分 析 力 学

叶 敏 肖龙翔 编著

天 津 大 学 出 版 社

内 容 提 要

本书包括分析力学基础、力学的变分原理、完整系统动力学和非完整系统动力学四篇，共十章。主要内容有：分析力学的基本概念，虚位移原理和达朗伯原理，动力学方程的三种基本形式，高斯最小拘束原理，哈密顿原理，拉格朗日第二类方程，哈密顿正则方程，拉格朗日乘子法，阿沛尔方程，凯恩方程。每章均配有适量的例题、习题和答案，所需学时在40～60之间。

本书可作为高等工科院校本科生和研究生分析力学课程的教材，也可供有关科研和工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

分析力学/叶敏，肖龙翔编著 .—天津：天津大学出版社，2001.4
ISBN 7-5618-1419-4

Ⅰ.分… Ⅱ.①叶…②肖… Ⅲ.分析力学—高等学校—教材
Ⅳ.0316

中国版本图书馆CIP数据核字（2001）第11295号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨风和
地　　址 天津市卫津路92号天津大学内（邮编：300072）
电　　话 发行部：022—27403647　邮购部：022—27402742
印　　刷 天津市宝坻县第二印刷厂
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 880mm×1230mm　1/32
印　　张 9
字　　数 272千
版　　次 2001年4月第1版
印　　次 2002年5月第2次
印　　数 2001-4000
定　　价 15.00元

前　言

分析力学属经典力学的范畴，它作为一门学科，已有二百余年的历史。它的创立可以追溯到1788年拉格朗日(Lagrange J.L.)发表的名著《分析力学》一书开始，后经哈密顿(Hamilton W.R.)等人的发展使分析力学的理论体系臻于完善。但是，在拉格朗日时代还没有认识到非完整系统的存在，直到1894年赫兹(Hertz H.R.)才第一次将约束和系统分成完整和非完整两大类，从此对非完整力学才有了较系统的研究，这无疑是将拉格朗日的成果推进了一大步。随着近代数学的发展，用近代微分几何的观点研究分析力学的原理和方法是近代分析力学的重要标志，它使得经典的拉格朗日和哈密顿理论更加完美。

分析力学研究宏观低速物体机械运动的一般规律。它是与以牛顿基本定律为基础的矢量力学并驾齐驱的另一种力学体系，其特征是以普遍原理为基础，利用标量形式的广义坐标来代替矢量力学的矢径，以对能量和功的分析来代替矢量力学中对力和动量的分析，从而有可能利用纯粹数学分析的方法导出基本的运动微分方程，并研究这些方程本身和积分方法。由于分析力学是从普遍的变分原理出发建立系统的运动微分方程，所以它具有高度的统一性和普遍性。随着生产实践和科学技术的发展，新的研究课题不断涌现，分析力学的一些基本概念和思维方法，不断地渗透到许多新学科领域中去，如航天技术、现代控制理论、计算力学、非线性力学等。因此，作为工程专业的学生学习一些分析力学的知识是有必要的。

作者在工程力学专业开设的分析力学课程的基础上，借鉴目前各类分析力学教材，经过修改、补充而形成了本书的理论体系。本教材主要是为工程力学专业的本科生和研究生编写的，但考虑到一般工科类学生的使用，第一篇分析力学基础部分的内容有所加强，对于不同专业的学生可适当进行选择学习。如作为力学专业本科生或研究生，有较好的理论力学基础，则第一篇的内容可以压缩或作为自学，把第四篇作为补充内容。对于一般工程专业的学生可按编排内容讲授前三

篇。

本书包括分析力学基础、力学的变分原理、完整系统动力学和非完整系统动力学四篇，共分十章。依次阐述了分析力学的基本概念，虚位移原理和达朗伯原理，动力学方程的三种基本形式，高斯最小拘束原理，哈密顿原理，拉格朗日第二类方程，哈密顿正则方程，拉格朗日乘子法，阿沛尔方程，凯恩方程。每章均配有适量的例题和习题，以便加强对基本概念和理论的理解与应用，所需学时在40～60之间为宜。

