的新型视觉、触觉、听觉、嗅觉传感器等。

在一般的测量中，对传感器的外形尺寸及重量没有特殊的要求，但在航空、宇航、生物医学工程中使用的传感器则要求尺寸要尽量小、重量要尽量轻。如俄罗斯目前最大的运载火箭——能源号运载火箭的指挥控制系统就是由几千个传

感器组成的。如果这些传感器不实现小型化或微型化,它们则不可能用于运载火箭。在医学领域内用于探测人体内部功能的传感器也必须是微型传感器。

目前,有些传感器已向智能化方向发展。比如火炮膛内压力测量,过去一直沿用放入式铜柱测压器(俗称测压蛋),现在已开发出一种电子测压蛋,它集压力转换、信号放大,数据采集与贮存于一体,组成了一个智能型传感器。再比如源于美国航天技术中的微电子技术应用在医疗领域中的"温度药丸",它是由石英晶体温度传感器,微型电池和遥测系统组成的。这种 1.9 cm 长的温度药丸可插入或咽人人体消化系统,即可把三天内身体中心部位的体温数据发送到一个外部接收机上。

3. 测量仪器向高精度和多功能方向发展　测量仪器精度及整个测量系统精度的提高,使测得数据的可信度也相应提高。在产品研制过程中要进行大量试验,测量某些性能参数,然后对所测数据进行统计分析。在相同条件下进行若干次试验,所测参数才具有一定的可信度,而试验次数的多少与测读仪器的精度有关。仪器精度的提高,可减少试验次数,从而缩短研制周期,减少试验经费,降低产品成本。

现在某些仪器在提高测量精度的同时其功能也在扩展。目前采用的测试系统大多是由多台仪器与计算机所组成,在使用中需对每台仪器进行调试,既不方便又容易出错。近几年来,国外出现一种卡式仪表(Instrument on a Card),即把诸如放大器、示波器、瞬态记录仪等全缩小成一块一块的卡片(像一本书那样大),插在带格子的框架内,各卡片通过多端连接头与计算机的母线相连,不仅可使各仪器的电源、旋钮、表头、显示屏大大简化(共用一个卡片),而且可通过计算机的键盘来操作各卡片(仪器)的功能,并按预定程序来控制复杂的测试系统。

4. 参数测量与数据处理向自动化方向发展　对一个产品进行的大型、综合性试验,其准备时间长,待测参数多,少则几十,多则几百个数据通道,仅仅人工去检查一遍,就要耗费很长时间。大量的数据依靠手工去处理,不仅精度低,周期也太长。现代测试技术的发展,采用以计算机为核心的多通道自动测试系统。该系统能实现自动校准、自动修正、故障诊断、信号调制、多路采集、自动分析与处理、打印与绘图,这些功能是通过计算机预定的程序来控制和完成的。

实现多参数的自动测量与处理,可大大提高测量精度,缩短试验周期,加速产品的更新与开发。

第 1 章　误差基本理论及测试基础

1.1　误差基本理论

一、测量与误差

人类在生活、生产及科研中，经常要对各种被测量进行测量，从而获得客观事物的定量信息。所谓测量是确定被测对象的量值而进行的实验过程。具体地说，是将被测量与作为单位或标准的量，在数值上进行比较，从而确定两者比值的实验认识过程。以公式表示，则为：

$$\frac{\text{被测量}}{\text{测量单位}} = \text{测量值}$$

显然，被测量等于测量单位与测量值的乘积。

测量可分为直接测量、间接测量和组合测量三种。凡使用测量仪器能直接测得结果的测量，就是直接测量，如用米尺测量物体的长度，用秒表测量一段时间等。另外还有很多被测量，它们不是用仪器直接测得，而是先直接测量另外一些相关的量，然后通过这些量间数学关系运算，才能得到结果，这种测量叫间接测量，如测量某物体的运动速率，是直接测量路程及通过这段路程所用的时间，然后计算得到的。还有一些测量的目的是要同时求出若干个量，例如要求测出电阻值与温度的关系，并写出函数式 $R_t = R_0(1 + \alpha t)$。这里，测量的目的是求 R_0 和 α。一般的测量方法是，在某一温度 t_1 下测出 R_{t1}，在另一温度 t_2 下测出 R_{t2}……在温度 t_n 下测出 R_{tn}，共测出几对数据 $(t_1, R_{t1})(t_2, R_{t2})\cdots(t_n, R_{tn})$，然后根据这几对数据而得到 R_0 和 α，这就是组合测量的方法。显然，直接测量是基础。

