高等学校教材

（专科适用）

工程技术统计

扬州大学水利学院 费勤贵
南昌水利水电专科学校 温秋根
合编

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

高等学校教材

专科适用

工程技术统计

扬州大学水利学院 费勤贵
南昌水利水电高等专科学校 温秋根
合编

中国水利水电出版社

内 容 提 要

全书共分十章，内容包括随机方法的基本概念、工程中常用的概率分布、方差分析、回归分析、判别分析、聚类分析、质量控制和验收抽样方法以及建筑设计中的可靠性分析基础等。书中基本理论简明通俗，结合实际，例题丰富。此外，各章均配有习题，书后附有答案，便于学习和掌握。

本书为普通高等学校水利水电类专业、工业与民用建筑专业、公路与桥梁专业教材，也可作为水利、水电、建筑等行业工程技术人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

工程技术统计/费勤贵，温秋根合编．—北京：中国水利水电出版社，1998
高等学校教材·专科适用
ISBN 7-80124-634-9

Ⅰ．工…　Ⅱ．①费…　②温…　Ⅲ．工程技术-统计-高等学校：专业学校-教材　Ⅳ．F403.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字（98）第 00888 号

书　名	高等学校教材（专科适用）　**工程技术统计**
作　者	扬州大学水利学院 费勤贵 南昌水利水电高等专科学校 温秋根　合编
出　版	中国水利水电出版社（北京市三里河路 6 号　100044）
发　行	新华书店北京发行所
经　售	全国各地新华书店
排　版	中国水利水电出版社微机排版中心
印　刷	北京朝阳区小红门印刷厂
规　格	787×1092 毫米　16 开本　11.75 印张　268 千字
版　次	1998 年 10 月第一版　1998 年 10 月北京第一次印刷
印　数	0001—1000 册
定　价	11.70 元

前　　言

在工程技术中，随机方法越来越多地得到应用。其中很大程度上表现为运用概率统计模型解决从规划设计、地基勘测、原始材料的选取到施工过程中的质量控制和工程验收抽样等工程技术中的实际问题。

目前水利水电、工民建等专业虽然开设了概率统计课程，但纯数学的理论多，结合工程技术问题少；一般知识多，实用的统计模型少。本教材是以概率统计理论为工具，工程技术为背景的宗旨进行编写的，其目的是使读者学以致用。

本书是根据水利部人事劳动教育司审定的高等学校水利水电类专业第四轮教材第一批（1996～1997年）选题和编审出版规划进行编写的，作为高等学校水利水电类各专业和工业与民用建筑专业以及公路与桥梁专业的教材。

本书共分10章，前言和第一、二、六、九、十章，第七章第二节以及书后的附表1至附表7由扬州大学水利学院费勤贵副教授编写，第三、四、五、八章，第七章第一节以及书后的附表8、附表9由南昌水利水电高等专科学校温秋根副教授编写。全书由费勤贵、温秋根合编，费勤贵统稿。南昌水利水电高等专科学校楼天容副教授审阅了全书。

由于编者水平有限，错误和疏漏之处在所难免，恳请读者指正。

编　者

1996年10月4日

目　　录

第一章　随机方法的基本概念

第一节　工程技术中的随机问题

在近代工程技术中，越来越多地应用各种数学工具。为使建立的数学模型更切合实际，其中重要的一点是考虑到客观事物的随机性。

工程技术中的随机现象是广泛存在的。以一项工程为例，在施工前有原材料供应期限和数量的不确定性；在施工期间又可能出现诸如气象变化、人员出勤率和工程质量指标等方面的因素；在施工后，又会发生荷载的增减、地基承载力的变化等，所有这些情况，事先都是无法知道的。

为使工程规划设计尽可能经济合理、安全可靠，就应当对各类不确定因素进行分析研究，找出规律，应用于实际。

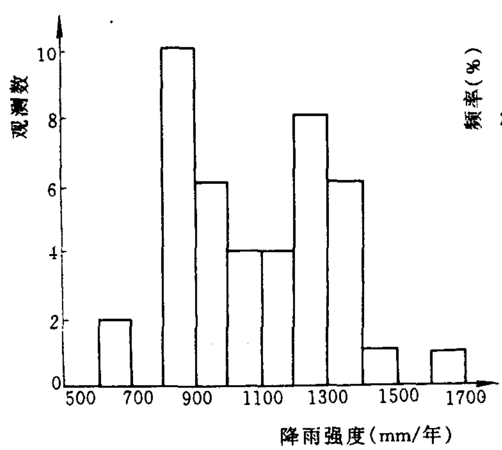
在工程中概率统计的应用是非常广泛的，从对信息的描述直至根据设计原理进行推算以及决策，许多情况下都应当从概率统计的角度来进行考虑。

