



Л.П.巴良柯夫著

# 拱桥计算

(拱与拱上结构联合作用)

# 拱 桥 計 算

Л.П. 巴良柯夫 著

叶蜚章 胡人礼 译校  
李德沛 周孝贤

人 民 鉄 道 出 版 社 .

1 9 6 4 年 • 北 京

本书介绍考虑拱与拱上结构联合作用时，无铰拱拱桥的计算理论基础和实用计算方法，并备有考虑拱与拱上结构联合计算的各种数表。

本书读者对象为桥梁工程师和研究人員，亦可作为高等院校建筑工程专业学生的参考书籍。

## 拱 桥 計 算

РАСЧЕТ АРОЧНЫХ МОСТОВ

苏联 Л.П.ПОЛЯКОВ 著

苏联乌克兰苏维埃社会主义共和国建筑和艺术文献出版社

(一九六二年基辅俄文版)

Государственное издательство литературы по  
строительству и архитектуре усср

Киев 1962

叶蜚章 胡人礼 译校

李德沛 周孝贤

人民铁道出版社出版

(北京市霞公府甲24号)

北京市书刊出版业营业许可证出字第010号

新华书店北京发行所发行

人民铁道出版社印刷厂印

书号 1930 开本  $850 \times 1168 \frac{1}{32}$  印张  $11 \frac{1}{4}$  插页 2 字数 238 千

1964年4月第1版

1964年4月第1版第1次印刷

印数 0,001—3,200 册 定价(科六) 1.70 元

## 目 录

|                                 |     |
|---------------------------------|-----|
| 概 述.....                        | 1   |
| 第一章 拱桥基本参数的确定.....              | 5   |
| 拱及拱上结构主要尺寸的选择.....              | 5   |
| 拱轴线的轮廓.....                     | 6   |
| 拱横截面惯性矩的变化规律.....               | 11  |
| 第二章 用结构力学方法计算拱桥.....            | 16  |
| 计算图式的确定.....                    | 16  |
| 基本体系和赘余未知数的选择.....              | 19  |
| 拱上结构赘余未知数影响线的绘制.....            | 23  |
| 拱赘余未知数使梁及拱中产生的弯矩.....           | 40  |
| 拱上结构对拱赘余未知数的影响.....             | 50  |
| 拱的赘余未知数影响线的绘制.....              | 69  |
| 确定由于温度变化使拱及拱上结构内所产生的内力.....     | 81  |
| 第三章 拱桥基本参数对梁中及拱中弯矩影响线标距的影响..... | 87  |
| 拱与梁刚度比的变化.....                  | 87  |
| 拱上结构立柱间距的变化.....                | 98  |
| 拱跨度尺寸的变化.....                   | 105 |
| 拱矢高的变化.....                     | 107 |
| 拱轴线形式的变化.....                   | 109 |
| 拱刚度的变化.....                     | 110 |
| 拱的弹性压缩.....                     | 115 |
| 拱与梁的材料弹性模量之比.....               | 124 |
| 第四章 利用模型和电阻应变仪测定进行拱桥计算.....     | 127 |
| 模型试验的任务.....                    | 127 |
| 拱桥模型试验的结果.....                  | 135 |

|                                    |     |
|------------------------------------|-----|
| <b>第五章 利用数表的拱桥计算</b> .....         | 148 |
| 基本计算公式.....                        | 148 |
| 算例.....                            | 154 |
| <b>拱与拱上结构联合计算时无铰拱拱桥计算数表</b> .....  | 186 |
| I. 拱桥计算一般数据表.....                  | 187 |
| II. 当拱上结构节间数目 $j=6$ 时拱桥计算数表.....   | 195 |
| III. 当拱上结构节间数目 $j=8$ 时拱桥计算数表.....  | 210 |
| IV. 当拱上结构节间数目 $j=10$ 时拱桥计算数表.....  | 223 |
| V. 当拱上结构节间数目 $j=12$ 时拱桥计算数表.....   | 253 |
| VI. 当拱上结构节间数目 $j=14$ 时拱桥计算数表.....  | 283 |
| VII. 当拱上结构节间数目 $j=16$ 时拱桥计算数表..... | 315 |
| <b>参考文献</b> .....                  | 353 |