本教材由肖龙翔（第1章至第3章）、叶敏（第4章至第10章）编写，郎作贵、陈璐承担了本书全部计算机文字录入和绘图的工作。

本教材承蒙毕学涛教授详细审阅，并提出了许多非常宝贵的意见，作者在此表示由衷的感谢。本书的出版得到了各级领导和教研室老师的大力支持，许多优秀的分析力学教材也给了作者很大的帮助，在此也一并致以诚挚的谢意。

鉴于作者水平所限，书中错误和不妥之处，恳请读者批评指正。

编　者

2000年10月

目　录

第一篇　分析力学基础

第二篇　力学的变分原理

第三篇　完整系统动力学

第四篇　非完整系统动力学

第一篇　分析力学基础

第1章　分析力学的基本概念

1.1　分析力学的研究对象　约束

1.1.1　分析力学的研究对象

在力学中有三种理想模型：质点、质点系和刚体。**质点**被定义为只有质量、没有大小的物体；**质点系**是由若干质点组成的、有内在联系的集合；**刚体**则是一种特殊的质点系，在这种质点系中，任意两质点的距离始终保持不变。

分析力学的研究对象是质点系。

质点系各质点在空间位置的有序集合决定了该质点系的位置和形状，称为该质点系的**位形**。

如果某质点在空间的位置和运动不受任何限制，这种质点称为**自由质点**；由自由质点组成的、有内在联系的集合称为**自由质点系**或**自由系统**。反之，如果某质点在空间的位置和运动受到某些限制，称为**非自由质点**；由非自由质点组成的、有内在联系的集合称为**非自由质点系**或**非自由系统**。我们赖以生存的太阳系是自由质点系。人们发明创造的种种机构、机器、建筑物，如曲柄连杆机构、汽轮发电机组、桥梁等等，都是非自由质点系。

分析力学是运用纯粹数学分析的方法研究质点系的机械运动。

1.1.2　约束　约束的分类

非自由质点系在空间的位置以及在运动中受到的限制称为**约束**。

用数学方程表述各质点所受的限制条件称为**约束方程**。约束方程通常可以在建立此质点系的动力学方程之前写出来。由此可知，非自由质点系是受约束的质点系。

在分析力学所研究的非自由质点系中存在着形形色色的约束，为了认清非自由质点系的特征，先讨论约束的分类。

从约束方程的形式上看，约束可分为几何约束和运动约束两大类，它们又都可分为定常约束和非定常约束、双面约束和单面约束、可积分的和不可积分的约束。

从约束方程的实质来看，约束可分为完整约束和非完整约束两大类。下面分别讨论各类约束的特征。

1.1.3 几何约束 运动约束

1.1.3.1 几何约束

在质点系中，所加的约束只能限制各质点在空间的位置或质点系的位形，这种约束称为**几何约束**或**位置约束**。几何约束方程的一般形式是

$$f(\boldsymbol{r}_i, t) = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.1.1}$$

或

$$f(x_i, y_i, z_i, t) = 0 \tag{1.1.2}$$

其中 $\boldsymbol{r}_i = x_i \boldsymbol{i} + y_i \boldsymbol{j} + z_i \boldsymbol{k} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$

式中 $\boldsymbol{r}_i$ 和 x_i、y_i、z_i 分别是第 i 个质点的矢径和它在直角坐标系中各坐标轴上的投影。n 为该质点系中的质点数。

1）在几何约束中视约束方程是否显含时间参数可分为定常几何约束和非定常几何约束

（1）在约束方程中，不显含时间参数 t 的约束称为**定常几何约束**或**稳定几何约束**。

图 1－1－1 中，质点 M 用长 l、质量可忽略不计的刚杆固结，连接在球形铰链支座 O 上。这是一个定长度的单摆。该质点被限制在以 O 为中心、l 为半径的球面上运动，约束方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2$$