一、信息的不确定性

在工程中有许多现象和过程都含有随机性。以实验观测为例，各次试验结果，即使在不变的条件下也不尽相同，通常试验的观测值存在着一个范围，而在这个范围内，不同数值出现的频率可能也不一样。

图 1-1～图 1-4 分别是工程中最常用的降雨强度、屈服强度、抗剪强度和弹性模数等物理量的观测（或实验）数据。从这些频率分布图中可以看出，这些数据是具有随机性的。

对于这些具有随机性的数据，我们不能在某一已知条件下得到它的确定数值。例如图



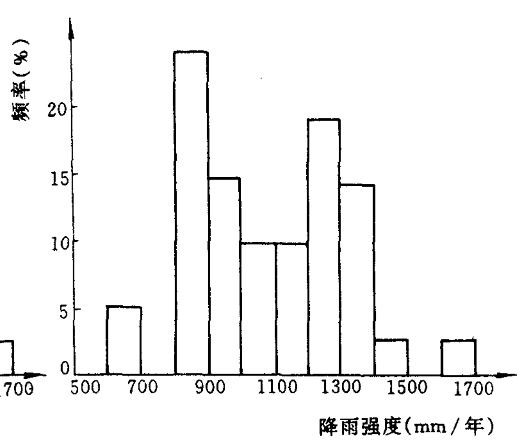


图 1-1　江苏某地 1951～1993 年降雨强度直方图

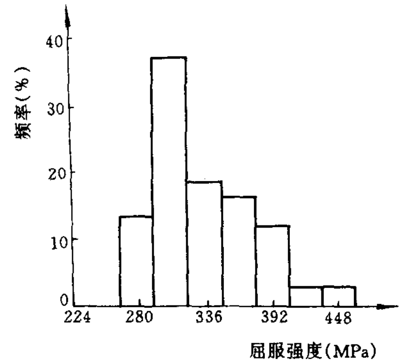


图 1-2　某型号钢筋屈服强度直方图

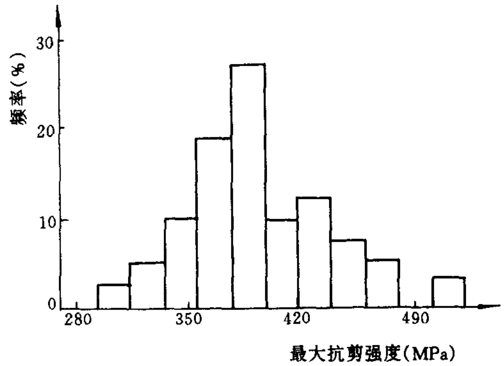


图 1-3　某结构焊接的最大抗剪强度直方图

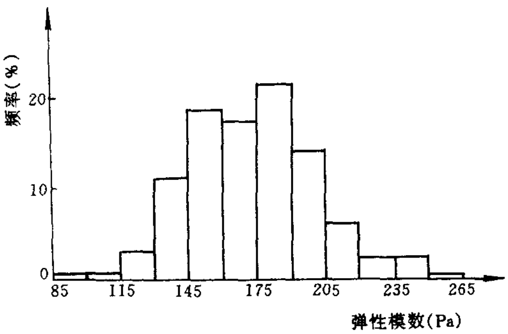


图 1-4　某种材料的弹性模数直方图

1-1 表示的某地年降雨量强度，它不是一个确定的值，图 1-2 的屈服强度，图 1-3 的抗剪强度以及图 1-4 的弹性模数也都不是一个确定的值，它们的数值（或数值范围）只能用概率的概念和方法加以估算或预测。这就是说，对某一可能的取值还需同时指明它出现的机会有多少。我们将在下一章具体定义象具有上述特征的变量为随机变量。

工程中的信息不确定性除了如上所述由于基本物理量的可变性引起外，还因为观测数据的误差和数学模型的理想化以及模拟精度等原因。当某一变量的估值取决于观测数据时，误差就不可避免；数学模型或模拟总有一定程度的不完善，这都是构成不确定的因素之一。