## 概 述

直到现在为止，拱桥计算仍分解为拱计算与拱上结构计算，并且仍认为桥梁结构中这两部份的工作彼此间无关系：拱，看成是全部承受外荷载对桥影响的杆件；而拱上结构，只当作是将荷载传递给拱的杆件，但不与拱共同工作。对结构工作状况采取这样假定，其唯一的目的是为了简化建筑物的计算图式。但是，这种简化导致建筑物的实际强度大大地失去其真实性。

当荷载通过桥梁时，拱发生变形，桥面系会与它一道发生变形（图1）。这样一来，拱与桥面系就联合工作，致使它们同时产生内力。关于拱与拱上结构联合工作的问题，已进行了许多试验工作和理论研究，从其结果中的一系列例子表明，拱上结构是参与拱的工作的，在很大程度上它减轻拱的受载，并增大桥跨结构的总刚度。

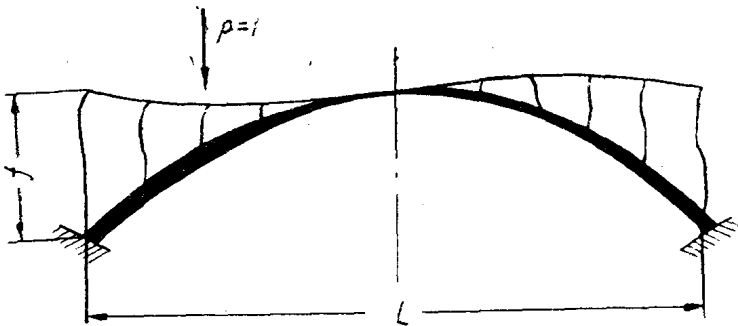


图1 拱桥的变形

将拱桥看成拱上结构与拱联合工作的结构时，其计算是非常困难的问题。在钢筋混凝土桥中，拱上结构与拱联合形成具有很多赘余未知数的刚架体系。

由于缺乏分析计算的方法，研究者只得采用以实验室结构物模型进行研究为基础的试验方法。

1925年別格斯 (Berré) 教授提出了绘制平面模型中任意內力影响线的仪器。1957年K. B. 柯瓦列夫 (Ковалев) 提出了不仅可以作平面模型试验, 而且可以进行立体模型试验的仪器。

苏联和外国学者在模型试验方面都做了许多工作, 但是结构物的《机械》计算\*仍未得到广泛应用, 这是由于应用中曾遇到很大的困难。比较完善的要算用电阻应变仪绘制试验影响线的方法。

试验研究的意义在于它们指出了拱的计算中考虑拱上结构的必要性, 可是到目前为止拱桥计算仍未考虑拱与拱上结构的联合作用, 因为至今尚未提出在实际计算中获得认可的方法。

有关拱桥联合计算方面已经发表的全部著作可以分为两类: 第一类属于作者为了给自己面临的课题提供精确计算方法方面的著作。通常, 精确计算方法会使问题的解决复杂化, 为了求得问题的解决, 必须在计算工作上耗费实际上所不容许的大量时间。

第二类是属于近似计算方法方面的著作。在近似计算方法中采用了一系列的假定: 立柱与拱以及与梁之间均为铰接, 拱的惯性矩按余弦规律变化, 拱的轴线方程按二次抛物线采用等等。

制定带有拱上结构的拱的近似算法是具有重大实际意义的, 因为这种方法比精确计算方法大为简化。从实用观点来看, 又能保证适当的精确度。

有些假定的合理性已经经过详尽的分析, 特别是证明了由于考虑立柱惯性矩要比拱和梁小很多倍, 在计算图式中立柱可以采用铰接。但另外有许多假定还没有经过分析, 譬如, 至今仍未阐明拱的惯性矩变化规律、拱上结构的节间尺寸、拱的矢高、拱的跨度及拱与梁惯性矩的比例等变化是如何影响弯矩影响线的标距。