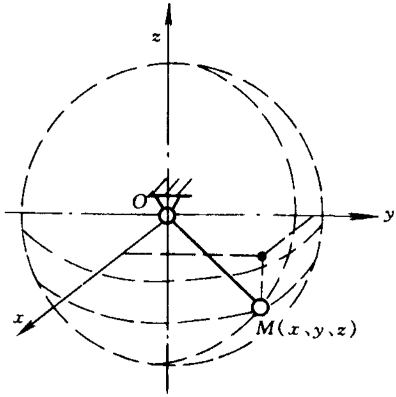

图 1－1－1

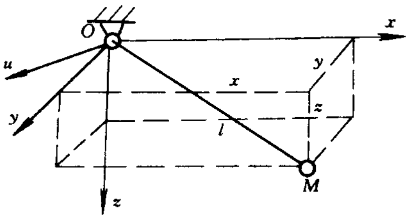

图 1－1－2

式中不显含时间参数 t，因此，质点 M 所受的约束属于定常几何约束。

（2）在约束方程中，显含时间参数 t 的约束称为**非定常几何约束**或**非稳定几何约束**。

图 1－1－2 中，质点 M 用长 l、质量可以忽略不计、不会伸长（或缩短）的柔性绳固结，此绳的另一端穿过固定的圆环 O，以匀速度 u 曳引。这是一个变长度的单摆。设初瞬时，即 $t=0$ 时，质点 M 至圆环 O 的绳长（即初始摆长）为 l_0，则任意瞬时 t 的摆长 $l=l_0-ut$，质点 M 的约束方程为

$$x^2+y^2+z^2=(l_0-ut)^2$$

式中显含时间参数 t，因此，这种约束属于非定常几何约束。

2）在几何约束中视约束方程是否为等式可分为双面几何约束和单面几何约束

（1）约束方程为等式的几何约束称为**双面几何约束**或**固执几何约束**。图 1－1－1 所示的单摆即属此约束。

（2）约束方程为不等式的几何约束称为**单面几何约束**或**非固执几何约束**。在图 1－1－1 中，如果单摆的刚杆改用柔性绳，那么，这种约束不允许质点 M 在半径为 l 的球面以外的空间运动，既允许它在

此球面上运动，也允许在球面以内的空间内运动。约束方程为

$$x^2+y^2+z^2\leqslant l^2$$

呈等式和不等式形式，属于单面几何约束。

准确地说，在图 1-1-2 中，变长度单摆的约束是单面非定常几何约束，约束方程为

$$x^2+y^2+z^2\leqslant(l_0-ut)^2$$

在本书中，如无特别说明，所涉及的约束均为双面约束。

1.1.3.2 运动约束

在质点系中，所加的约束不仅限制各质点在空间的位置，还限制它们运动的速度，这种约束称为**运动约束**，也称**速度约束**或**微分约束**。运动约束方程的一般形式为

$$f(\boldsymbol{r}_i,\dot{\boldsymbol{r}}_i,t)=0 \tag{1.1.3}$$

或

$$f(x_i,y_i,z_i,\dot{x}_i,\dot{y}_i,\dot{z}_i,t)=0 \tag{1.1.4}$$

其中

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i=\dot{x}_i\boldsymbol{i}+\dot{y}_i\boldsymbol{j}+\dot{z}_i\boldsymbol{k}$$

式中 $\dot{\boldsymbol{r}}_i$ 和 $\dot{x}_i$，$\dot{y}_i$，$\dot{z}_i$ 为第 i 个质点的速度和速度在直角坐标系中各坐标轴上的投影。在大多数的实际问题中，运动约束都可化简为与各质点速度的线性项有关的形式，即

$$f=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\Psi}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i+A=0 \tag{1.1.5}$$

或

$$f=\sum_{i=1}^{n}(A_i\dot{x}_i+B_i\dot{y}_i+C_i\dot{z}_i)+A=0 \tag{1.1.6}$$

$$\boldsymbol{\Psi}_i=(A_i,B_i,C_i)=A_i\boldsymbol{i}+B_i\boldsymbol{j}+C_i\boldsymbol{k} \tag{1.1.7}$$

式中 $\boldsymbol{\Psi}_i$、A_i、B_i、C_i 和 A 均为各质点速度和位置的函数，这种约束称为**线性的运动约束**，或称为**一阶线性约束**、**Pfaff 约束**。本书只讨论一阶线性的运动约束。