一般说来，测量过程都是通过人，在一定的环境条件下，使用某种测量仪器进行的。由于仪器的结构不够完善，测试者的操作、调整和读数不可能完全准确，环境条件的变化（诸如温度的波动、振动、电磁辐射的随机变化等），都将不可避免地造成各种干扰，因此，任何测量都不可能做到绝对准确。

如果把被测量在一定客观条件下的真实大小，称为该被测量的“真值”记为 x_0，而把某次对它测量得到的值记为 x，那么 x 与 x_0 之间的差值，称为“测量误

差”。将

$$\Delta x = x - x_0$$

称为测量的“绝对误差”,把

$$E = \frac{\Delta x}{x_0} \times 100\%$$

称为测量的“相对误差”。显然,绝对误差与相对误差的大小,反映了测量结果的精确程度。

由于 x_0 是未知的,所以 Δx 是不确定的,我们只能按某种方法估算出 Δx 可能处于某一范围之内,而不确定程度则是对误差可能处于某一范围的一种评定。

二、误差种类

按照误差产生的原因和基本性质,可将其分为下列几种:

1. 随机误差　随机误差也称偶然误差。在相同的条件下多次测量同一量时,如果已经精心排除了系统误差产生的因素,发现每次测量结果都不一样,测量误差或大、或小、或正、或负,完全是随机的,初看显得毫无规律,但当测量次数足够多时,却可以发现误差的大小以及正、负误差的出现,都是服从某种统计分布规律的,我们称这种误差为“随机误差”。

随机误差主要是由于测量过程中一些偶然的或不确定的因素引起的,如测量过程中温度的波动、振动、测量力不稳定、量仪传动件的摩擦力变化以及观察者的视差等。这些因素一般无法预知并难以控制,所以测量过程中随机误差的出现带有某种必然性和不可避免性。

2. 系统误差　在同一条件下,多次重复测量同一个量对其符号和绝对值保持不变的误差,或按某一确定规律变化的误差称为系统误差。系统误差的来源主要有以下几个方面:

(1) 仪器误差　这是由于仪器本身的缺陷或仪器安装、调整不当而造成的,如零点不准,水平度、垂直度未调整好以及仪器老化、磨损等。

(2) 理论误差　这是由于实验所依据的原理不够完善,或测量所依据的理论本身的近似性,或实验条件达不到理论公式所规定的要求而造成的。例如,单摆周期的计算公式 $T=2\pi\sqrt{l/g}$ 成立的条件是摆角趋近于零,摆动过程不受空气浮力和阻力影响,这些条件在实验中则难以满足。

(3) 环境误差　是由外界环境(如光照、温度、湿度、电磁场等)偏离工作条件而造成的误差。

(4) 个人误差　由于测试者感觉器官的不完善或者个人不正确的习惯所造成的误差。如有人按秒表总提前,有的人总落后。这种误差往往因人而异,并与测试者当时的心理、生理状况有关。

由此可见，系统误差产生的原因往往是可知的，一般也都是有规律的。因此在实验前，应该对测量中可能产生的系统误差加以充分的分析和估计，并采取必要的措施尽量消除其影响。测量后应该设法估计未能消除的系统误差值，对测量结果加以修正。

应该指出，系统误差是一些实验测量误差的主要来源，依靠多次重复测量，一般又都不能发现系统误差是否存在，处理不妥往往会对测量结果的精度带来重大影响。

随机误差与系统误差之间在一定条件下是能够相互转化的，比如对某台特定的电流表来说，它的仪器误差是由检定书给定的，属定值系统误差。如果在使用时没有检定书，则只能根据仪表的准确度等级估算它的误差范围，这时它的误差大小、正负服从统计规律，可以作为随机误差来处理。