二、设计与决策中的不确定条件

信息的不确定性直接影响着工程的设计与决策。在解决具体问题时，我们若按最不利的条件，如规定一个最高的洪水位、取材料试验中最短的疲劳寿命等来进行比较保守的设计，从安全角度来说，这样做是最好的，但肯定投资太大。相反，一个过于经济的设计也许不能保证安全。因此就要权衡得失作出相应合理的决策，并作出决策的概率分析，一个最优化的设计，应该是成本最低、收益最大的设计。下面列举出几个方面工程设计中的不确定条件及决策依据。

（一）土工设计

土壤性质是非均匀性的，其强度和压缩性存在地域差异。此外，各类岩石的承载力也不同。因此在整个地基基础范围内各点的承载力也不一致。如根据有限个抽样试验结果来估算，则显然具有相当程度的不确定性。不合理的设计，其结果不是过于保守，就是安全度不够，这就需要用概率的知识进行比较分析。

（二）结构物设计

建筑材料强度的不确定性决定了结构物强度的随机性；构件的疲劳寿命即便在固定的荷载反复作用下也是随机的；作为随机变量的风压对建筑物，尤其是高层建筑物的影响必须考虑，因此构件的寿命在某种程度上也是难以确切预测的，我们必须根据所需要的寿命和可靠度来设计。设计时应权衡得失，比较分析，以找出最佳设计方案。

（三）公路设计

公路设计的关键因素是路面厚度。一般来说，路面使用寿命取决于整个路面厚度，越厚寿命越长，投资也越大。但是，寿命又受湿度、温度、排水条件、路基密实度等随机因素的影响，因此使用寿命就不可能有确定的答案。设计时必须以概率的观点综合考虑各方面因素。

（四）施工规划与管理

工程施工中不确定的因素很多，有些难以控制。例如工程的施工期限取决于劳动力和设备的供应及其工作效率，此外还与天气及材料供应有关，这些都是不可以精确预测的随机因素，所以工期也是一个随机变量。对工程进行投标时，如将工期估计过长，则必造价过大，从而影响到中标的机会；反之虽易中标，但可能亏损。这需要按照预先选定的概率所对应的工期来确定投标的价目。

（五）工程的质量控制标准

在检验工程质量时，首先应确定检验标准。标准过严，实际上难以达到，或者即使达到而成本太高；反之，如标准过低，则质量难以保证，必须根据概率论来确定一个比较合理的验收标准。例如在验收土坝工程时，由于土壤强度和压缩性的随机性，因此必须顾及土壤密度的变化范围，根据其概率分布来确定一个验收标准。

第二节　概率基本公式及其应用

一、随机试验、随机事件、样本空间

在概率论中，凡是对现象的观察或为此而进行的实验都称为试验。而对随机现象的观察叫做随机试验，用 E 表示。随机试验具有可重复性，即在相同的条件下可以重复进行试验；试验结果不唯一性以及试验结果的不确定性是指进行一次试验之前不能确定哪个结果会出现。

随机试验的结果称为“事件”。在每次随机试验中一定会出现的事件叫做必然事件，用 Ω 表示；在每次随机试验中都不会出现的事件叫做不可能事件，用 Φ 表示；在一次随机试验中可能出现也可能不出现的事件叫做随机事件，用 A、B、C 等表示。

随机试验的每个可能结果或最基本结局，称为基本事件用 ω 表示。基本事件的任一集合称为复合事件，简称事件。而基本事件的全体集合 $\{\omega\}$ 称为基本空间，记作 $\Omega=\{\omega\}$。

二、加法公式

设随机试验 E 的基本空间为 Ω，A、B 为 E 的任意两个事件，则 A 与 B 和的概率为

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{1-1}$$

若 A、B 两事件互斥，则

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \tag{1-2}$$

【例 1-1】 某公司承包两项工程，每项工程完工期都有三种等可能情况：一年后肯定完工，没有把握和肯定不能完工。假定两工程进展情况相互无关，问一年后保证至少有一项工程完工的概率是多少？

解 令 A、B、C 分别表示上述完工期的三种情况，$i=1$，2 分别表示两项工程。据题意知，$P(A_i)=P(B_i)=P(C_i)=\frac{1}{3}$。一年后保证至少在一项工程完工的概率则为

$$\begin{aligned}P(A_1+A_2)&=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)\\&=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1)P(A_2)\\&=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\\&=\frac{5}{9}\end{aligned}$$

【例 1-2】 今欲在公路交叉处设计一向左转弯的候车道，如图 1-5 所示。为了确定候车道的长度，需要知道高峰时间汽车等候向左转弯的数据。为此，观测了 60 个高峰时间的数据如表 1-1 所示。若以频率近似代替概率并设 A_1、A_2 分别表示“有两辆以上车辆等候向左转弯”和“在两辆到四辆车辆等候向左转弯”。试求 $P(A_1)$、$P(A_2)$ 和 $P(A_1+A_2)$。

