SCHAUM'S ouTlines

全美经典学习指导系列

2000离散数学习题精解

〔美〕S. 利普舒茨　M. L. 利普森 著

林成森 译

大量精选习题帮助掌握离散数学

教授解答难题的技巧

有助于缩短学习时间

学习和考试的优秀读物

科学出版社

麦格劳-希尔教育出版集团

全美经典学习指导系列

2000 离散数学习题精解

〔美〕S. 利普舒茨　M. L. 利普森　著

林成森　译

科学出版社

麦格劳-希尔教育出版集团

2 0 0 2

内 容 简 介

本书是《全美经典学习指导系列》丛书中的一本.书中精选了离散数学2000多道习题,并给予详细解答.这将有助于读者迅速了解离散数学的基本知识和解题技巧,是读者复习和备考离散数学的一本好书.

本书可供理工科高年级学生和教师参考.

Seymour Lipschutz, Marc Lars Lipson, 2000 Solved Problems in Discrete Mathematics.

ISBN:0-07-038031-7

图字:01-2001-2121 号

图书在版编目(CIP)数据

2000离散数学习题精解/〔美〕利普舒茨,〔美〕利普森著;林成森译.—北京:科学出版社,2002.

(全美经典学习指导系列)

ISBN 7-03-010015-8

Ⅰ.2… Ⅱ.①利… ②利… ③林… Ⅲ.离散数学-解题 Ⅳ.O158-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第005043号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

西源印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002年3月第 一 版 开本:A4(890×1240)

2002年3月第一次印刷 印张:26

印数:1—5 000 字数:749 000

定价: 36.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

致 学 生

这本习题解集包括离散数学课程中的 2000 多道习题及其解答，其中既有计算题又有理论题（包括其证明）.

本书的每一节都是从基本的习题开始，逐渐增加难度. 多数学生对证明都感到困难，所以把理论题及其证明安排在预习所述理论的计算题之后.

通常，学生学习离散数学课程都是被指定使用一本教科书. 本书的章节是按多数教科书的顺序安排的（或许有些差异）. 但是，我们尽可能把各章节写成既便于改变其阅读顺序又不失其连贯性.

每道习题的解答紧接在习题之后. 你可在阅读习题解答之前自己试着解一下. 你也可以在阅读题解之后，不看本书，自己再做一遍.

本书可以作为离散数学课程的辅导书，亦可作为独立复习离散数学的读物.

著者

目　录

第一章 集 合 论

在这一章中,大写字母 $A,B,C,\cdots$表示集合,小写字母 $a,b,c,p,\cdots$表示集合中的元素或成员.我们也用集合记号:

$p\in A$ 表示p是A的一个元素或p属于A;

$A\subseteq B$ 或$B\supseteq A$ 表示A是B的一个子集或B包含A;

$A\subset B$ 或$B\supset A$ 表示A是B的一个真子集;

$\varnothing$ 表示空集;

$\mathbf{U}$ 表示全集.

下列集合将用特殊符号:

$\mathbf{N}$=正整数集合:$1,2,3,\cdots$;

$\mathbf{Z}$=整数集合:$\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots$;

$\mathbf{Q}$=有理数集合;

$\mathbf{R}$=实数集合.

1.1 集合、元素、集合相等

1.1 用集合记号重写下列陈述:

(a)元素 1 不是集合 A 的一个成员;

(b)元素 5 是集合 B 的一个成员;

(c)A 是C 的一个子集;

(d)A 不是D 的一个子集;

(e)F 含有G 的所有元素;

(f)E 和F 所含元素都相同.

解 ☞ 应用上述集合记号以及通过一符号加上一竖表示对该符号之否定:(a)$1\notin A$,(b)$5\in B$,(c)$A\subseteq C$,(d)$A\nsubseteq D$,(e)$G\subseteq F$,或等价地,$F\supseteq G$,(f)$E=F$.

1.2 举一个例子,叙述表示一个特殊集合的两个基本方法.

解 ☞ 若有可能的话,一种方法是列出集合的成员.例如

$$A=\{a,e,i,o,u\}$$

表示集合 A,它的元素是字母 a,e,i,o,u.注意,用逗号隔开元素,且用大括号{ }括起来.第二种方法是指出集合中的元素所具有的特征性质.例如

$$B=\{x:x\text{ 是整数},x>0\},$$

读作“B 是x 的集合,使得 x 是整数且x 大于0”,它表示集合 B 的元素是正整数.通常,一个字母 x 用来表示集合的一典型成员,冒号读作“使得”,逗号读作“且”.

1.3 叙述(a)扩张原则(形式上叙述一个集合完全为其成员所确定),(b)抽象原则(形式上叙述一个集合能用一个性质来描述).

解 ☞ (a)扩张原则:两个集合 A 和 B 相等当且仅当它们有相同的元素.

(b)抽象原则:任给一个集合 U 和一个性质P,存在一个集合 A 使得A 的各元素恰好是U 的具有性质 P 的那些成员.

