上海大学面向21世纪教学改革教材

数学分析

（上册）

朱正佑　秦成林　编

上海大学出版社
·上海·

内 容 提 要

全书分上、下册出版。上册讲述了函数、极限、实数理论、一元函数微分学和积分学，下册讲述了广义积分、级数理论和多元函数微分学和积分学。在上册中我们阐述了极限的严格数学定义的发展演变过程，用能与中学数学相衔接的方法引入实数概念，把有关实数的理论和连续函数的性质交替穿插进行讲述，最后再加以总结，形成完整的实数理论。

本书阐述严谨，引进概念注重背景和发展过程，讲述定理注重要解决的问题和结论的思维发展过程。通过注记的形式给出使用概念和结论时应注意的问题及一些值得进一步思考的问题。结合具体例题介绍解题的基本方法和技巧。并配有大量习题，供读者练习。

本书可作为理工科大学和师范院校数学系、力学系本科生的教材，也可作为理工科其他专业本科学生学习高等数学的教学参考书，同时还可供从事数学分析、高等数学教学的教师以及数学系、力学系的研究生教学和学习时参考。

图书在版编目（CIP）数据

数学分析．上册/朱正佑，秦成林编．—上海：上海大学出版社，2001.6
ISBN 7-81058-314-X

Ⅰ．数…　Ⅱ．①朱…②秦…　Ⅲ．数学分析—高等学校—教材　Ⅳ．O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 032949 号

上海大学出版社出版发行
（上海市延长路 149 号　邮政编码 200072）
常熟市印刷八厂印刷　　各地新华书店经销
开本 880×1 230　1/32　印张 11.25　字数 319 000
2001 年 6 月第 1 版　2001 年 6 月第 1 次印刷
印数：1～1 050
定价：20.00 元

序　言

自17世纪牛顿创建微积分以来，已出版了许多微积分学的教材。19世纪末魏尔斯特拉斯、康托、柯西等完成了微积分学的严格理论的奠基工作。20世纪以来的微积分学教材大都十分重视严格的逻辑演绎和基本概念的归纳。本书试图在继承和保持这些传统特色的基础上就如何提高读者认识问题、解决问题的能力和读者自已获取知识的能力以及培养读者的创新能力等方面作了一些初步的尝试。本教材有如下一些基本特色：

1. 在定理和结论的阐述中，尽量从问题出发，不仅重视定理的严格逻辑推导和定理的应用，还重视定理结论的猜测和发现过程。例如，在阐述反函数导数计算公式时，根据“反函数的图形可在原来函数的图形中交换 x 轴和 y 轴的位置并从纸的反面去观察而得到”这一特点，利用导数的几何意义猜测出反函数导数的计算公式。又如，基于用两个不同的时钟描述同一质点作直线运动时位置函数的复合函数关系，利用导数作为直线运动的速度这一力学意义猜测出复合函数的导数计算公式。在阐述连续函数的性质时，先从连续函数图形的特点出发发现这些性质，然后再给予严格的证明。在阐述隐函数定理时，把方程 $F(x,y)=0$ 的解集解释成曲面 $z=F(x,y)$ 和坐标面 $z=0$ 的交集猜测出隐函数定理的条件和结论。对闭区间上的连续函数$f(x)$，我们先从拉格朗日插值多项式入手猜测出可能能用多项式函数序列来一致逼近$f(x)$。然后在指出用拉格朗日插值多项式逼近时存在的问题后，引导出伯恩斯坦多项式，并给出多项式函数序列一致逼近闭区间上连续函数这一重要结论的严格证明。在阐述积分基本公式，即牛顿-莱布尼兹公式时，首先把 $F(x)$看作是坐标为 x 处山峰的高度，然后用图形切线

斜率 $F'(x)$ 表示山峰的高度的定积分表达式，猜测出牛顿-莱布尼兹公式，再进行了严格的证明。在阐述格林公式和高斯公式时，我们类比一元函数的积分基本公式猜测到在重积分和沿边界积分之间会有某种联系，然后推导出格林公式和高斯公式。当把二重积分的平面积分区域变弯成为曲面积分时，根据格林公式猜测出曲面积分和边缘曲线积分之间的斯托克斯公式。这种不是先有定理而是先有问题然后通过类比、直觉去猜测出定理的阐述方法贯穿于本教材的始终，目的是希望通过这种阐述方法对读者的思维能力、解决问题的能力、自学能力和创新能力的提高有一定的帮助。