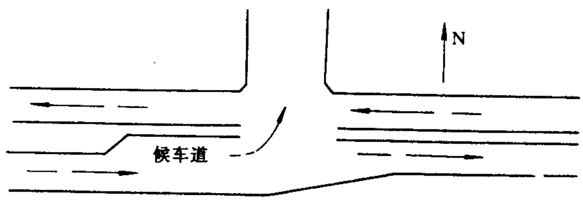


图 1-5

表 1-1

车 辆 数	观测次数	相对频率
0	4	4/60
1	16	16/60
2	20	20/60
3	14	14/60
4	3	3/60
5	2	2/60
6	1	1/60
7	0	0
8	0	0
⋮	⋮	⋮

解 因为候车数量之间是互斥事件，因此

$$\begin{aligned}P(A_1)&=\frac{14}{60}+\frac{3}{60}+\frac{2}{60}+\frac{1}{60}\\&=\frac{20}{60}\end{aligned}$$

$$P(A_2)=\frac{20}{60}+\frac{14}{60}+\frac{3}{60}=\frac{37}{60}$$

又因 $A_1A_2\supset\{3,4\}, P(A_1A_2)$

$$\begin{aligned}&=\frac{14}{60}+\frac{3}{60}\\&=\frac{17}{60}\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}P(A_1+A_2)&=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)\\&=\frac{20}{60}+\frac{37}{60}-\frac{17}{60}\\&=\frac{40}{60}\end{aligned}$$

加法公式（1-2）可以推广到两个以上事件和的概率计算。例如要计算三个事件和的概率，可以先将其中两个事件之和当作一个事件，再与第三个事件按加法公式求和的概率，即

$$
\begin{aligned}
P(A+B+C) &= P[(A+B)+C] \\
&= P(A+B)+P(C)-P[(A+B)C] \\
&= P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)
\end{aligned}
$$

三、条件概率　乘法公式

在一随机试验 E 中，在事件 B 发生的条件下，事件 A 发生的概率称为条件概率记作 $P(A|B)$。条件概率的计算公式为

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \tag{1-3}$$

由条件概率式（1-3）可以得到乘法公式和加法公式的最一般的表达式

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B) \tag{1-4}$$

$$
\begin{aligned}
P(A+B) &= P(A)+P(B)-P(A)P(B|A) \\
&= P(A)+P(B)-P(B)P(A|B)
\end{aligned} \tag{1-5}
$$

当 A、B 两事件独立时，即 $P(A|B)=P(A)$，$P(B|A)=P(B)$，于是

$$P(AB)=P(A)P(B) \tag{1-6}$$

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B) \tag{1-7}$$

【例 1-3】　某小城市由两发电厂 a 和 b 并联供电，用电量变化甚大。已知当一个电厂发生故障，另一电厂可以在 75%的时间内供应该城市高峰用电量。设每个厂发生故障的概率为 0.10，两电厂供电情况互不影响，问电厂发生故障的情况下，高峰用电不受影响的概率为多少？

解　设 A 为“a 厂发生故障”，B 为“b 厂发生故障”。由题设知

$$P(A)=P(B)=0.1$$

$$P(AB)=P(A)P(B)=(0.1)(0.1)=0.01$$

在电厂发生故障的前提下，尚有一厂正常工作的概率为

$$
\begin{aligned}
P[(A\overline{B}+\overline{A}B)|(A+B)] &= P[A\overline{B}|(A+B)]+P[\overline{A}B|(A+B)] \\
&= \frac{P[A\overline{B}|(A+B)]}{P(A+B)}+\frac{P[\overline{A}B|(A+B)]}{P(A+B)} \\
&= \frac{P(A\overline{B})}{P(A+B)}+\frac{P(\overline{A}B)}{P(A+B)} \\
&= \frac{P(A)P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)}{P(A)+P(B)-P(A)P(B)} \\
&= \frac{(0.1)(0.9)+(0.9)(0.1)}{0.1+0.1-(0.1)(0.1)} \\
&= 0.95
\end{aligned}
$$

在发生故障时，该市高峰用电不受影响的概率为

$$(0.95)(0.75)=0.71$$

【例 1-4】　某道路路面工程的验收规定如下：每隔 0.1 km 用超声仪检查厚度为 2 m 的路面。如果读数不小于 1.85 m，则认为合格，否则全部返工。根据以往经验，施工质量有 95%合格，但超声仪的可靠性只有 80%，问：