1）运动约束中的可积分的运动约束和不可积分的运动约束

（1）如果约束方程能够变换为某个函数的全微分，或满足可积分的条件（参见 1.1.6），这种约束称为**可积分的运动约束**。

在图1-1-3中，半径为 r 的圆柱体在粗糙的平直轨道上滚动而无滑动，它与轨道的接触点 A 的速度 v_A 恒为零，在图示瞬时，设圆柱中心 C 的坐标为 x_C、y_C，速度为 $\dot{x}_C$，圆柱的转角为 φ，角速度为 $\dot{\varphi}$，方向、转向如图所示。此圆柱的约束方程为

$$y_C = r$$

$$v_A = \dot{x}_C - r\dot{\varphi} = 0$$

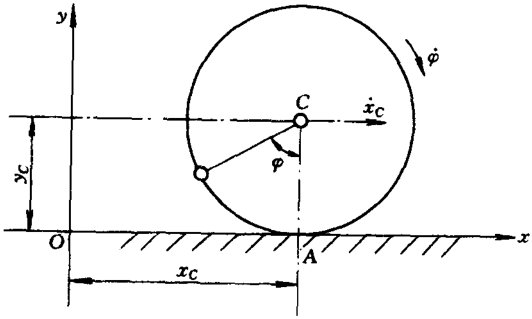

图 1-1-3

前者仅含坐标参数 y_C，属于定常的几何约束；后者包含了速度 $\dot{x}_C$ 和角速度 $\dot{\varphi}$，属于运动约束。它只含 $\dot{x}_C$、$\dot{\varphi}$ 的线性项，是线性的运动约束。在此运动约束方程的等号两侧乘以 $\mathrm{d}t$ 后，$\mathrm{d}x_C - \mathrm{d}(r\varphi)$ 可以写成函数 $F = x_C - r\varphi$ 的全微分，即

$$\mathrm{d}F = \mathrm{d}(x_C - r\varphi) = 0$$

积分后为

$$x_C - r\varphi + C = 0$$

式中只含坐标 x_C、角坐标 φ 和积分常数 C，是几何约束的形式，由此可知，可积分的运动约束可以变换为几何约束。

（2）如果运动约束方程不能化简为某函数的全微分，或不满足可积分的条件（参见 1.1.6），则称为**不可积分的运动约束**。

图 1-1-4 是一个简单的“跟踪系统”示意图，该系统可以简化为 A、B 两个质点。运动时，A 点的速度 v_A 始终指向 B 点，因此，它的约束方程为

$$\frac{\dot{y}_A}{\dot{x}_A}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A},\qquad \frac{\dot{z}_A}{\dot{x}_A}=\frac{z_B-z_A}{x_B-x_A}$$

或

$$\dot{y}_A(x_B-x_A)-\dot{x}_A(y_B-y_A)=0$$

$$\dot{z}_A(x_B-x_A)-\dot{x}_A(z_B-z_A)=0$$

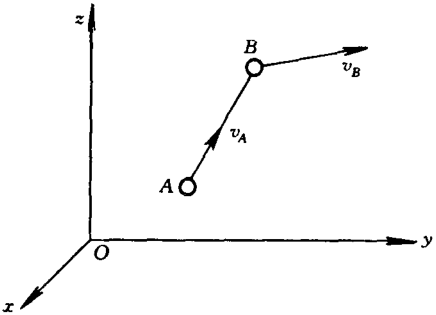

图 1-1-4

式中包含了 A 点的速度在直角坐标系中的投影 $\dot{x}_A$、$\dot{y}_A$、$\dot{z}_A$，属于运动约束，而且是线性的运动约束。在一般情况下，这种约束方程不满足可积分的条件（参见例 1-1），属于不可积分的运动约束。

2）其他类型的运动约束

如同几何约束那样，在运动约束中，视约束方程是否显含时间参数，有**定常运动约束**和**非定常运动约束**之分；视约束方程是否为等式，有**双面运动约束**和**单面运动约束**之分。

1.1.4 完整约束 非完整约束

1.1.4.1 完整约束

几何约束和可积分的运动约束实质上属于同一范畴的约束，在力学中称为**完整约束**。

1）几何约束

几何约束方程的一般形式为式（1.1.1）和式（1.1.2）。此方程对时间求一阶导数，得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}_i}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i+\frac{\partial f}{\partial t}=0 \tag{1.1.8}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial f}{\partial y_i}\dot{y}_i + \frac{\partial f}{\partial z_i}\dot{z}_i\right) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \qquad (1.1.9)$$