1.4 列出下列集合的元素(此处 $\mathbf{N}=\{1,2,3,\cdots\}$):

(a)$A=\{x:x\in\mathbf{N},3<x<12\}$;

(b)$B=\{x:x\in\mathbf{N},x\text{ 是偶数},x<15\}$;

(c)$C=\{x: x\in\mathbf{N}, 4+x=3\}$.

解 ☞ (a) A 由 3 和 12 之间的正整数组成,因此 $A=\{4,5,6,7,8,9,10,11\}$.

(b)B 由小于 15 的正偶数组成,因此 $B=\{2,4,6,8,10,12,14\}$.

(c)没有正整数满足条件 $4+x=3$,因此 C 不含元素.换句话说,$C=\varnothing$(空集).

1.5 列出下列集合的元素:

(a)$A=\{x: x\in\mathbf{N}, 3<x<9\}$;

(b)$B=\{x: x\in\mathbf{N}, x^2+1=10\}$;

(c)$C=\{x: x\in\mathbf{N}, x$ 是奇数, $-5<x<5\}$.

解 ☞ (a)A 由 3 和 9 之间的所有正整数组成,因此 $A=\{4,5,6,7,8\}$.

(b)B 含有满足方程 $x^2+1=10$ 的所有正整数,因此 $B=\{3\}$.

(c)C 含有 -5 和 5 之间的所有正奇数,因此 $C=\{1,3\}$.

1.6 列出下列集合的元素(此处 $\mathbf{Z}=\{$整数$\}$):

(a)$A=\{x: x\in\mathbf{Z}, 3<x<9\}$;

(b)$B=\{x: x\in\mathbf{Z}, x^2+1=10\}$;

(c)$C=\{x: x\in\mathbf{Z}, x$ 是奇数, $-5<x<5\}$.

(与习题 1.5 比较.)

解 ☞ (a)A 由 3 和 9 之间的所有整数组成,因此 $A=\{4,5,6,7,8\}$.

(b)B 由所有满足 $x^2+1=10$ 的整数组成,因此 $B=\{-3,3\}$.

(c)C 由 -5 和 5 之间的所有奇数组成,因此 $C=\{-3,-1,1,3\}$.

1.7 列出下列集合的元素:

(a)$\{x: x$ 是一个元音字母, x 不是“a”或“i”$\}$;

(b)$\{x: x$ 是美国一州名, x 以字母 A 开头$\}$.

解 ☞ (a)从元音字母 a,e,i,o,u 中删去“a”和“i”得到$\{e,o,u\}$.

(b)恰好有 4 个这样的州名:{亚拉巴马,阿拉斯加,亚利桑那,阿肯色}.

1.8 列出下列集合的元素简明这些集合:

(a)$A=\{x: x\in\mathbf{R}, -5<x<5\}$;

(b)$B=\{x: x\in\mathbf{N}, x$ 是 3 的倍数$\}$;

(c)$C=\{x: x$ 是一美国公民, x 是一个青少年$\}$.

解 ☞ (a)由于 A 是无限的,我们不能列出它的元素.因此,我们用给定的 A 的性质来表示 A.

(b)由于 B 是无限的,尽管我们常常写成

$$B=\{3,6,9,\cdots\}$$

来表示该集合,此处每个元素比其前面的元素大 3,但不能列出它的所有元素.

(c)虽然在任一给定的时间里 C 是有限的集合,但要列出它的元素几乎是不可能的,因此我们用给定的 C 的性质来表示 C.

集合相等

1.9 设 $A=\{x: 3x=6\}$. $A=2$?

解 ☞ A 是由单个元素 2 组成的集合,即 $A=\{2\}$.数 2 属于 A,它不等于 A,一个元素 p 和单个元素集合$\{p\}$有本质差别.

1.10 集合$\{r,s,t\},\{t,s,r\},\{s,r,t\},\{t,r,s\}$中哪些是相等的呢?

解 ☞ 它们都相等.顺序不改变一个集合.

1.11 考虑下列集合:

$$\{w\},\{y,w,z\},\{w,y,x\},\{y,z,w\},\{w,x,y,z\},\{z,w\}.$$

它们之中哪些等于 $A=\{w,y,z\}$?

解 ☞ 集合$\{y,w,z\}$和$\{y,z,w\}$与A相等,就是说,它们有相同的3个元素.其他集合不等于A,因它们不含A的所有元素或含有其他元素.

1.12 考虑集合:

$$\{4,2\},\{x:x^2-6x+8=0\},\{x:x\in\mathbf{N},x\text{ 是偶数},1<x<5\}.$$

它们之中哪些等于$B=\{2,4\}$?

解 ☞ 由于它们都含元素2和4,且无其他元素,因此它们都等于B.

空集∅和全集U

1.13 判定

$$\varnothing,\{0\},\{\varnothing\}$$

3个集合中哪些是相同的?

解 ☞ 它们是互不相同的.集合$\{0\}$含一个元素:数零.集合$\varnothing$不含元素,它是空集.集合$\{\varnothing\}$也含一个元素:空集.(第三个集合是集合的集合.)

习题1.14~1.16参照下列集合:

$$X=\{x:x^2=9,2x=4\},\quad Y=\{x:x\neq x\},\quad Z=\{x:x+8=8\}.$$

1.14 X是空集吗?

解 ☞ 没有数同时满足$x^2=9$和$2x=4$,因此X是空集,即$X=\varnothing$.