综上所述，系统误差与随机误差有不同的产生原因和不同的性质。因此，它们对测量结果的影响也有各自不同的特点。

3. 粗大误差　粗大误差也称过失误差。由于操作不当或读数错误而造成的误差称为粗大误差。含有粗大误差的测量数据明显偏离正常值，这个数值称为坏值，应按一定的准则把它从测量列中剔除。

三、随机误差的数学处理

我们只讨论系统误差已经被减弱到足以被忽略的情况下，随机误差的数学处理过程和测量结果的正确表示方法。

1. 随机误差的正态分布规律　对某一被测量 x 进行多次重复测量，由于随机误差的存在，测量结果 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 一般都存在着一定的差异。如果该被测量的真值为 x_0，则根据误差的定义，各次测量的误差

$$\Delta x_i = x_i - x_0 \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

实践证明，随机误差 Δx_i 的出现服从一定统计分布规律——正态分布规律，即对于大多数测量，它具有以下的性质：

(1) 绝对值小的误差出现的概率大，绝对值大的误差出现的概率小；

(2) 大小相等、符号相反的误差出现的概率相等；

(3) 非常大的正、负误差出现的概率都趋近于零；

(4) 当测量次数足够多时，由于正负误差相互抵消，各个误差的代数和为零。

随机误差正态分布的这些性质在图 1－1 正态分布曲线上可以看得非常清楚。该曲线横坐标为误差 x，纵坐标为 $f(x)$，即误差的概率密度分布函数。它的意义是，单位误差范围内出现的误差概率。曲线下阴影线包含的面积元 $f(x)\mathrm{d}x$，就是误差出现在 x 至 $x+\mathrm{d}x$ 区间内的概率(可能性)。

根据统计理论可以证明，函数 $f(x)$ 的具体形式为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

式中 σ 为一个取决于具体测量条件的常数，称为标准误差。

由误差分布曲线可见，曲线的中部曲率向下，曲线的两侧曲率向上，因此曲线上必有转折点。容易证明，该转折点的横坐标值 $x=\pm\sigma$。

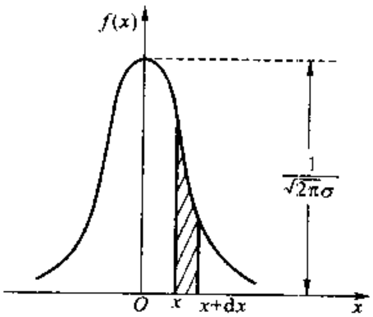

图 1－1

当 $x=0$ 时，由上式得：

$$f(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

可见，某次测量若标准误差很小，则必有 $f(0)$ 很大，分布曲线中部将上升较高，两旁下降就较快，表示测量离散性小，精密度高。相反，如果 σ 很大，则 $f(0)$ 就很小，误差分布的范围就较宽，说明测量的离散性大，精密度低，如图 1－2 所示。

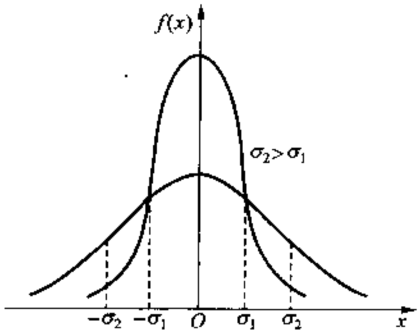

图 1－2

同样可以知道，在某一次测量中，随机误差出现在 a 和 b 区间的概率应为

$$P=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

而某一次测量中，随机误差出现在 $-\infty$ 至 $+\infty$ 区间的概率应为

$$P=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$$

上式所代表的概率意义是明显的，它说明任何一次测量的随机误差在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内必然出现，也说明了图 1－1 曲线下的总面积应为 1。

2. 标准误差的统计意义　上面提到的在实验条件一定的情况下，描述正态分布曲线线型宽窄的参数——标准误差 σ，经过一定的数学推导过程可由下式

表示：

$$\sigma = \lim_{n \to \infty}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)^2}$$