其中

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y_i}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z_i}\boldsymbol{k}$$

由此看出：①几何约束不仅对非自由质点系的位形有限制，同时对此质点系各质点的速度也有相应的限制；②这种几何约束的导数形式是一种特殊的运动约束——线性的运动约束。式（1.1.8）和式（1.1.9）的等号两侧同乘以 $\mathrm{d}t$，得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}_i}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i + \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t = 0 \qquad (1.1.10)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i + \frac{\partial f}{\partial y_i}\mathrm{d}y_i + \frac{\partial f}{\partial z_i}\mathrm{d}z_i\right) + \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t = 0 \qquad (1.1.11)$$

式（1.1.10）和式（1.1.11）为几何约束的微分形式，它是全微分形式，是可积分的运动约束。这表明：几何约束可以变换为对应的可积分的运动约束。

2）可积分的运动约束

如前所述，本书只讨论线性的运动约束。线性的运动约束方程的一般形式为式（1.1.5）和式（1.1.6），在它们的等号两侧同乘以 $\mathrm{d}t$，得

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\Psi}_i\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i + A\mathrm{d}t = 0 \qquad (1.1.12)$$

$$\sum_{i=1}^{n}(A_i\mathrm{d}x_i + B_i\mathrm{d}y_i + C_i\mathrm{d}z_i) + A\mathrm{d}t = 0 \qquad (1.1.13)$$

其中

$$\boldsymbol{\Psi}_i = A_i\boldsymbol{i} + B_i\boldsymbol{j} + C_i\boldsymbol{k}$$

它们与几何约束的微分形式（式（1.1.10）和式（1.1.11））有相同的形式。因为是可积分的运动约束，即式（1.1.12）和式（1.1.13）满足可积分的条件（详见 1.1.6），或者说，此二式可以写成某个函数 F 的全微分，所以，它们可以积分成为有限形式的约束方程

$$F(\boldsymbol{r}_i,\ t) = C$$

$$F(x_i,\ y_i,\ z_i,\ t) = C$$

式中 C 为积分常数。

由此看出：①线性可积分的运动约束不仅对非自由质点系各质点的运动速度有限制，同时，对该质点系的位形也有相应的限制；②线性可积分的运动约束的有限形式是几何约束的一个族，至于它是该族中的哪一个，则应根据运动的初始条件来确定。这表明：线性可积分的运动约束可以变换为对应的几何约束。

1.1.4.2 非完整约束

在力学中，不可积分的运动约束称为**非完整约束**。本书涉及的只限于线性的非完整约束，其约束方程的一般形式为式（1.1.12）和式（1.1.13），但不满足可积分的条件。

1.1.5 完整系统 非完整系统

1.1.5.1 完整系统

如果某质点系所受的约束都是完整约束，这个质点系称为**完整系统**，简称**完整系**。在本书的第三篇中，将集中讨论完整系统的动力学问题。

设某完整系统由 n 个质点组成，内有 d 个完整约束，约束方程的有限形式和微分形式分别为式（1.1.1）、式（1.1.2）、式（1.1.10）和式（1.1.11），即

$$f_\alpha(\boldsymbol{r}_i, t) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, d) \tag{1.1.14}$$

$$f_\alpha(x_i, y_i, z_i, t) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, d) \tag{1.1.15}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_i} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\mathrm{d}t = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, d) \tag{1.1.16}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i}\mathrm{d}y_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i}\mathrm{d}z_i\right) + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\mathrm{d}t = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \cdots, d) \tag{1.1.17}$$

1.1.5.2 非完整系统

某质点系所受的约束中只要有非完整约束，这个质点系就称为**非完整系统**，简称**非完整系**。在本书的第四篇中，将集中讨论非完整系统的动力学问题。

设某非完整系统由 n 个质点组成，内有 d 个完整约束，g 个非完整约束。d 个完整约束方程的有限形式和微分形式为式（1.1.14）～式（1.1.17），g 个非完整约束方程只有微分形式，为式（1.1.12）和式（1.1.13），即