1.15 Y是空集吗?

解 ☞ 我们指出"="意即"等于",因而Y也是空集.实际上,有些教科书定义空集为$\varnothing\equiv\{x:x\neq x\}$.

1.16 Z是空集吗?

解 ☞ 数零满足$x+8=8$,因此$Z=\{0\}$.于是,由于Z含有0,因此它不是空集,即$Z\neq\varnothing$.

1.17 考虑单词(i)empty,(ii)void,(iii)zero,(iv)null.哪个单词不同于其他单词,为什么?

解 ☞ 第一、第二和第四个单词为不含元素的集合.单词zero为一个具体的数.因此zero不同于其他单词.

1.18 结合一个例子,定义全集U.

解 ☞ 在任何集合理论的应用中,通常所研究的全体集合属于某个固定的大集合,该集合称为**全集**或**论域**.例如,在平面几何中,全集由平面中所有点组成;在人类人口研究中,全集由世界上所有的人组成.

1.19 给定$\mathbf{U}=\mathbf{N}=\{$正整数$\}$,指出下列哪些集合等于$\{2,4\}$:

$$A=\{\text{小于 6 的偶数}\},\quad B=\{x:x<5\},$$
$$C=\{x:(x-2)(x-4)(x+2)=0\}.$$

解 ☞ 集合A和C等于$\{2,4\}$.集合A不含负偶数或零,因它们不在全集中.集合B同时含有不在指定集合的1和3.集合C不含-2,因-2不是正整数.

1.20 叙述全集U是空集的情形.

解 ☞ 设U是某学院的所有音乐课的集合.可以想象在某一年里没有这样的课程,因此$\mathbf{U}=\varnothing$.

1.2 子集

1.21 解释$A\subseteq B$和$A\subset B$之间的差别.

解 ☞ $A\subseteq B$(A是B的一个子集)表示A的每个元素也都属于A,这里有可能$A=B$.$A\subset B$(A是B的一个**真子集**)表示A是B的一个子集,但$A\neq B$,因而B中至少有一个元素不在A中.

1.22　如何用文字叙述下列陈述的证明：

(a)A 等于 B；

(b)A 是 B 的一个子集；

(c)A 是 B 的一个真子集；

(d)A 不是 B 的一个子集.

解 ☞ (a)证明 A 的每个元素都属于 B 且 B 的每个元素也都属于 A.

(b)证明 A 的每个元素都属于 B.

(c)证明 A 的每个元素都属于 B，且 B 至少有一个元素不属于 A. 注意，没有必要证明 B 有多于一个元素不在 A 中.

(d)证明 A 有一个元素不在 B 中.

1.23　证明 $A=\{2,3,4,5\}$ 不是 $B=\{x:x\in\mathbf{N}, x$ 是偶数$\}$ 的一个子集.

证 ☞ 我们需要证明 A 中至少有一个元素不在 B 中. 现在 $3\in A$. 由于 B 由偶数组成，因而 $3\notin B$. 故 A 不是 B 的一个子集.

1.24　证明 $A=\{2,3,4,5\}$ 是 $C=\{1,2,3,\cdots,8,9\}$ 的一个真子集.

证 ☞ A 的每个元素都属于 C，因此 $A\subseteq C$. 另一方面，$1\in C$ 但 $1\notin A$，因此 $A\neq C$. 故 A 是 C 的一个真子集.

定理 1.1

(i)对任一集合 A，我们有 $\varnothing\subseteq A\subseteq\mathbf{U}$；

(ii)对任一集合 A，我们有 $A\subseteq A$；

(iii)若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$；

(iv)$A=B$ 当且仅当 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$.

1.25　证明定理 1.1(i).

证 ☞ 据定义，A 的所有成员都属于全集 $\mathbf{U}$，因此每个集合 A 都是全集 $\mathbf{U}$ 的子集，而且，空集 $\varnothing$ 是 A 的一个子集.

1.26　证明定理 1.1(ii).

证 ☞ 由于 A 的元素属于 A，因此每个集合 A 是其自身的一个子集.

1.27　证明定理 1.1(iii).

证 ☞ 若集合 A 的每个元素都属于集合 B，且 B 的每个元素都属于集合 C，则显然 A 的每个元素都属于 C. 换句话说，若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$.

1.28　证明定理 1.1(iv).

证 ☞ 若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则 A 和 B 有相同的元素，即 $A=B$. 反之，设 $A=B$. 由于每个集合是其自身的一个子集，因此 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$.

1.29　证明 $A=\{a,b,c\}$ 不是 $B=\{a,e,i,o,u\}$ 的一个子集.

证 ☞ 只须证明 A 至少有一个元素不在 B 中. 现在，$b\in A$，但 $b\notin B$，因此 A 不是 B 的一个子集. 另一方面，$c\in A$ 但 $c\notin B$，因此 $A\nsubseteq B$.（没有必要证明 b 和 c 都不属于 B.）

1.30　考虑下列集合：

$$A=\{a\},\quad B=\{a,c,b\},\quad C=\{c,a\},\quad D=\{c,b,a\},\quad E=\{b\},\quad \varnothing.$$

它们之中哪些是 $X=\{a,b,c\}$ 的子集？哪些是 X 的真子集？

解 ☞ 由于每个集合的元素都属于 X（包括没有元素的空集），因此它们都是 X 的子集. 特别地，因 A, C, E 和 $\varnothing$ 不等于 X，因此它们是 X 的真子集.

