高等学校教学用书

# 计算机科学基础



冶金工业出版社

高 等 学 校 教 学 用 书

# 计 算 机 科 学 基 础

大连海运学院 曹晓东 编

冶 金 工 业 出 版 社

高等学校教学用书
**计算机科学基础**
大连海运学院　曹晓东　编
*
冶 金 工 业 出 版 社 出 版
（北京北河沿大街嵩祝院北巷39号）
新华书店北 京 发 行 所 发 行
冶金工业出版社印 刷 厂 印 刷
*
850×1168 1/32　印张 5 5/8 字数　145　千字
1986年 11 月第一版　　1986年 11 月第一次印刷
印数00,001～4,500册
统一书号，15062·4512　　定价0.95元

# 前　　言

计算机科学已经象数学、化学、物理学一样，作为一个独立的学科树立于百科林中。同其它古老的学科相比，可以说计算机科学还是一棵嫩苗。但是，它初露头角就显示出了旺盛的生命力。今天，计算机科学的丰姿已十分光彩照人，而它的发展前景及在应用方面的魅力，更是难以估量。

任何一门科学的产生，都有它雄厚的理论基础。计算机科学的理论基础是离散数学。离散数学以研究离散量的结构和相互间的关系为主要目标，其研究对象一般地是有限个和可数个元素，因此，它充分描述了计算机科学离散性的特点。可以这样说，研究计算机科学不研究离散数学是很困难的。离散数学是计算机科学工作者在浩瀚的数学海洋里采撷、收集、整理出来的离散浪花集。《计算机科学基础》则是离散数学的应用篇。那么，为什么不取名离散数学的应用而叫计算机科学基础呢？这是因为，它既是计算机科学理论基础——离散数学的应用篇，又是计算机科学的更高级形式——人工智能的智能数学基础。

《计算机科学基础》是编者多年来在大连海运学院计算机与自动控制系讲授离散数学的基础上整理出来的，内容包括：第一章形式语言与自动机；第二章可计算性理论引论；第三章定理自动证明；第四章模糊集论简介。

本书是作为研究生的教材编写的，亦可作为理工科院校计算机专业高年级的选修课教材，讲授40学时左右，如感觉讲授学时紧张，可不讲授第四章模糊集论简介。

本书在编写过程中得到了大连海运学院计算机与自动控制系陈有刚同志的大力协助，在此表示真诚的感谢。

由于编者水平有限，书中难免有缺点和错误，恳请读者批评指正。

编　者

1986年3月

# 目　录

# 第一章　形式语言与自动机

## 1.1　概　　述

人们对于客观世界的科学研究，其目的在于把抽象数学的形式化体系发展成为与现实生活极相似的理论模型。其所以使用这样的理论模型，是要提供一个通用结构，这个通用结构对于理解问题、增强直观感觉及对它们描述的物理系统的见解会收益更大。

在这一方面，计算机科学也是相同的。

形式语言与自动机就是数学系统用于计算的模型。同时，由于对自然科学（如生物学）和人造计算机模型的研究的发展，也推动了自然语言（例如英语）和模拟语言（如计算机程序）的发展。

这一章，将引进一个形式语言及与其相关的自动机体系。这个体系将给出用语法对语言进行描述和分类的形式化方法。这种形式化方法是这一章的核心内容，也是每个对计算机科学感兴趣的人应该熟悉的内容。