(1) 某一段质量合格的概率有多少？

(2) 某段实际上不合格（即厚度小于 1.85 m），但根据超声仪读数却被通过了，问这种情况发生的概率有多少？

(3) 某段实际上合格，却被超声仪否定的概率是多少？

解 设 G 为“实际厚度超过 1.85 m”，A 为“超声仪测得厚度不小于 1.85 m”，由题意可得

$$P(G|A)=0.80,\quad P(\overline{G}|\overline{A})=0.80$$

$$P(G|\overline{A})=1-P(\overline{G}|\overline{A})=1-0.8=0.20$$

$$P(\overline{G}|A)=1-P(G|A)=1-0.80=0.20$$

(1) 因为施工质量也是由超声仪来判断的，故施工质量有 95%的合格应表达成

$$P(A)=0.95$$

某一段质量的合格概率即此段实际厚度超过 1.85 m，且超声仪测得厚度也超过 1.85 m，即为积事件 GA 的概率

$$P(GA)=P(A)P(G|A)=(0.95)(0.80)=0.76$$

(2) 某段实际上不合格，但超声仪误为合格的概率即为积事件 $\overline{G}A$ 的概率

$$P(\overline{G}A)=P(A)P(\overline{G}|A)=(0.95)(0.20)=0.19$$

(3) 某段实际上合格，却被超声仪否定的概率即为积事件 $G\overline{A}$ 的概率

$$P(G\overline{A})=P(\overline{A})P(G|\overline{A})=[1-P(A)]P(G|\overline{A})=(1-0.95)(0.20)=0.01$$

【例 1-5】 高层建筑基础破坏的原因假设有二：由于载量过大或沉降量过大。令 B 与 S 分别表示上述原因。设 $P(B)=0.001,P(S)=0.008$，在发生沉降时，由于承载量而导致破坏的概率为 0.1。试确定：

(1) 基础破坏的概率；

(2) 建筑物发生过量沉降但承载量未超过标准的概率。

解 (1) 基础破坏是指 B、S 两事件中至少有一事件发生的概率，即求

$$\begin{aligned}P(B+S)&=P(B)+P(S)-P(BS)\\&=P(B)+P(S)-P(S)P(B|S)\\&=0.001+0.008-(0.008)(0.1)\\&=0.0082\end{aligned}$$

(2) 此为求积事件 $\overline{B}S$ 的概率

$$P(\overline{B}S)=P(S)P(\overline{B}|S)=P(S)[1-P(B|S)]=(0.008)(1-0.1)=0.0072$$

四、全概率公式

假设 A_i ($i=1,2,\cdots$) 为任意有穷个事件，满足条件：$P(A_i)>0$，$\sum_i A_i=\Omega$，$A_iA_j=\Phi$，$i\neq j$。那么，对于任意事件 B 有

$$P(B)=\sum_i P(A_i)P(B|A_i) \tag{1-8}$$

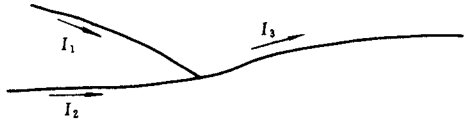


图 1-6

【例 1-6】 公路 I_1 与 I_2 汇合成 I_3（图 1-6）。设 I_1 与 I_2 有相同的容量，但高峰时的交通量有所差别。高峰时 I_1 上超运量的概率为 0.1，I_2 上超运量的概率为 0.2，且 I_1 上有超运量时，I_2 上超

运的概率为 1，I_2 上有超运量时，I_1 上超运的概率为 0.5，试求

（1）如 I_3 的容量与 I_1 或 I_2 相同，且当 I_1、I_2 不超运时，I_3 超运的概率为 0.2，问 I_3 超运的概率是多少？

解 设 I_i，$i=1,2,3$ 为"i 条公路超运"，则 I_3 的发生与 I_1、I_2 上的交通状况有关，它可能是 I_1I_2、$\bar{I}_1I_2$、$I_1\bar{I}_2$、$\bar{I}_1\bar{I}_2$，其相应概率如下

$$P(I_1I_2)=P(I_1)P(I_2|I_1)=(0.1)(1)=0.1$$

$$P(\bar{I}_1I_2)=P(I_2)P(\bar{I}_1|I_2)=P(I_2)[1-P(I_1|I_2)]=(0.2)(1-0.5)=0.10$$

$$P(I_1\bar{I}_2)=P(I_1)P(\bar{I}_2|I_1)=P(I_1)[1-P(I_2|I_1)]=(0.1)(1-1)=0$$

$$P(\bar{I}_1\bar{I}_2)=1-[P(I_1I_2)+P(\bar{I}_1I_2)+P(I_1\bar{I}_2)]=1-(0.1+0.1+0)=0.8$$