1.31　考虑下列集合：

$X=\{x:x$ 是一个整数，$x>1\}$，

$Y=\{y:y$ 是可被 2 整除的正整数$\}$，

$Z=\{z:z$ 是一个大于 10 的偶数$\}$.

它们之中哪些是 $W=\{2,4,6,\cdots\}$ 的子集?

解 ☞ 只有 Y 和 Z 是 W 的子集,因它们的元素都属于 W.(事实上,$Y=W$.)由于 X 有元素不属于 W,例如,$3\in X$,但 $3\notin W$,因此 X 不是 W 的一个子集.

1.32 设 $A=\{x,y,z\}$.A 包含多少个子集,且它们是什么?

解 ☞ 我们列出 A 的所有可能的子集.它们是$\{x,y,z\}$,$\{y,z\}$,$\{x,z\}$,$\{x,y\}$,$\{x\}$,$\{y\}$,$\{z\}$和空集$\varnothing$.A 有 8 个子集.

习题 1.33～1.36 考虑下列集合:

$\varnothing$, $A=\{1\}$, $B=\{1,3\}$, $C=\{1,5,9\}$,

$D=\{1,2,3,4,5\}$, $E=\{1,3,5,7,9\}$,

$\mathbf{U}=\{1,2,\cdots,8,9\}$.

1.33 在(a)$\varnothing,A$;(b)A,B 之间插入正确的符号$\subseteq$或$\nsubseteq$.

解 ☞ (a)$\varnothing\subseteq A$,因$\varnothing$是任一集合的子集.

(b)$A\subseteq B$,因 A 只有一个元素 1 且它也属于 B.

1.34 在(a)B,C;(b)B,E 之间插入正确的符号$\subseteq$或$\nsubseteq$.

解 ☞ (a)$B\nsubseteq C$,因 $3\in B$ 但 $3\notin C$.

(b)$B\subseteq E$,因 B 的元素也属于 E.

1.35 在(a)C,D;(b)C,E 之间插入正确的符号$\subseteq$或$\nsubseteq$.

解 ☞ (a)$C\nsubseteq D$,因 $9\in C$ 但 $9\notin D$.

(b)$C\subseteq E$,因 C 的元素也属于 E.

1.36 在(a)D,E;(b)$D,\mathbf{U}$ 之间插入正确的符号$\subseteq$或$\nsubseteq$.

解 ☞ (a)$D\nsubseteq E$,因 $2\in D$ 但 $2\notin E$.

(b)$D\subseteq\mathbf{U}$,因 D 的元素也属于 $\mathbf{U}$.

习题 1.37～1.40 考虑下列集合:

$A=\{x,z\}$, $B=\{y,z\}$, $C=\{w,x,y,z\}$, $D=\{v,w,z\}$, $E=\{z,y\}$.

1.37 在(a)A,C;(b)A,D 之间插入正确的符号$\subset$或$\not\subset$.

解 ☞ (a)$A\subset C$,因 A 是 C 的一个子集,但 $A\neq C$.

(b)$A\not\subset D$,因 $x\in A$ 但 $x\notin D$,即 A 甚至不是 D 的一个子集.

1.38 在(a)B,C;(b)B,E 之间插入正确的符号$\subset$或$\not\subset$.

解 ☞ (a)$B\subset C$,因 B 是 C 的一个子集,但 $B\neq C$.

(b)$B\not\subset E$.虽然 B 是 E 的一个子集,但我们尚有 $B=E$.

1.39 求包含所有这些集合作为其子集的最小集合 X.

解 ☞ 令 X 是由这些集合的所有元素(不重复)组成,因此 $X=\{v,w,x,y,z\}$.

1.40 求含于所有这些集合之中的最大集合 Y.

解 ☞ 令 Y 是由所有这些集合的公共元素组成,因此 $Y=\{z\}$.

1.41 设 $X=\{1,2,3\}$, $Y=\{2,3,4\}$, $Z=\{2\}$.求最大集合 W,使所有下列陈述是正确的:

$$W\nsubseteq X,\qquad W\subseteq Y,\qquad Z\nsubseteq W.$$

解 ☞ 由于 $W\subseteq Y$,因此只有 2,3 和 4 可能属于 W.由于 $Z\nsubseteq W$,因此元素 2 不属于 W.因此 $W=\{3,4\}$满足所要求的条件.集合$\{4\}$也满足所要求的条件,但它不是最大的集合.

1.42 指出包含集合:

$$\{狗,猫\},\quad \{鱼,猫,雪貂\},\quad \{狗,雪貂\}$$

的最小集合 X.