---

\* 结构物的《机械》计算是指借分析模型的变形来计算结构物的內力。前面所说美国別格斯教授所提出借仪器绘制模型中內力影响线的方法即属于结构物《机械》计算方法, 本书第四章借电阻应变仪测定拱桥变形来绘制其影响线的方法也属于《机械》计算方法。

的。

在带有拱上结构的拱桥计算中，拱轴线方程采用二次抛物线的现有计算方法应用范围非常有限。众所周知，倘若恒载强度沿跨长变化很小时，这种轮廓线是适宜的。实际上荷载向拱脚增大，因此，拱轴线的轮廓以采用列格伊（Лерей）悬索曲线①或四次抛物线②较为恰当。

所有研究拱与拱上结构联合工作计算的工作者给自己规定了这样的课题：提出方程式数量最少，且每一方程式中赘余未知数数量也最少的计算方法。然而，在建议的所有方法中，当每一荷载情况下，都必须求解大量的方程式，实际上这是很难完成的，其结果便迫使设计者忽略拱与拱上结构的相互作用。

本书阐述了在考虑空腹式拱上结构时无铰拱桥计算的理论基础，并编制了数表，借它可以迅速而又精确地求出拱和拱上结构中所有截面的内力影响线的标距。工程师完全可以按表进行拱与拱上结构的联合计算，不必求解方程式，从而使计算工作大为简化。

在本书所举的算例中，列述了带有拱上结构的无铰拱桥的主要计算公式，并说明了利用数表求解联合计算时拱上结构的梁和拱的内力的步骤。

① 按  $y = \frac{f}{m-1} (\cosh \frac{x}{l} - 1)$  式决定的曲线叫做列格伊悬索线，此曲线与恒载压力曲线是完全吻合的，因为它根据拱轴线与恒载压力曲线吻合的条件求得的。该式的演化不作介绍，请参阅有关书籍。

——译注

② И. С. 莫洛佐夫曾建议采用四次抛物线作为拱轴线，其方程式的形式如下〔即本书公式（6）〕：

$$y = f \left[ \mu \left( -\frac{x}{l} \right)^2 + (1 - \mu) \left( -\frac{x}{l} \right)^4 \right]。$$

此拱轴线仅与恒载压力曲线吻合于拱顶、拱脚和四分之一跨度处，式中  $\mu$  值也就是以拱轴线吻合于这些点为原则来确定，请见本书公式（12）的推导。И. С. 莫洛佐夫建议的拱轴线方程式接近于列格伊悬索线，其所以不同，是在于 И. С. 莫洛佐夫为了在编制数表时使数学计算简化的缘故。

——译注

本书考虑空腹式拱上结构的拱的计算数表应用范围很广，既可用于联合作用的计算，又可用于单独拱的计算。

本书还研究了各种因素对拱内力影响线标距和拱上结构内力影响线标距的影响。

为了验证理论计算与所采用假定的正确性，曾进行了带有空腹式拱上结构的拱桥模型试验。在移动荷载下进行了试验，并作出了梁和拱所有截面中的弯矩影响线。

## 第一章 拱桥基本参数的确定

### 拱及拱上结构主要尺寸的选择

钢筋混凝土桥梁杆件的主要尺寸——梁高、梁宽、版厚、拱高、拱宽及钢筋数量等等——完全根据作用于结构上的荷载和建桥的材料性质所进行的结构计算来确定。

但是为了进行桥梁计算，必须预先知道结构的主要尺寸，以便计算结构的自重。此外，在静不定结构中为了求解赘余未知数，还必须知道截面的尺寸。

因此，在着手设计桥梁时，应根据实践资料和设计经验预先拟定桥梁杆件的主要尺寸，然后按计算结果进一步加以确定和校正。

拱上结构的尺寸类似梁式桥来拟定。

立柱顺桥梁方向的间距决定立柱所支承的纵梁的高度。该间距采用4~6米。

在拱平面内，立柱截面厚度采用25~40厘米。在横截方向，立柱厚度可增大到50厘米和50厘米以上。高的立柱（高过10米者）视为例外，对于这种立柱应给与较大的厚度，要随立柱在拱平面内的纵向挠曲计算而定。为了标准化起见，最好所有立柱具有相同的厚度。但是，对于较高的立柱可按尺寸分为几类来采用不同的厚度。