本章所给出的主要结果，关系到从形式语言到自动机的分类，而形式语言到自动机的分类又是靠演示形式语言和自动机的等价来确定语言的分类的。

事实上，我们这里所讨论的都是很特殊的自动机——接收机。一个接收机是一个自动化过程，这个过程的输入和传送必须有一位输出信息：接受输入或不接受输入。

在这种意义下，前面论述的等价、形式语言和自动机（接收机）将被归为一类，即表明它们大体上是相关的。

以上结论总括在图 1-1 中。处于同一水平线上的形式语言和

等价的。垂直边上表示形式语言和自动机的平行分类。

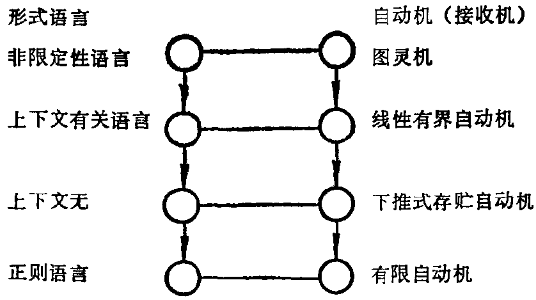



图 1-1 形式语言和自动机的关联归类图

自动机是等价的。例如，上下文无关文法和下推式存贮自动机是

本章所涉及的内容很多，但因受篇幅的限制，不可能对形式语言和与它相关的自动机作全面而系统的介绍。这里仅就形式语言和自动机在分类的相关理论上加以研究。

为内容的完整起见，本章包括了一节数学预备知识（第 1.2 节），接下去，在第1.3节简要介绍了短语结构语言的分类。第1.4节、第1.8节和第1.12节详细讨论了各类形式语言；而在第1.5、1.8、1.10和第1.13节则讨论了各类自动机。形式语言和自动机的相关理论在第1.6、1.9、1.11和1.14节给出。基本问题的讨论在1.15节给出，进一步探讨的课题在1.16节给出。

这里给出的所有定理多未给出证明，但是提供了许多例子，读者如对证明感兴趣，可参阅有关文献。

## 1.2 数学预备知识

为了更好地学习本章的内容，在学习形式语言与自动机理论之前，首先需学习一些数学预备知识，并引进一些特殊的数学符号。

## 1.2.1 集　合

一个集合是一群客体的聚集。这些客体称为集合的元素或成员。一个集合$A$的元素可如下表示：

$$A=\{a, b, c, \cdots\}$$

或者通过全部客体的一个共性来表示这个集合。例如：

$$A=\{x \mid x\text{具有一个给定的特性}\}$$

使用记号$x\in A$表示元素$x$属于集合$A$，而记号$x\notin A$则表示元素$x$不属于集合$A$。

具有有限个元素的集合$A$叫作有限集，否则叫作无限集。

和自然数集合$N=\{0, 1, 2, \cdots\}$有一一对应关系的集合$A$称为可数集，否则$A$叫作不可数集。例如

$$A=\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$$

是可数集，而

$$B=\{t \mid t>0\}$$

则是不可数集。

本章仅使用可数集。有限集$A$总是可数的。

一个有限集$A$的元素的个数叫作$A$的基数，记作$|A|$。例如，

$$A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_K\}$$

于是$A$的基数　$|A|=k$。

两个集合$A$和$B$相等，记作$A=B$，定义为：

当且仅当集合$A$中的每个元素都是集合$B$中的元素，并且反之亦然。用符号化描述如下：

$$A=B::=(\forall x)((x\in A\rightarrow x\in B)\wedge(x\in B\rightarrow x\in A))$$

其中符号“$\forall x$”读作“所有的$x$”；$x\in A\rightarrow x\in B$读作“如果$x$属于$A$，则$x$属于$B$”；“$\wedge$”读作与；“$::=$”读作“定义为”。

给定集合$A$和$B$，$B$是$A$的子集，记作

$B\subseteq A$，定义为：

$B$中的每个元素都是$A$中的元素。符号化为：

$$B \subseteq A ::= (\forall x)(x \in B \rightarrow x \in A)$$

显然有　$A$是$A$的子集，即$A \subseteq A$。

于是，可以用子集的概念描述两个集合的相等：

$$A = B ::= A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

任何不等于$A$的$A$的子集$B$称为$A$的真子集，记作$B \subset A$。即

$$B \subset A ::= (\forall x)(x \in B \rightarrow x \in A) \wedge (\exists y)(y \in A \wedge y \notin B)$$