解 ☞ 令 X 由这些集合的所有元素组成：

$$X = \{狗,猫,鱼,雪貂\}.$$

1.43 设 $X=\{1,2,3\}$，$Z=\{1,2,3,4,5\}$．求所有可能的集合 Y 使得 $X\subset Y$ 且 $Y\subset Z$，即 X 是 Y 的真子集，Y 是 Z 的真子集．

解 ☞ Y 必须由 X 的元素 1,2,3 以及 Z 的至少一个其他元素 4 或 5 组成．因此 $Y=\{1,2,3,4\}$ 或 $Y=\{1,2,3,5\}$．注意，因 Y 是 Z 的一个真子集，因此 Y 不能同时含有 4 和 5．

1.44 设 A,B,C 是非空集合使得 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，且 $C\subseteq A$．你能对这些集合导出什么结论？

解 ☞ 由于 $B\subseteq C$，$C\subseteq A$，我们有 $B\subseteq A$．再由 $A\subseteq B$ 得到 $A=B$．同理，$B=C$．因此这 3 个集合是相等的．

习题 1.45～1.50 考虑一个未知集合 X 和下列 5 个集合：

$$A=\{1,2,3,4\},\quad B=\{2,3,4,5,6,7\},\quad C=\{3,4\},\quad D=\{4,5,6\},\quad E=\{3\}.$$

1.45 若 $X\subseteq A$ 且 $X\subseteq B$，则这 5 个集合中哪些集合能等于 X？

解 ☞ X 可以等于 C 或 E．注意 B 和 D 不是 A 的子集，以及 A 不是 B 的子集．

1.46 若 $X\not\subseteq D$ 且 $X\subseteq C$，则这 5 个集合中哪些集合能等于 X？

解 ☞ X 能够等于 C 或 E．注意，A,B 和 D 都不是 C 的子集，并且 C 是自身的一个子集．

1.47 若 $X\not\subseteq D$ 且 $X\not\subseteq B$，则这 5 个集合中哪些集合能等于 X？

解 ☞ X 能等于 A．注意 B,C,D 和 E 是 B 的子集．

1.48 若 $X\not\subseteq E$ 且 $X\subseteq B$，则这 5 个集合中哪些能等于 X？

解 ☞ X 能等于 B,C 或 D．A 不是 B 的一个子集，E 是自身的一个子集．

1.49 求包含所有 5 个集合的最小集合 M．

解 ☞ M 由这 5 个集合的所有元素组成，因此 $M=\{1,2,3,4,5,6,7\}$．

1.50 求最大集合 N，使它是这 5 个集合的子集．

解 ☞ N 由这 5 个集合的共同元素组成．不存在这样的元素，因此 $N=\varnothing$，它是空集．

1.51 任何一个集合都有一个真子集吗？

解 ☞ 空集没有一个真子集．其他任何一个集合都有 $\varnothing$ 作为它的一个真子集．有些教科书不称空集是一个真子集，在这种情况下，只含一个元素的集合没有真子集．

1.52 证明：若 A 是空集的一个子集，则 $A=\varnothing$．

证 ☞ 空集是任一集合的一个子集，具体地说，$\varnothing\subseteq A$．据假设，$A\subseteq\varnothing$．这两个条件意味着 $A=\varnothing$．

1.53 设 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$，以及 $a\in A$，$b\in B$，$c\in C$．下面的陈述：(1) $a\in C$，(2) $b\in A$，(3) $c\notin A$，哪些是正确的？

解 ☞ (1)据定理 1.1，A 是 C 的一个子集．因此 $a\in A$ 蕴含 $a\in C$，因而这个陈述总是正确的．

(2)由于元素 $b\in B$ 无需是 A 的元素，因此该陈述可能是错的．

(3)元素 $c\in C$ 可能是 A 的元素，因此 $c\notin A$ 未必是对的．

1.54 设 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$，以及设 $d\notin A$，$e\notin B$，$f\notin C$．下面的陈述：(1) $d\in B$，(2) $e\notin A$，(3) $f\notin A$，哪些是正确的？

解 ☞ (1)不在 A 中的元素 d 无需在 B 中，因此该陈述可能不对．

(2)由于 $e\notin B$ 且 $A\subseteq B$，因此 $e\notin A$ 总是对的．

(3)由于 $f\notin C$ 且 $A\subseteq C$，因此 $f\notin A$ 总是正确的．

可比较、不可比较和不相交的集合，文图

1.55 定义：(a)可比较和不可比较的集合，(b)不相交(分离)的集合．

解 ☞ (a)设 A 和 B 是两个集合.若 $A\subseteq B$ 或 $B\subseteq A$,则 A 和 B 是可比较的;若 $A\nsubseteq B$ 且 $B\nsubseteq A$,则 A 和 B 是不可比较的.

(b)若集合 A 和集合 B 没有共同的元素,即 A 没有元素属于 B 且 B 没有元素属于 A,则 A 和 B 是不相交(分离)的.

1.56 考虑下列集合:

$$A=\{1,2\},\quad B=\{1,2,3,4\},\quad C=\{1,5\},\quad D=\{3,4,5\},\quad E=\{4,5\}.$$

上面的集合中哪些是可比较的?

解 ☞ 因 $A\subseteq B$,因此 A 和 B 是可比较的,因 $E\subseteq D$,因而 D 和 E 是可比较的.其他任何一对不同的集合都是不可比较的.