拱的尺寸首先按拱度来确定。对于钢筋混凝土桥，确定拱度的允许范围是比较困难的。要实现矢高与跨度比为 $\frac{1}{8} \sim \frac{1}{10}$ 的钢筋混凝土拱桥并不困难，但进一步改小这一比值则会使问题复杂化，不过在特殊的情况下也允许加以改小。桥梁经常采用的矢高为 $\frac{1}{4} \sim \frac{1}{5}$ 跨度。

钢筋混凝土拱厚度的选择是比较困难的，因为影响选择的因素繁多，如荷载大小、混凝土标号、拱的拱度、钢筋百分比等等。拱的厚度大致可以采用如下估算数值：

对于铁路桥梁的实体式拱

$$d_s = \frac{1}{30} \sim \frac{1}{50} L;$$

对于铁路桥梁的分片肋式拱

$$d_s = \frac{1}{20} \sim \frac{1}{40} L;$$

对于公路桥梁的实体式拱

$$d_s = \frac{1}{60} \sim \frac{1}{80} L;$$

对于公路桥梁的分片肋式拱

$$d_s = \frac{1}{45} \sim \frac{1}{50} L;$$

式中  $d_s$ ——拱顶处拱的厚度；

$L$ ——拱的计算跨度。

上述估算资料不适于特殊拱桥体系。

### 拱轴线的轮廓\*

在设计拱桥的过程中，首先必须确定拱轴线轮廓。所选择的拱轴线，应可使恒载及活载引起的弯矩达到最小值。这样的轴线称为合理的轴线。

一系列引人注意的专题论文，提出了单独拱的合理轴线的研究，但是由于问题复杂，不可能完全彻底地揭露问题的实质，也不可能对现今实践中所有的问题作出圆满的解答。

考虑拱上结构时，拱的合理轴线的问题就更为复杂。在一系列例子里作者已绘出过恒载作用下考虑拱上结构的拱轴线。虽然，对于实践中通用的拱与梁的惯性矩的比值，在考虑拱上结构

\* 本节利用 Л.С. 莫洛佐夫的《无铰拱桥计算》一书中的材料。莫斯科，苏联国家铁路运输出版社，1938年。

时，拱轴线纵座标的变化并不显著，但所得到的新拱轴线方程式却具有很复杂的形式，此方程不可能如同拱单独形式的问题来解决。在此情况下拱系计算只好限于用近似的数积法来进行。还有，按此方程要想为拱与拱上结构的联合计算编制数表是不可能的。

移动荷载作用下，确定拱轴线是极为复杂的。过去尚无人研究过此问题。

本计算系以单独拱的合理轴线作为基础，在确定拱的轴线时，采用按一定分析规律变化的连续恒载图式。这种方法能提供很圆满的精度，同时，又大量减轻分析计算的工作。通常，不采用集中荷载的压力曲线来确定拱轴线。为了计算荷载的强度，将立柱的集中反力看成是分布在节间长度上的荷载。

设计拱桥时，拱顶荷载 $g_v$ 和拱脚荷载 $g_n$ 均可以按预先拟定的结构尺寸来确定（图2）。荷载从拱顶向拱脚增大，在此情况下，压力曲线的形状取决于荷载沿拱跨分布的特征。当荷载从拱顶至拱脚按曲线变化时，则与压力曲线吻合的拱轴线一般可以用下列方程式来表示：