式中 n 为测量次数，该式成立的条件是要求测量次数 $n \to \infty$。

下面对统计特征量 σ 做进一步的研究。

由概率密度分布函数的定义式，计算一下某次测量随机误差出现在[$-\sigma$, $+\sigma$]区间的概率：

$$P = \int_{-\sigma}^{+\sigma} f(x)\mathrm{d}x = 0.683$$

同样可以计算某次测量随机误差出现在[-2σ, $+2\sigma$]和[-3σ, $+3\sigma$]区间的概率分别是：

$$P = \int_{-2\sigma}^{+2\sigma} f(x)\mathrm{d}x = 0.955$$

$$P = \int_{-3\sigma}^{+3\sigma} f(x)\mathrm{d}x = 0.997$$

以上三式所表示的积分面积如图 1－3 所示。

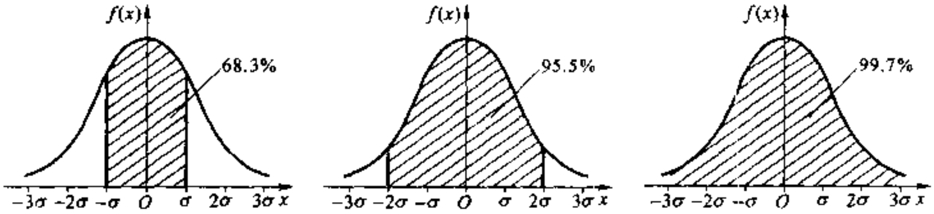

图 1－3

通过以上的分析，可以得出标准误差 σ 所表示的概率意义：即对被测量 x 任做一次测量时，测量误差落在 $-\sigma$ 到 $+\sigma$ 之间的可能性为 68.3%；落在 -2σ 到 $+2\sigma$ 之间的可能性为 95.5%；落在 -3σ 到 $+3\sigma$ 之间的可能性为 99.7%。由于标准误差 σ 具有这样明确的概率含义，因此，目前国内外已普遍采用标准误差作为评价测量质量优劣的指标。

3. 有限次测量的标准偏差　实际测量的次数 n 是不可能达到无穷大的，而且真值 x_0 也是未知的，因此，计算标准误差 σ 的公式只具有理论上的意义，没有实际应用价值。这样，对被测量 x 只能进行有限次测量。那么在真值 x_0 不知道的情况下，如何确定 σ 呢？为了回答这个问题，先介绍一下测量列的平均值 $\bar{x}$。

由于随机误差的一个重要特性是可抵偿性，即在相同的测量条件下对同一量进行多次重复测量，由于每一次测量的误差时大时小，时正时负，所以误差的

算术平均值随着测量次数 n 的增加而逐渐趋于零，用测量列 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 表示对被测量 x 进行 n 次测量的值，那么

$$\begin{aligned}\Delta x_1 &= x_1 - x_0\\ \Delta x_2 &= x_2 - x_0\\ &\vdots\\ \Delta x_n &= x_n - x_0\end{aligned}$$

将以上各式相加得

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i - n x_0$$

由于

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \to 0$$

因此有

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \to x_0$$

而

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \overline{x}$$

则有

$$\overline{x} \to x_0$$

可见，测量次数越多，各次测量的算术平均值 $\overline{x}$ 越接近于真值 x_0，因此，可以用算术平均值 $\overline{x}$ 作为真值 x_0 的最佳估计值，称为测量列的最佳值。

由于平均值 $\overline{x}$ 最接近真值，因此在实际测量过程中用残差（也叫散差）

$$v_i = x_i - \overline{x} \ (i = 1, 2, \cdots, n)$$

来计算每次测量的偏差。

可以证明，当测量次数 n 为有限，而用残差来表示误差时，就可用下面的式子来计算 σ：

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}}$$

此时我们不再称 σ 为标准误差，它仅仅是标准误差的估计值，称之为测量列的标准偏差，而且与标准偏差 σ 具有同样的概率含义。

上式在实际测量中非常有用，称其为贝塞尔（Bessel）公式，我们以后要经常用到它。

4．有限次测量算术平均值的标准偏差　在处理被测量 x 的随机误差时，我们称被测量 x 为随机变量。对 x 的有限次测量的算术平均值 $\overline{x}$ 本身也是一随机变量，即对其进行不同的有限次测量，各组结果的算术平均值是不会相同的，