根据全概率公式，公路 I_3 超运的概率为

$$\begin{aligned}P(I_3)&=P(I_1I_2)P(I_3|I_1I_2)+P(\bar{I}_1I_2)P(I_3|\bar{I}_1I_2)+P(I_1\bar{I}_2)P(I_3|I_1\bar{I}_2)\\&\quad+P(\bar{I}_1\bar{I}_2)P(I_3|\bar{I}_1\bar{I}_2)\\&=(0.1)(1)+(0.1)(1)+(0)(1)+(0.8)(0.2)\\&=0.36\end{aligned}$$

（2）如 I_3 的容量为 I_1 或 I_2 的两倍，且仅当 I_1 或 I_2 超运时，I_3 超运的概率为 0.15，问此时 I_3 超运的概率是多少？

解 由题意知 $P(I_3|I_1\bar{I}_2)=P(I_3|\bar{I}_1I_2)=0.15$，且 $P(I_3|I_1I_2)=1$，$P(I_3|\bar{I}_1\bar{I}_2)=0$，于是

$$\begin{aligned}P(I_3)&=P(I_1I_2)P(I_3|I_1I_2)+P(\bar{I}_1I_2)P(I_3|\bar{I}_1I_2)+P(I_1\bar{I}_2)P(I_3|I_1\bar{I}_2)\\&\quad+P(\bar{I}_1\bar{I}_2)P(I_3|\bar{I}_1\bar{I}_2)\\&=(0.1)(1)+(0.1)(0.15)+(0)(0.15)+(0.8)(0)\\&=0.115\end{aligned}$$

五、贝叶斯（Bayes）公式

假设 A_i（$i=1,2,\cdots$）为任意有穷个事件，满足条件：$P(A_i)>0$；$\sum_i A_i=\Omega$；$A_iA_j=\Phi$，$i\neq j$。那么，对于任意事件 B，$P(B)>0$，有

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_i P(A_i)P(B|A_i)} \tag{1-9}$$

【例 1-7】 某工程的建筑材料由 A、B 两公司供应。设 A 公司每天提供 800 t，其中有 5%不合规格；B 公司每天提供 600 t，其中有 2%不合格。试求：

（1）今随机抽取 1 t，问系由 A 公司供应的概率为多少？

（2）今随机抽取 1 t，问不合格率有多少？

（3）如随机抽取 1 t，发现不合格，问它是由 A 公司供应的概率为多少？

解 设 A、B 分别表示"A 公司材料"和"B 公司材料"，C 表示"材料不合格"，则

（1）因总计为 800 t+600 t=1400 t，其中 800 t 来自 A 公司，现随机抽 1 t，来自 A 公司的概率为

$$P(A)=\frac{800}{1400}=0.5714$$

（2）不合格的材料可能来自 A 公司，也可能来自 B 公司，按全概率公式计算材料不合

格的概率为

$$P(C)=P(A)P(C|A)+P(B)P(C|B)$$
$$=(0.5714)(0.05)+(1-0.5714)(0.02)$$
$$=0.0371$$

(3)今随机取得 1 t 不合格材料，它是由 A 公司供应的概率显然不再是(1)中的 0.5714，因为样本空间改变了，新的样本空间中只包含那些不合格的产品，即

$$(800)(0.05)+(600)(0.02)=52\ (\mathrm{t})$$

其中只有 (800) (0.05) =40 t 来自 A 公司，故

$$P(A|C)=\frac{40}{52}=0.7692$$

或由贝叶斯公式得

$$P(A|C)=\frac{P(A)P(C|A)}{P(C)}=\frac{(0.7514)(0.05)}{0.0371}=0.7692$$

由于 A 公司的材料质量比 B 公司差，在已知取得的是不合格材料这一前提下（可以看作是附加信息），材料来自 A 公司的概率也就增加了（原来是 0.5714)。

贝叶斯公式(1-9)中的 $P(A_i)$称为先验概率，$P(B|A_i)$为条件概率，而 $P(A_i|B)$称为后验概率，即经过试验对 $P(A_i)$的修正。当有更多的数据或信息提供时，Bayes 定理对于修正已得的结果是有用的。下面的例子可以看出，如何将先验的信息(可能是根据经验判断)与试验结果结合起来以修正已算得的概率。