其中　符号"$\exists y$"表示存在$y$

## 1.2.2　集合上的运算

以下是集合上的一些元素运算所形成的集合：

（$a$）交集：两个集合$A$和$B$的交集，记作$A \cap B$，它是由属于$A$并且属于$B$的那些元素所组成的集合，亦即

$$A \cap B ::= \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

显然有$A \cap A = A$

如果两个集合$A$和$B$没有公共元素，它们被说成是不相交的，并且它们的交集不包含任何元素。

一个不包含任何元素的集合定义为空集，用$\Phi$来表示。

如果$A \cap B = \Phi$，则有

（Ⅰ）空集是有限集；且$|\Phi| = 0$。

（Ⅱ）$A \cap \Phi = \Phi$，$A$是任意集合。

（Ⅲ）空集是任何集合的子集，即$\Phi \subseteq A$。

（$b$）并集：两个集合$A$和$B$的并集，记作$A \cup B$，它是由属于$A$或属于$B$的元素组成的集合，并且定义为

$$A \cup B ::= \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

其中　符号"$\vee$"读作或。于是有

（Ⅰ）$A \cup A = A$；$A \cup \Phi = A$

（Ⅱ）$A \cap B \subseteq A \cup B$

（$c$）差集：两个集合$A$和$B$的差集，记作$A - B$，它是由

属于$A$但不属于$B$的元素组成的集合，亦即

$A-B::=\{x \mid x\in A \wedge x \notin B\}$。于是有

（Ⅰ）$A-A=\Phi$；$A-\Phi=A$

（Ⅱ）如果$A\subseteq B$，则

$$A-B=\Phi$$

（$d$）补集：如果$B\subseteq A$，差集$A-B$叫作$B$相对于$A$的相对补集。

借助于引进一个包含所有客体的集合——全集$W$可以很容易地定义一个绝对补集。一个集合$A$的绝对补集记作$\overline{A}$，定义为$W-A$。于是有

（Ⅰ）$\overline{\Phi}=W-\Phi=W$

（Ⅱ）$\overline{W}=W-W=\Phi$

（Ⅲ）设$A$是一个集合，则$A\subseteq W$

## 1.2.3 集 合 代 数

设$A$、$B$、$C$是任何集合，其交、并及绝对补运算应遵守下列法则：

（$a$）交换律

$$A\cap B=B\cap A$$
$$A\cup B=B\cup A$$

（$b$）结合律

$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$$
$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$$

（$c$）分配律

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$
$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

（$d$）德·摩根律

$$(A\overline{\cap} B)=\overline{A}\cup\overline{B}$$
$$(A\overline{\cup} B)=\overline{A}\cap\overline{B}$$

### 1.2.4 集合中的集合

组成集合的客体可以又是集合。

假设$S$是一个以集合为元素的集合，例如

$$S=\{A，B，C，\cdots\}$$

其中，$A$、$B$、$C$是集合。但是，这里应注意：若$A\in S$且$x\in A$，但$x\in S$是无意义的。

一个集合$A$的所有子集构成的集合称为$A$的幂集，用$2^A$或$\rho(A)$来表示。其定义为：

$$2^A=\{B\mid B\subseteq A\}$$

如果$A$是一个有限集，则$2^A$也是一个有限集，并且

$$|2^A|=2^{|A|}。$$

例如，若$A=\{a，b\}$，则

$$2^A=\{\phi，\{a\}，\{b\}，\{a，b\}\}$$

### 1.2.5 笛卡尔乘积

设$A$和$B$是集合，$A$和$B$的笛卡尔积$A\times B$是如下定义的有序对的集合：

$$A\times B=\{\langle a，b\rangle\mid a\in A\wedge b\in B\}$$

一般，$k$个集合的笛卡尔积定义为：

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_k=\{\langle a_1，a_2，\cdots，a_k\rangle\mid a_1\in A_1\wedge\cdots\wedge a_k\in A_k\}$$

注意，一般$A\times B\neq B\times A$，且

$$(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)。$$

### 1.2.6 集合上的二元关系

两个集合$A$和$B$之间的一个二元关系$R$是笛卡尔积$A\times B$的任一子集。即$R\subseteq A\times B$。例如，给定集合$A=\{a，b\}$和$B=\{1，2，3\}$关系$R=\{\langle a，1\rangle，\langle b，2\rangle，\langle b，3\rangle\}$可以用布尔矩阵（0和1的矩阵）表示如下：

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline a & \multirow{2}{*}{} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

当$A=B$时，$R\subseteq A\times A$称为$A$上的二元关系。

两个关系$R_1\subseteq A\times B$和$R_2\subseteq B\times C$的合成记为$R_1\circ R_2$，定义为：

$$R_1\circ R_2=\{\langle a,\ c\rangle \mid \langle a,\ b\rangle\in R_1\wedge\langle b,\ c\rangle\in R_2\}$$