1.57 习题 1.56 中,哪些集合是不相交的?

解 ☞ 集合 A 和 D 以及集合 A 和 E 是不相交的.其他任何一对集合有一个或更多个公共元素.

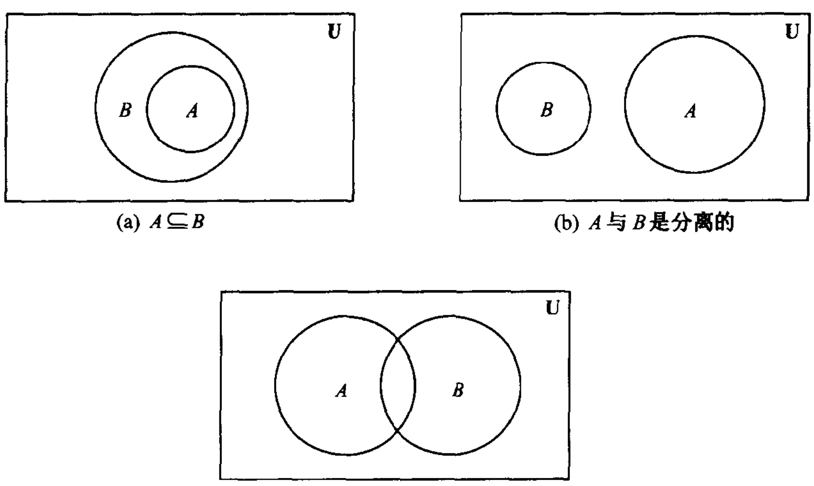
1.58 叙述哪些集合与集合:空集($\varnothing$),全集($\mathbf{U}$)可比较?

解 ☞ 任何一个集合 A 都和 $\varnothing$ 可比较,因为 $\varnothing\subseteq A$;任何一个集合 A 都和 $\mathbf{U}$ 可比较,因 $A\subseteq\mathbf{U}$.

1.59 描述集合的一个文图.

解 ☞ 文(venn)图是用平面上的点集来表示集合的一种图形表示.我们用一个矩形内部表示全集 $\mathbf{U}$,用该矩形内的圆盘表示其他的集合.若 $A\subseteq B$,则表示 A 的圆盘将整个在表示 B 的圆盘内,如图 1-1(a).若 A 与 B 是分离的(disjoint),即没有公共元素,则表示 A 的圆盘与表示 B 的圆盘离开,如图 1-1(b).

但是,假设 A 和 B 是任意的两个集合,则有可能某些对象在 A 中但不在 B 中,有些在 B 中但不在 A 中,有些同时在 A 和 B 中,有些既不在 A 中又不在 B 中,因此,一般地我们表示 A 和 B 如图 1-1(c).



(a) $A\subseteq B$　　(b) A 与 B 是分离的

(c)

图 1-1

1.60 画出集合 A,B,C 的一个文图,此处 A 和 B 有共同元素,B 和 C 有共同元素,但 A 和 C 不相交.

解 ☞ 见图 1-2(a).

1.61 画出集合 A,B,C 的一个文图,此处 $A\subseteq B$,集合 A 和 C 不相交,但 B 和 C 有公共元素.

解 ☞ 见图 1-2(b).

1.62 画出集合 A,B,C 的一个文图,此处 $A\subseteq B$,集合 B 和 C 不相交,但 A 和 C 有公共元

素.

解 ☞ 不存在这样的文图.若 A 和 C 有公共元素,比方说 x,且 $A \subseteq B$,则 x 也必属于 B.这样,B 和 C 也必有公共元素.

1.63 画出集合 A,B,C 的一个文图,此处三个集合互不相交.

解 ☞ 见图 1-2(c).

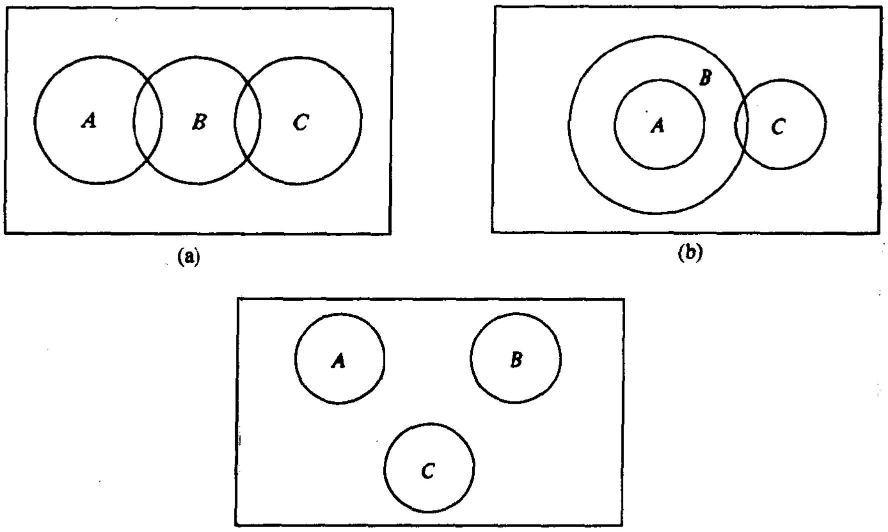


图 1-2

1.64 画出任意的三个集合 A,B,C 的一个文图,使得它们将全集 $\mathbf{U}$ 分成 $2^3=8$ 个区域.为什么有 8 个区域?