【例 1-8】 筑路工程中路面材料所用的砾石块，其质量的级配大致如下

$$P(G)=P(\text{好质量})=0.70$$
$$P(\overline{G})=P(\text{差质量})=0.30$$

为改进上述先验的信息，进行材料试验，但试验手段未尽可靠，设好质量而被通过的概率为 0.80，而差质量能被通过的概率为 0.10。

令 T 表示“一次试样被通过”，则修正后的概率为

$$P(G|T)=\frac{P(G)P(T|G)}{P(G)P(T|G)+P(\overline{G})P(T|\overline{G})}$$
$$=\frac{(0.7)(0.8)}{(0.7)(0.8)+(0.3)(0.1)}$$
$$=0.95$$

由此可见，通过试验所求概率有显著的提高，即从 70%到 95%。

习　题　一

1. 如图 1-7 所示的桁架，在荷载 F 的作用下，桁架中杆件 a、b、c 断裂的概率分别为 0.05、0.04 和 0.03。任一杆件的断裂均导致桁架的破坏。今假定各杆件的断裂是相互独立的，试求桁架破坏的概率。

2. 简支梁 AB 上有 100～300kg 可变荷载等可能随机地置于梁上任何位置。R_A、R_B 分别表示支点 A 与 B 处的反力，如图 1-9 (a) 所示，令 A、B 分别表示“100 kg≤R_A≤300 kg”和“100 kg≤R_B≤300 kg”，试求 A、B 两处的反力至少有一处为 [100，300] kg 的

概率。

3. 一个钢质框架的沉降问题可以简化成图 1-8 所示的形式。A 和 B 表示土上的两个底脚。每个底脚可能没有沉降，也可能有 5 cm 的沉降。每个底脚发生沉降的概率为 0.1。而当一个底脚沉降，另一下底脚沉降的概率为 0.8，试求该钢质框架发生沉降的概率和出现沉降差（即只有一个底脚下沉）的概率。

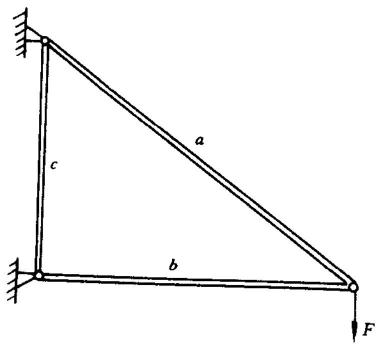


图 1-7　第 1 题图

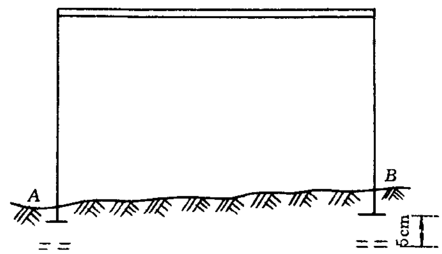


图 1-8　第 3 题图

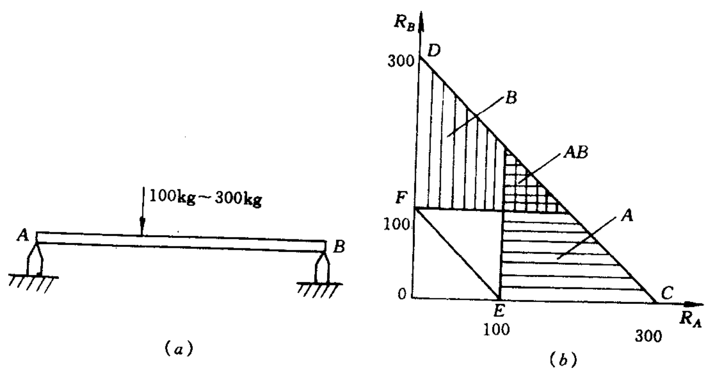


图 1-9　第 2 题图

4. 某建筑工程处有一批型号相同的电焊条，分别由甲、乙、丙三厂生产，其中甲厂产品占 25%，乙厂占 35%，丙厂占 40%，各厂产品的次品率依次为 3%、2%和 1%，现任取一根焊条，试问它恰是次品的概率是多少？若取出的一根焊条是次品，试问该次品由甲厂生产的概率是多少？