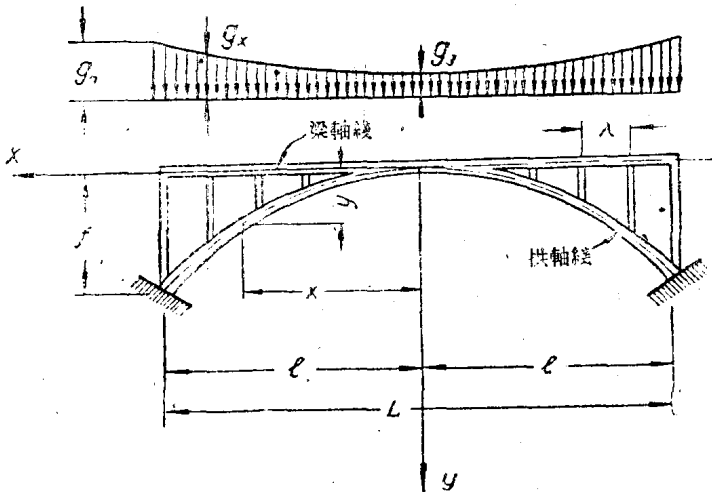


图2 换算荷载图

$$y = C + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + \cdots + C_nx^n,$$

而压力曲线的微分方程\*为

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{g_x}{H_g}. \quad (1)$$

荷载 $g_x$ 由常数项 $g_s$ 和另一变数项组成, 该变数项采用与纵座标 $y$ 成正比例的数值, 这样已具有足够的精确度:

$$g_x = g_s + \gamma y.$$

将此公式用于拱脚处, 从而求得换算荷载的重量:

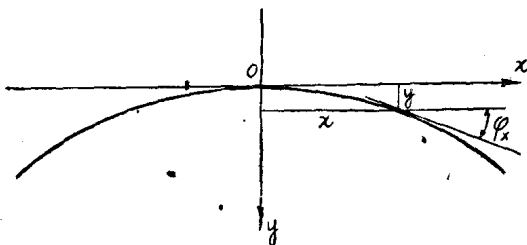
$$\gamma = \frac{g_n - g_s}{f}.$$

则

$$g_x = g_s + \frac{g_n - g_s}{f} y. \quad (2)$$

将荷载 $g_x$ 代入压力曲线的微分方程, 加以积分后, 便可以用荷载 $g_x$ 所形成的理论压力曲线作为拱的轴线方程。

\* 公式(1)的推导



设 $\varphi_x$ 为 $x$ 处拱轴线的切线倾角

$$\operatorname{tg} \varphi_x = \frac{dy}{dx},$$

因为拱轴线与恒载压力曲线吻合, 所以

$$\operatorname{tg} \varphi_x = \frac{dy}{dx} = \frac{Q_x}{H_g},$$

式中  $Q_x$ 为 $x$ 处因恒载产生的剪力,  $H_g$ 为恒载作用下产生的拱的推力。

由于  $\frac{dQ_x}{dx} = g_x$

所以  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{Q_x}{H_g} \right) = \frac{g_x}{H_g}.$

——譯注

П. С. 莫洛佐夫[42]指出, 这种情况下, 与压力曲线相吻合的拱轴线的方程式具有下面的形式

$$y = C_2 x^2 + C_4 x^4 + C_6 x^6 + \dots + C_n x^n.$$

除头二项外, 舍去其余各项, 得到最终的拱轴线方程式

$$-y = C_2 x^2 + C_4 x^4. \quad (3)$$

在任意截面内, 切线倾角的正切为

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = 2C_2 x + 4C_4 x^3. \quad (4)$$

拱脚切线倾角的正切等于

$$\operatorname{tg} \varphi_n = \frac{dy}{dx} = 2C_2 l + 4C_4 l^3. \quad (5)$$

系数  $C_2$  及  $C_4$  由初始条件求得。例如, 当  $x=l$ , 得  $y=f$ 。

将初始条件代入 (3) 及 (5) 式, 联解求得:

$$C_2 = \frac{4f - \operatorname{tg} \varphi_n l}{2l^2}; \quad C_4 = \frac{\operatorname{tg} \varphi_n l - 2f}{2l^4}.$$