彼此总会有所差异,因此,也存在标准偏差,用 $\sigma_{\bar{x}}$ 表示。为了将测量列的标准偏差(上述贝塞尔公式所表示的 σ)与平均值的标准偏差加以区别,我们用 σ_x 来表示贝塞尔公式中的 σ,即特指被测量 x 的标准偏差。通过数学推证(略),可以得到 σ_x 与 $\sigma_{\bar{x}}$ 二者之间的关系式,为

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

式中 n 为测量次数。

由上式可见,$\sigma_{\bar{x}}$ 是 σ_x 的 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 倍。这表明平均值 $\bar{x}$ 落在 $x_0 - \sigma_{\bar{x}}$ 到 $x_0 + \sigma_{\bar{x}}$ 范围内的可能性为 68.3%,也可以说,自 $\bar{x} - \sigma_{\bar{x}}$ 到 $\bar{x} + \sigma_{\bar{x}}$ 范围内包含真值 x_0 的可能性为 68.3%。

例 1 用天平称一物体质量 m,共进行 $n = 9$ 次,结果列于表 1-1,计算 $\bar{m}$,σ_m,$\sigma_{\bar{m}}$。

表 1-1

i(次)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m_i/g	187.9	187.2	187.5	187.1	187.0	187.3	187.8	187.6	187.7

解

$$\bar{m} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i = 187.5\ \text{g}$$

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(m_i - \bar{m})^2}{n-1}} = 0.3\ \text{g}$$

$$\sigma_{\bar{m}} = \frac{\sigma_m}{\sqrt{n}} = \frac{0.3\ \text{g}}{\sqrt{9}} = 0.1\ \text{g}$$

四、系统误差的处理

系统误差的处理较之随机误差的处理要复杂得多。主要是由于在一个测量过程中系统误差与随机误差是同时存在的,而且实验条件一经确定,系统误差大小和方向也就随之确定了。在此条件下,进行多次重复测量并不能发现系统误差的存在。可见,发现系统误差的存在不是一件容易的事,再进一步寻找其原因和规律以致进一步消除和减弱它,就更为困难了。因此,在实验过程中,没有像处理随机误差那样的简单数学过程来处理系统误差,只能靠实验者坚实的理论基础,丰富的实验经验及娴熟的实验技术,遇到具体的问题进行具体的分析和处理。

在实验中,常见的系统误差有两种,一种是由于实验方法或实验中所依据的

理论不完善所造成的系统误差；另一种是实验中所用仪器的不准确所造成的系统误差。下面分别介绍如下：

1. 方法和理论引起的系统误差——可定系统误差　这种系统误差的特点是它的大小和方向是确定的，因此可以消除、减弱或修正。我们称这种误差为可定系统误差。如千分尺的零位不正确引起的误差，或用天平测质量时，由于微小的不等臂因素存在所造成的系统误差。

2. 由测量仪器准确度所限而导致的系统误差——未定系统误差　实验中所使用的各种仪器、仪表及各种量具，在制造时都有一个反映准确程度的极限误差指标，习惯上称之为仪器误差，用 $\Delta_{仪}$ 表示。这个指标在产品说明书中都有明确的说明。

从原则上讲，由于仪器的不准确而引起的系统误差，其大小和方向都应是确定的，那么，为什么还称其为未定的系统误差呢？其原因是：在使用某台仪器时，只知道其 $\Delta_{仪}$，但这一指标是代表一种极限范围，并未确切说明是"正"还是"负"，也未说明大小到底是多少。如果想知道这些确切指标，必须用准确度等级较高的仪器进行校验。但在实验教学或一般使用中不可能也没有必要这样做。

对未定系统误差的处理不能采取可定系统误差那样的处理方法。目前实验教科书中对仪器误差尚未有一致的意见。

实际上，随机误差与系统误差之间并不存在不可逾越的鸿沟，它们之间在一定条件下是可以相互转化的。此外，系统误差与随机误差的区分，有时也与时间因素有关。在短时间内基本上不变的误差显然可以视为系统误差；但随着时间的延长，很难避免意外的、偶然的因素影响，故上述误差有可能出现随机的、统计的变化，而使本来为恒定的误差转化为随机误差。但是，本课程中所涉及到的误差都是最基本的，最易区分的，处理方法也采取简单和近似的方法。