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\Psi}_{\beta i} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i + A_\beta \mathrm{d}t = 0$$
$$(\beta = d+1, d+2, \cdots, d+g) \tag{1.1.18}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (A_{\beta i}\mathrm{d}x_i + B_{\beta i}\mathrm{d}y_i + C_{\beta i}\mathrm{d}z_i) + A_\beta \mathrm{d}t = 0$$
$$(\beta = d+1, d+2, \cdots, d+g) \tag{1.1.19}$$

比较式（1.1.16）和式（1.1.18）、式（1.1.17）和式（1.1.19）可以看出，它们有相同的形式，差异仅在于：完整约束方程（式（1.1.16）和式（1.1.17））是非完整约束方程（式（1.1.18）和式（1.1.19））的全微分的情形。正因如此，在非完整系统中，所有的约束方程可以用统一的形式表示，即

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\Psi}_{\beta i} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i + A_\beta \mathrm{d}t = 0 \quad (\beta = 1, 2, \cdots, d+g) \tag{1.1.20}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (A_{\beta i}\mathrm{d}x_i + B_{\beta i}\mathrm{d}y_i + C_{\beta i}\mathrm{d}z_i) + A_\beta \mathrm{d}t = 0$$
$$(\beta = 1, 2, \cdots, d+g) \tag{1.1.21}$$

对于该系统中的 d 个完整约束，式中的系数分别为

$$\boldsymbol{\Psi}_{\beta i} = \frac{\partial f_\beta}{\partial \boldsymbol{r}_i}, \quad A_{\beta i} = \frac{\partial f_\beta}{\partial x_i}, \quad B_{\beta i} = \frac{\partial f_\beta}{\partial y_i}, \quad C_{\beta i} = \frac{\partial f_\beta}{\partial z_i}, \quad A_\beta = \frac{\partial f_\beta}{\partial t}$$
$$(\beta = 1, 2, \cdots, d), \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.1.22}$$

1.1.6 线性运动约束可积条件简介

在分析力学中，有些动力学方程和原理只适用于完整系统，因此，对于运动约束来说，判别它的可积性有着重要的意义。在这里，简单介绍线性运动约束（Pfaff 约束、线性一阶微分方程）可积条件的一些结论。

为便于叙述，这里不再区分位形变量和时间变量。如果线性运动约束方程的变量总数为 N 个，则它的统一形式（式（1.1.21））可写成

$$\sum_{i=1}^{N} A_i(r_1, r_2, \cdots, r_N)\mathrm{d}r_i = 0 \tag{1.1.23}$$

此式可积分的充分必要条件是

$$(A_\alpha, A_\beta, A_\gamma)\cdot(\nabla\times(A_\alpha, A_\beta, A_\gamma)) = 0 \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \cdots, N) \tag{1.1.24}$$

其中

$$(A_\alpha, A_\beta, A_\gamma) = A_\alpha \boldsymbol{i} + A_\beta \boldsymbol{j} + A_\gamma \boldsymbol{k} \tag{1.1.25}$$

$$\nabla\times(A_\alpha, A_\beta, A_\gamma) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial r_\alpha} & \dfrac{\partial}{\partial r_\beta} & \dfrac{\partial}{\partial r_\gamma} \\ A_\alpha & A_\beta & A_\gamma \end{vmatrix} \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \cdots, N) \tag{1.1.26}$$

式（1.1.24）的展开式为

$$A_\alpha\left(\frac{\partial A_\gamma}{\partial r_\beta} - \frac{\partial A_\beta}{\partial r_\gamma}\right) + A_\beta\left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial r_\gamma} - \frac{\partial A_\gamma}{\partial r_\alpha}\right) + A_\gamma\left(\frac{\partial A_\beta}{\partial r_\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial r_\beta}\right) = 0$$

$$(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \cdots, N) \tag{1.1.27}$$

由此可以推导出下面三个结论。

1）式（1.1.23）只有三个变量，即当 $N=3$ 的情形

令 α、β、γ 分别等于 1、2、3，则线性运动约束方程式（1.1.23）为