将  $C_2$  及  $C_4$  值代入 (3) 及 (4) 式, 并令

$$\mu = 2 - \frac{\operatorname{tg} \varphi_n l}{2f},$$

得: 
$$y = f \left[ \mu \left( \frac{x}{l} \right)^2 + (1 - \mu) \left( \frac{x}{l} \right)^4 \right]; \quad (6)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{f}{l} \left[ 2\mu \left( \frac{x}{l} \right) + 4(1 - \mu) \left( \frac{x}{l} \right)^3 \right]. \quad (7)$$

令 
$$e = \left[ \mu \left( \frac{x}{l} \right)^2 + (1 - \mu) \left( \frac{x}{l} \right)^4 \right];$$

$$t = \left[ 2\mu \left( \frac{x}{l} \right) + 4(1 - \mu) \left( \frac{x}{l} \right)^3 \right].$$

则用以确定拱轴线纵座标的公式和切线倾角的正切公式之最终形式为:

$$y = ef; \quad (8)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = t \frac{f}{l}, \quad (9)$$

式中  $e$  及  $t$ ——随  $\frac{x}{l}$  而变的系数, 从表 1·I 及 2·I 求得。

在(6)及(7)式中, 引用可以由  $\frac{g_n}{g_s}$  荷载比值表示的系数  $\mu$ , 为此, 将(6)式之  $y$  值代入(2)式

$$g_x = g_s \left\{ 1 + \left( \frac{g_n}{g_s} - 1 \right) \left[ \mu \left( \frac{x}{l} \right)^2 + (1 - \mu) \left( \frac{x}{l} \right)^4 \right] \right\},$$

再以  $g_x$  式代入方程式(1), 积分二次, 得

$$y = \frac{g_s l^2}{H_g} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{x}{l} \right)^2 + \left( \frac{g_n}{g_s} - 1 \right) \left[ \frac{\mu}{12} \left( \frac{x}{l} \right)^4 + \frac{1-\mu}{30} \left( \frac{x}{l} \right)^6 \right] \right\},$$

当  $x = l$  时,  $y = f$ , 则  $H_g$  值为

$$H_g = \frac{g_s l^2}{60f} \left[ 30 + \left( \frac{g_n}{g_s} - 1 \right) (3\mu + 2) \right]. \quad (10)$$

将  $H_g$  代入求得的  $y$  值中, 经过移项后得

$$y = \frac{f}{30 + \left( \frac{g_n}{g_s} - 1 \right) (3\mu + 2)} \left\{ 30 \left( \frac{x}{l} \right)^2 + \left( \frac{g_n}{g_s} - 1 \right) \left[ 5\mu \left( \frac{x}{l} \right)^4 + 2(1 - \mu) \left( \frac{x}{l} \right)^6 \right] \right\}. \quad (11)$$

为使按四次抛物线采用的拱轴线与压力曲线吻合于五个点: 拱脚、拱顶及拱的四分之一点, 必须以  $\frac{x}{l} = 0.5$  来联解方程式(6)及(11)。

其余各点不吻合是不太重要的, 因为没有实际意义。

求解的结果为

$$\frac{g_n}{g_s} = \frac{6\mu^2 - 57\mu + 61}{6\mu^2 + 3\mu + 1}. \quad (12)$$

这样所得的公式, 一方面满足了拱轴线与所用荷载的压力曲线相吻合的条件; 另一方面提供了由  $\frac{g_n}{g_s}$  求系数  $\mu$  的可能性。

当制定拱与拱上结构联合计算数表时, 计算所采用的系数  $\mu$

值应包括拱桥设计中一切可能遇到的  $\frac{q_n}{q_s}$  值的情况。

### 拱横截面惯性矩的变化规律

、单独拱中，拱脚截面的厚度通常为拱顶截面的1.2—2.0倍。在许多情况下，将拱的拱脚截面略为增大可能是适宜的。但将拱脚剧烈增厚，不是在任何时候都是合理的方案，因为这样的拱具有较大的刚度，所以拱脚弯矩增大，特别是由于温度变化时，拱脚弯矩更为增大。