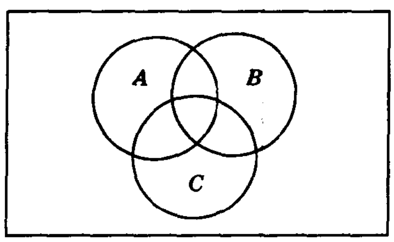


图 1-3

解 ☞ 见图 1-3.由于可能有元素:

(1) 在 A,B 和 C 中;
(2) 在 A 和 B 中,但不在 C 中;
(3) 在 A 和 C 中,但不在 B 中;
(4) 在 B 和 C 中,但不在 A 中;
(5) 仅仅在 A 中;
(6) 仅仅在 B 中;
(7) 仅仅在 C 中;
(8) 不在 A,B,C 中,

因此有 8 个区域.换句话说,对于每个给定的集合 X,$\mathbf{U}$ 的每个元素 x 有两种选择,即属于 X 或不属于 X.因此对于 3 个给定的集合有 $2^3=8$ 种可能性.

1.65 考虑 4 个集合 A_1,A_2,A_3,A_4 的一个一般的文图.它可将全集 $\mathbf{U}$ 分成多少个区域?

解 ☞ 全集 $\mathbf{U}$ 将被分成 $2^4=16$ 个区域.

1.3 集合运算

1.66 定义集合运算:(a)并;(b)交.

解 ☞ (a)两个集合 A 和 B 的并,用 $A \cup B$ 表示,它是由属于 A 或者属于 B 的所有元素构成的集合:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

这里"或"的含义是与(或).

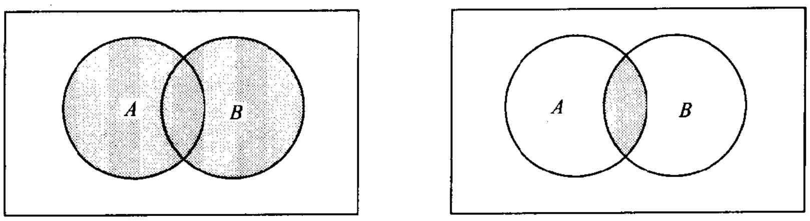
(b)两个集合 A 和 B 的**交**,用 $A\cap B$ 表示,它是既属于 A 又属于 B 的所有元素组成的集合:

$$A\cap B=\{x:x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

(注意,$A\cap B=\varnothing$ 意指 A 和 B 没有任何公共元素,即 A 与 B 是不相交的.)

1.67 应用集合 A 和 B 的文图,使阴影(shaded)区域表示:(a)$A\cup B$;(b)$A\cap B$.

解 ☞ (a)见图 1-4(a). (b)见图 1-4(b).



(a) $A\cup B$ 为阴影部分　　(b) $A\cap B$ 为阴影部分

图 1-4

1.68 定义集合运算:(a)一个集合的绝对补集,或简单地,补集;(b)两个集合的相对补集或差集.

解 ☞ (a)我们知道,在一个特定时刻里,所考虑的所有集合都是一个固定的全集 $\mathbf{U}$ 的子集.一个集合 A 的**绝对补集**,或简单地,**补**,用 A^c 表示,它是由属于全集 $\mathbf{U}$ 但不属于 A 的所有元素构成的集合:

$$A^c=\{x:x\in \mathbf{U},x\notin A\}.$$

有些教科书用 A' 或 $\overline{A}$ 表示 A 的补.

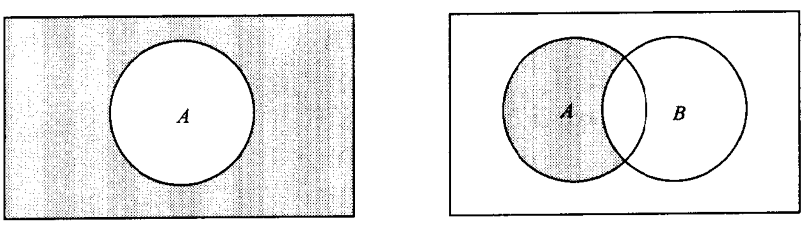
(b)一个集合 B 关于集合 A 的**相对补集**,或简单地,A 和 B 的**差**,用 $A\setminus B$ 表示,它是由属于 A 而不属于 B 的元素构成的集合:

$$A\setminus B=\{x:x\in A,x\notin B\}.$$

集合 $A\setminus B$ 读作"A 减 B".许多教科书用 $A-B$ 或 $A\sim B$ 表示 $A\setminus B$.

1.69 应用文图,使阴影(shaded)区域表示:(a)A^c 和(b)$A\setminus B$.

解 ☞ (a)见图 1-5(a);(b)见图 1-5(b).