容易证明，两个关系$R_1$和$R_2$的合成关系$R_1\circ R_2$的布尔矩阵等于$R_1$和$R_2$的布尔矩阵的积。和矩阵乘法一样，合成是可结合的但不是可交换的。

下面给出一个关系$R$的闭包的概念。

一个关系$R$的闭包是满足如下性质的关系$R'$：

（Ⅰ）$R'$是自反的（对称的，可传递的）；

（Ⅱ）$R\subseteq R'$；

（Ⅲ）若存在$R''\supseteq R$，则$R''\supseteq R'$。

令$R$是集合$A$上的一个关系，$R$的可传递闭包记作$R^+$，定义为：

$$R^+=\bigcup_{k=1}^{\infty}R^k$$

其中　$R^k$是$R$和$R$的$k$次复合。

$R$的自反可传递闭包记作$R^*$，定义为：

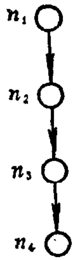
$$R^*=\bigcup_{k=0}^{\infty}R^k=R^\circ\cup R^+$$

其中　$R^\circ$是$A$上的恒等关系，即

$R^\circ=\{\langle a,\ a\rangle \mid a\in A\}$，可用单位布尔矩阵来表示。

关系$R$的可传递闭包是包含$R$的最小可传递关系。利用直线图上关联路径的术语更容易理解可传递闭包的概念。

一个直线图由一个结点集$N=\{n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_k\}$和从一个结点联到另一个结点的直线箭头集组成。一个直线图如图1-2($a$)所示。



$$R=\begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

($a$) 直线图　　　　($b$) $R$的布尔矩阵表达式

图 1-2　一个直线图及与它直接相关的关系矩阵

$N$上的直线联结关系$R$定义如下:

$$R=\{\langle n_i,\ n_j\rangle \mid \text{有一个从} n_i \text{到} n_j \text{的箭头}\}$$

$R$的布尔矩阵表达式如图1-2($b$)所示。

$R$的可传递闭包是:

$$R^+=\{\langle n_i,\ n_j\rangle \mid \text{从} n_i \text{到} n_j \text{有一条路径}\}$$

这里一条路径是一个或多个头尾相关联的箭头序列。例如，图1-2($a$)中有一条从$n_1$到$n_4$的路径。可以验证:

$$R^k=\{\langle n_i,\ n_j\rangle \mid \text{从} n_i \text{到} n_j \text{恰有} k \text{个箭头的一条路径}\}$$

关系$R^+$则是由结点之间一条非零路径的所有偶对组成。

若从结点$n_i$到$n_j$存在一条非零路径（或$n_i=n_j$，则它从自身到自身是可达的)，则说从结点$n_i$到$n_j$是可达的。这样$R$的自反可传递闭包可定义为

$$R^*=\{\langle n_i,\ n_j\rangle \mid \text{从} n_i \text{到} n_j \text{是可达的}\}$$

$R^+$和$R^*$的布尔矩阵表达式为

$$R^+=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\quad R^*=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 1.2.7　映射（函数）

设$A$和$B$是集合，由$A$到$B$的一个映射$f$记作$f: A\rightarrow B$，

它是$A$和$B$之间的一个二元关系，其中每一个$a \in A$恰好关联到一个$b \in B$，$A$叫作$f$的定义域，$B$叫作$f$的值域。若$b=f(a)$，则$b \in B$叫作$f$映射下$a \in A$的像，$a$叫作$b$的原像。

注意，一个函数的定义域或值域可能是集合中的集合（即子集）。在结果函数中经常遇到值域是子集的情形。

### 1.2.8 字符串（行）

设$V=\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$是一个字符的有限集，字符的非空集合叫作一个字母表。

一个字符串是来自字母表$V$的有限字符的并置，包括空串在内。例如，

$x=a_1a_2\cdots a_k$，其中$a_i \in V$，对所有的$i$。若$k=0$，$x$是空串，记作$\lambda$，即$x=\lambda$。