在拱桥中，拱的横截面沿跨长变化的规律应尽力这样来选择：以期使拱的每一截面材料强度可能全部都被利用。

、顾尔特·别依尔 (Курт Бейер) [5] 对横截面沿跨度按各种规律变化的拱圈计算实例中，指出了拱圈惯性矩的变化是如何影响内力的数值的。

他查明了在  $L=30$  米、 $f=5$  米及截面变化规律为

$$I_s : I \cos \varphi = 1 - (1-n)(1-2\xi^2)$$

的抛物线拱圈中，惯性矩的变化对于内力的影响 (图3)：纵向力几乎保持不变。

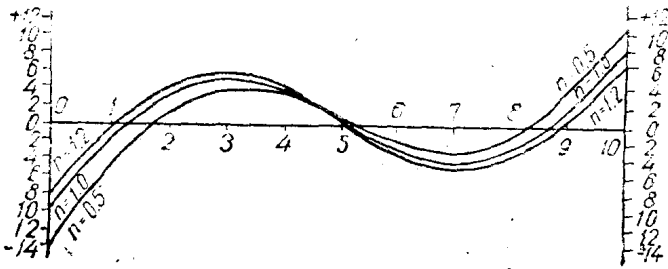


图3 半跨荷载下的弯矩图

现在尚未研究的问题是：当拱与拱上结构联合计算时，拱的合理截面的确定。

我们举例子来说明，在恒载作用下，拱内弯矩是如何随  $n$  值变化的；在移动荷载作用下，又将是如何变化的。

在带有空腹式拱上结构的拱桥中，当联合计算时，拱内的弯矩图按下列 $n$ 值绘制：

α)  $n = 1$  (在此情况下， $I_x = I_z \cos \varphi_x$ ) ;

δ)  $n = 0.25$ 。

拱的截面惯性矩

$$I_x = \frac{I_z}{\cos \varphi_x \left[ 1 - (1-n) \frac{x}{l} \right]^2}$$

拱轴线的方程式采用二次抛物线。

图4表示由于分布在半跨上强度 $q=1$ 的荷载所引起拱跨中的弯矩图。可以看到，当 $n=1$ 时，所得弯矩图的标距要比较小。

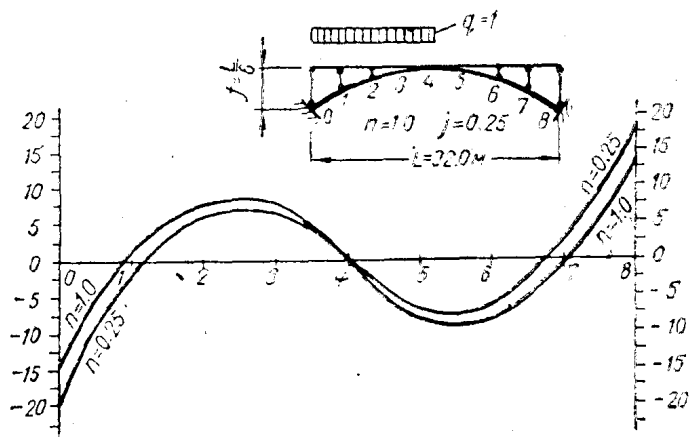


图4 半跨荷载下，联合计算时拱的弯矩图

由联合计算时所得的立柱连接处拱截面内的弯矩影响线 (图5) 表明：位于第一个立柱下拱截面的影响线面积为最小，该立柱位于距离拱的固定端  $\frac{1}{12}$  跨长处。

所作的分析指出，当联合计算时，不应将拱的惯性矩从拱顶向拱脚急剧增大，更合理的方案是等截面拱。对于远远大于所有其它弯矩的拱脚弯矩，不考虑用增大拱的截面来承受，而考虑用增大钢筋面积来承受，况且这个弯矩具有仅仅影响一个节间的局部性质。