第二章　工程中常用的概率分布

第一节　随机变量及其概率分布

一、随机变量的数学定义

为了便于描述、处理和解决各种与随机现象有关的问题，需要把样本空间的点与数联系起来，或者说把事件与数联系起来，这就出现了随机变量的概念。

定义 2-1　设 $\Omega=\{\omega\}$ 为随机试验 E 的样本空间，在 Ω 上定义一个单值函数 $X=X(\omega)$，如果对于任意实数 x，事件 $\{X(\omega)<x\}$ 总有确定的概率，则称 $X(\omega)$ 为（一维）随机变量，简记为 X。

随机变量通常用大写的拉丁字母 X，Y，Z，…表示，而小写字母 x，y，z，…则分别表示随机变量的取值。

实际中，常见的随机变量分离散型和连续型两大类，离散型随机变量取有穷或可数个不同值，而连续型随机变量的取值是充满某一区间。

二、随机变量的分布函数

分布函数是随机变量重要的概率特征，它可以完全描述随机变量的统计规律。

定义 2-2　设 X 为一随机变量，对于任意实数 x，函数

$$F(x)=P\{X\leqslant x\} \tag{2-1}$$

称为 X 有分布函数。

由分布函数定义和概率性质知，$0\leqslant F(x)\leqslant 1$；如果 $-\infty<x_1<x_2<+\infty$，则 $P\{x_1<X\leqslant x_2\}=F(x_2)-F(x_1)$。

分布函数 $F(x)$ 具有下列性质：

（1）单调非减性。对于任意 $-\infty<x_1<x_2<+\infty$，有

$$F(x_2)\geqslant F(x_1) \tag{2-2}$$

（2）右连续性。对于任意 $-\infty<x_0<+\infty$，有

$$\lim_{x\to x_0+0}F(x)=F(x_0) \tag{2-3}$$

（3）$F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$，　$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$。

三、离散型随机变量及其概率函数

设 X 为一离散型随机变量，它的可能取值为 x_1，x_2，…，X 取 x_i 的概率为 p_i（$i=1$，$2\cdots$），那么 X 的概率分布可表为

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_i & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_i & \cdots \end{bmatrix} \tag{2-4}$$

有时为了方便，离散型随机变量的概率分布就用它的取值概率

$$p_i=P\{X=x_i\}\quad i=1,2,\cdots \tag{2-5}$$

表示，并称之为概率函数。

由概率的性质知，$p_i \geqslant 1, \sum_i p_i = 1$。

四、连续型随机变量及其概率密度

定义 2-3 如果对于随机变量 X 的分布函数 $F(x)$，存在非负的函数 $f(x)$，$-\infty < x < +\infty$，使得对于任意实数 x 有

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\mathrm{d}u \tag{2-6}$$

则称 X 为连续型随机变量，其中非负函数 $f(x)$ 称为 X 的概率密度或分布密度（函数）。

概率密度具有以下性质：

(1) $f(x) \geqslant 0, -\infty < x < +\infty$；

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$；

(3) $P\{x_1 < X \leqslant x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x$；

(4) 如果 x 是 $F(x)$ 的连续点，则 $f(x) = F'(x)$。

第二节　随机变量的主要数字特征

如果一个随机变量的分布函数（或概率函数、概率密度）及有关参数完全确定，则其概率特征可以得到完全的描述。然而实际问题中的分布函数可能不知道，因此常常需要找出它的近似描述。一个随机变量的概率特征可以用某几个主要的或者关键的数字来近似地描述。其中最重要的有数学期望、方差、变异系数、偏态系数和相关系数等。此外，这些数字特征往往是分布函数的某些参数，它们提供了随机变量的重要信息。

一、数学期望

如 X 为离散型随机变量，其概率函数为 p_i，$i=1, 2, \cdots$，则其数学期望 $E(X)$ 表示为

$$E(X) = \sum_i x_i p_i \tag{2-7}$$

类似地对连续型随机变量 X，设其概率密度为 $f(x)$，则有

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x \tag{2-8}$$

若 $Y=g(X)$，在已知 p_i 或 $f(x)$ 下可按下式计算 Y 的数学期望。当 X 为离散型时

$$E(Y) = E[g(X)] = \sum_i g(x_i) p_i \tag{2-9}$$

当 X 为连续型时

$$E(Y) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\mathrm{d}x \tag{2-10}$$

数学期望是随机变量以概率为权重的加权平均值，是随机变量的中心值之一。此外，中值 $E_e(X)$ 和众值 $E_0(X)$ 也是随机变量的数字特征。中值又称中位数，是满足 $F(x) = \frac{1}{2}$ 的 x 值，对于连续型随机变量 X，有

$$\int_{-\infty}^{E_e(X)} f(x)\mathrm{d}x = \int_{E_e(X)}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \tag{2-11}$$