一个字符串$x$的长度记作：$|x|$，它等于$x$中字符的个数。例如，

$$|a_1, a_2, \cdots, a_k|=k$$
$$|\lambda|=0$$

设$x=a_1a_2\cdots a_k$和$y=b_1b_2\cdots b_m$是两个串，当且仅当

（a） $|x|=|y|$，即$m=k$；

（b） $a_i=b_i$，$i=1, 2, \cdots, k$。

才说$x$和$y$这两个串相等。

### 1.2.9 串的运算

（1）反转（或叫反射、变换）运算

若$x=a_1a_2\cdots a_k$，$x$的反转记作$x^R$，并且

$$x^R=a_k a_{k-1}\cdots a_1$$

（2）联结运算

设$x$和$y$是按上述定义的串，$x$和$y$的联结记作$x \cdot y$（点经常被省略），写为

$$x \cdot y=a_1a_2\cdots a_k b_1b_2\cdots b_m$$

联结满足下面的性质：

（Ⅰ）可结合

$$x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$$

（Ⅱ）不可交换

$$x\cdot y\neq y\cdot x$$

（Ⅲ）空串$\lambda$和任何串$x$联结恒等于串$x$，即

$$x\cdot\lambda=\lambda\cdot x=x$$

（3）幂运算

设$x$是任何串，则$x$的幂定义如下：

$$x^0=\lambda$$

$$x^1=x$$

$$x^k=x\cdot x^{k-1},\qquad k=2,\ 3,\ \cdots$$

### 1.2.10 子　　串

若存在串$u$，$v$使得$x=uyv$，则说$y$是$x$的子串。若$uv\neq\lambda$，则说$y$是$x$的真子串。

### 1.2.11 语　　言

设$L^*$是来自字母表$V$的串集（包括空串在内），于是$L^*$的任意可数子集$L$称为来自字母表$V$的一个语言。

若$L$是一个语言，则任何串$x\in L$称作$L$的一个句子（或字）。

若$L$是有限集，则$L$称为有限语言；

若$L$是无限集，则$L$称为无限语言。

例如，设$V=\{a,\ b\}$，则语言

$L_1=\{\lambda,\ aa,\ aba,\ abba\}$是有限语言，而

$L_2=\{a^kb^k|\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$则是无限语言。

### 1.2.12 语言上的运算

因为语言是集合，所以集合上的并运算、交运算均可在语言上进行。而语言上的下列运算是很重要的。

（1）反转运算

若$L$是语言，则它的反转$L^R$也是语言，并且

$$L^R=\{x^R|\ x\in L\}$$

（2）联结运算

设$L_1$和$L_2$是两个语言，它们的联结记作$L_1\cdot L_2$。其定义如下：

$$L_1\cdot L_2=\{x_1x_2|\ x_1\in L_1\wedge x_2\in L_2\}$$

联结运算满足如下性质：

（Ⅰ）可结合

$$L_1\cdot(L_2\cdot L_3)=(L_1\cdot L_2)\cdot L_3$$

（Ⅱ）不可交换

$$L_1\cdot L_2\neq L_2\cdot L_1$$

设$\Lambda$是一个仅包含空串的集合，$\Lambda=\{\lambda\}\neq\phi$。于是在语言的联结运算中，$\Lambda$是一个恒等函数，即

$$L\cdot\Lambda=\Lambda\cdot L=L$$

注意，因为$\phi$不包含任何元素，所以

$$L\cdot\phi=\phi\cdot L=\phi$$

（Ⅲ）联结对并运算满足分配律

$$L_1\cdot(L_2\cup L_3)=(L_1\cdot L_2)\cup(L_1\cdot L_3)$$

（Ⅳ）并运算对联结运算不满足分配律

$$L_1\cup(L_2\cdot L_3)\neq(L_1\cup L_2)\cdot(L_1\cup L_3)$$

（Ⅴ）联结运算对交运算不满足分配律

$$L_1\cdot(L_2\cap L_3)\neq(L_1\cdot L_2)\cap(L_1\cdot L_3)$$

（Ⅵ）交运算对联结运算不满足分配律

$$L_1\cap(L_2\cdot L_3)\neq(L_1\cap L_2)\cdot(L_1\cap L_3)$$

（3）幂运算

$$L^0=\Lambda$$

$$L^1=L$$

$$L^k=L\cdot L^{k-1},\qquad k=2,\ 3,$$

（4）闭包运算

一个语言$L$的闭包记作$L^*$，它是来自$L$的所有有限串组成的