(a) A^c 为阴影部分　　(b) $A\setminus B$ 为阴影部分

图 1-5

习题 1.70～1.78 考虑下列集合:

$$\mathbf{U}=\{1,2,3,\cdots,8,9\},\quad A=\{1,2,3,4\},\quad B=\{2,4,6,8\},\quad C=\{3,4,5,6\}.$$

1.70 求(a)$A\cup B$,(b)$A\cup C$,(c)$B\cup C$,(d)$B\cup B$.

解 ☞ 为了形成 A 和 B 的并,我们把 A 和 B 的所有元素放在一起.因此

$$A\cup B=\{1,2,3,4,6,8\}.$$

同理

$$A\cup C=\{1,2,3,4,5,6\},$$
$$B\cup C=\{2,4,6,8,3,5\},$$
$$B\cup B=\{2,4,6,8\}.$$

注意，$B \cup B$ 恰是 B.

1.71　求(a)$(A \cup B) \cup C$ 和(b)$A \cup (B \cup C)$.

解 ☞ (a)我们先求得$(A \cup B) = \{1,2,3,4,6,8\}$.因此$(A \cup B)$和 C 的并是

$$(A \cup B) \cup C = \{1,2,3,4,6,8,5\}.$$

(b)我们先求得$(B \cup C) = \{2,4,6,8,3,5\}$.因此 A 和$(B \cup C)$的并是

$$A \cup (B \cup C) = \{1,2,3,4,6,8,5\},$$

注意到，$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

1.72　求(a)$A \cap B$，(b)$A \cap C$，(c)$B \cap C$，(d)$B \cap B$.

解 ☞ 为了形成 A 和 B 的交，我们列出 A 和 B 的所有公共元素.于是 $A \cap B = \{2,4\}$.类似地，$A \cap C = \{3,4\}$，$B \cap C = \{4,6\}$，$B \cap B = \{2,4,6,8\}$.注意到，$B \cap B$ 其实就是 B.

1.73　求(a)$(A \cap B) \cap C$ 和(b)$A \cap (B \cap C)$.

解 ☞ (a)$A \cap B = \{2,4\}$，因此$\{2,4\}$和 C 的交是

$$(A \cap B) \cap C = \{4\}.$$

(b)$B \cap C = \{4,6\}$.这个集合和 A 的交是

$$A \cap (B \cap C) = \{4\}.$$

注意到，$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

1.74　求(a)A^c，(b)B^c，(c)C^c.

解 ☞ 集合 X^c 是由全集 $\mathbf{U}$ 中不属于 X 的元素组成.因此

(a)$A^c = \{5,6,7,8,9\}$，(b)$B^c = \{1,3,5,7,9\}$，(c)$C^c = \{1,2,7,8,9\}$.

1.75　求(a)$A \setminus B$，(b)$C \setminus A$，(c)$B \setminus C$，(d)$B \setminus A$，(e)$B \setminus B$.

解 ☞ (a) 集合 $A \setminus B$ 是由 A 中不属于 B 的元素组成.由于 $A = \{1,2,3,4\}$，且 $2,4 \in B$，因此 $A \setminus B = \{1,3\}$.

(b) C 中只有元素 5 和 6 不在 A 中，因此 $C \setminus A = \{5,6\}$.

(c) $B \setminus C = \{2,8\}$.

(d) $B \setminus A = \{6,8\}$.

(e) $B \setminus B = \varnothing$.

1.76　求(a)$A \cap (B \cup C)$和$(A \cap B) \cup (A \cap C)$.

解 ☞ (a)首先求得 $B \cup C = \{2,3,4,5,6,8\}$，因此

$$A \cap (B \cup C) = \{2,3,4\}.$$

(b)首先求得 $A \cap B = \{2,4\}$和 $A \cap C = \{3,4\}$，因此

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{2,3,4\}.$$

注意到，$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

1.77　求(a)$(A \cup B)^c$ 和(b)$A^c \cap B^c$.

解 ☞ (a)首先求得$(A \cup B) = \{1,2,3,4,6,8\}$，因此

$$(A \cup B)^c = \{5,7,9\}.$$

(b)由于 $A^c = \{5,6,7,8,9\}$，$B^c = \{1,3,5,7,9\}$，因此我们有

$$A^c \cap B^c = \{5,7,9\}.$$

注意到，$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

1.78　求(a)$(A \cap B) \setminus C$ 和(b)$(A \setminus B)^c$.

解 ☞ (a)$A \cap B = \{2,4\}$，注意到 $4 \in C$，但 $2 \notin C$，因此$(A \cap B) \setminus C = \{2\}$.

(b)$A \setminus B = \{1,3\}$，因此$(A \setminus B)^c = \{2,4,5,6,7,8,9\}$.

1.79　证明：$(A \cap B) \subseteq A \subseteq (A \cup B)$以及$(A \cap B) \subseteq B \subseteq (A \cup B)$.

证 ☞ 由于 $A \cap B$ 的每一个元素同时在 A 和 B 中，从而若 $x \in (A \cap B)$，则 $x \in A$，因此$(A \cap B) \subseteq A$.而且，若 $x \in A$，则 $x \in (A \cup B)$(由 $A \cup B$ 的定义)，因此 $A \subseteq (A \cup B)$.合并这两个结果得到