五、粗大误差的处理

粗大误差是超出在规定条件下预期的误差。粗大误差的产生是由于某些不正常的原因造成的。例如测量者的粗心大意，测量仪器和被测件的突然振动，以及读数或记录错误等。由于粗大误差一般数值较大，它会显著地歪曲测量结果，因此，它是不允许存在的。若发现粗大误差，则应按一定准则加以剔除。

发现和剔除粗大误差的方法，通常是用重复测量或者改用另一种测量方法加以校对。对于等精度多次测量值，判断和剔除粗大误差较简便的方法是按 3σ 准则。所谓 3σ 准则是：在测量列中凡是测量值与算术平均值之差（也叫剩余误差）的绝对值大于3倍的标准偏差 σ 时，即认为该测量值为粗大误差，应该从测量列中将其剔除。

1.2 直接测量量的结果表示方法

对被测量 A 进行多次重复测量，如果在测量结果中已不包含系统误差和因粗心而造成的过失误差，则测量结果应表示为：

$$A=\overline{A}\pm\sigma_{\overline{A}}$$

上式代表的概率意义为：被测量 A 的真实值落在 $\overline{A}-\sigma_{\overline{A}}$ 到 $\overline{A}+\sigma_{\overline{A}}$ 范围内的可能性为 68.3%。由于其概率意义明确、表达简单，是一种通用的测量结果表示方法。但有时测量者更喜欢采用误差限的表示方法，即希望被测量 A 的真实值最好不会跑出某一范围。在前面介绍的标准偏差的概率意义时曾介绍过，如果将测量结果写成 $A=\overline{A}\pm2\sigma_{\overline{A}}$，则所代表的概率意义应是：被测量 A 的真值落在 $\overline{A}-2\sigma_{\overline{A}}$ 到 $\overline{A}+2\sigma_{\overline{A}}$ 范围内的可能性为 95.5%。若进一步将测量结果写为 $A=\overline{A}\pm3\sigma_{\overline{A}}$，其所代表的概率意义应是：被测量 A 的真值落在 $\overline{A}-3\sigma_{\overline{A}}$ 到 $\overline{A}+3\sigma_{\overline{A}}$ 范围内的可能性为 99.7%。由上面的分析可见，只要在 $\sigma_{\overline{A}}$ 的前面乘以一个 2～3 的系数，就可以将测量结果的置信概率由 68.3% 扩大到 95% 以上，这样的结果正是我们所希望的。这样，测量结果就可以表示为：

$$A=\overline{A}\pm C\sigma_{\overline{A}}$$

式中 $C=2\sim3$，这一结果就可以说明，被测量 A 的真值基本不会跑出 $\overline{A}-C\sigma_{\overline{A}}$ 到 $\overline{A}+C\sigma_{\overline{A}}$ 这一段区间。

在实验课中，对某量的测量次数要求一般在 5～9 次之间，由于 $\sqrt{5}\approx2.2$，$\sqrt{9}=3$，因此，我们可以将系数 C 取作 $\sqrt{n}$，即 $C=\sqrt{n}$，因此，上式就可写成：

$$\begin{aligned}A&=\overline{A}\pm\sqrt{n}\sigma_{\overline{A}}\\&=\overline{A}\pm\sqrt{n}\cdot\frac{\sigma_A}{\sqrt{n}}\\&=\overline{A}\pm\sigma_A\end{aligned}$$

上式的结果从形式上看，是用测量列的标准偏差 σ_A 代替了平均值的标准偏差；从概率意义上来看，是把原来测量结果的 68.3% 的置信概率扩大到 97% 以上。至此，我们已经得到，在不存在系统误差的情况下，对被测量 A 的多次测量结果应分别用绝对误差与相对误差写出：

$$\begin{cases}A=\overline{A}\pm\sigma_A\\E=\dfrac{\sigma_A}{\overline{A}}\times100\%\end{cases}$$

例 2 在例 1 测质量的实验中，应将测量结果表示为：