2. 不仅重视通过典型问题的分析形成概念的归纳过程，同时还十分注重人们对事物的认识是逐步完成的，力求从认识事物的过程中去归纳出概念，再引进严格的数学定义，特别对一些初学者不易理解和掌握的基本概念更是如此。例如，在阐述数列 $\{x_n\}$ 的极限概念时，先指出许多数列，当下标 n 不断增大时 x_n 的变化是有一定规律的，直观上它们和某个数 a 无限接近并由此给出了数列 $\{x_n\}$ 极限的直觉定义。为了完成从这种直觉的定义到严格的数学定义的过渡，还强调了在认识两个数是否相接近时，必需有一个接近程度或精度 $\varepsilon > 0$ 的客观标准，否则两个数相接近就变得毫无意义。在这种认识的基础上，进一步指出数列 $\{x_n\}$ 极限的直觉定义中所说的当 n 不断变大时 $\{x_n\}$ 和 a 无限接近的含义应该是指对任意小的接近程度 $\varepsilon > 0$，当下标 n 不断变大时，在这个接近程度 $\varepsilon > 0$ 意义下，x_n 都和 a 相接近，最后给出了数列 $\{x_n\}$ 极限的严格数学定义。在阐述函数的定积分这一重要基本概念时，则详细叙述了用达布上和与达布下和对曲边梯形面积作大于和小于两方面的近似，并引进了定积分的基本概念。这种叙述方法不仅给出了定积分概念的本身，而且告诉读者如何利用熟悉的事物去认识一个不熟悉的事物的基本方法和过程。把未被认识的事物分解成一系列小问题（如把曲边梯形的面积剖分成许多小曲边梯形的面积），利用熟悉的事物从两个不同侧面对每个小问题进行讨论（如对小曲边梯形的面积引进大于和小于的估计），最后在一定条件下形成对事物的认识（引进定积分的概念）。根据这种认识事物的一般方法，我们阐述了定积分在几何、物理和

经济学中的各种应用，仍然利用这种认识事物的一般方法，阐述了面积、体积、重积分、曲线积分和曲面积分的定义。我们希望本教材的这种阐述方法将有利于读者通过典型问题的分析，正确地归纳出概念，抽象出严格数学定义的能力的提高。

3. 注重反映近代数学成果。具体做法是适当采用近代数学中的观点、思想和方法来阐述微积分学的基本内容，使近代数学的成果有机地在微积分学中能得到体现。例如，在阐述函数序列的一致收敛和均方收敛性时，我们把函数作为一个整体引进了函数间的不同距离概念以及函数间内积和正交的概念。通过类比 $\mathbf{R}^n$ 中向量关于正交基的分解阐述了傅里叶系数的贝塞尔不等式和正交函数系的完备性及傅里叶级数的平方收敛性。又如，在阐述隐函数的理论时，我们采用了近代数学中两个曲面横截的概念。此外，在阐述变动上限的定积分的性质和一些定理的证明方法中介绍了近代的同伦方法思想。希望通过这种方法适当拓宽读者的视野，同时接触在近代数学中分析和研究问题的一些方法，以提高读者独立解决问题的能力。

4. 注意到读者的学习能力是一个逐步提高的过程，所以努力做到循序渐进、难点分散。例如，在处理实数的基本定理时，我们把这些定理的建立和连续函数性质有机地穿插起来进行讨论。通过连续函数零点存在定理的具体证明，归纳出区间套定理；通过闭区间上连续函数有界性定理的证明归纳出数列的列紧性定理；通过闭区间上连续函数必达到最大值和最小值定理的证明归纳出确界存在定理；通过闭区间上连续函数必一致连续的证明来叙述并证明有限覆盖定理。最后在此基础上对有关实数的定理再加以小结，并论证它们之间的等价性。这种方法，一方面切实做到了难点分散，同时也使读者从应用的角度了解到这些定理的作用，把比较不易掌握的内容化简成易于接受和掌握的内容。

5. 深入浅出，对基本概念和重要结论作了许多必要的注记。这些注记包括了编者对这些概念和结论的一些体会和应用这些概念和结论时应特别注意的地方，同时也包括一些尚未解决的问题和应进一步思考的问题。我们试图用这样的方法加深和读者间的思想交流，并且留有

一定的空间让读者独立地思考一些问题。例如，在叙述高阶微分概念时提出了函数的值是否可以用各阶微分近似表示的问题让读者思考，在叙述牛顿-莱布尼兹公式时提出了函数的值可以用一点的函数值和导函数加以表示的观点，进而提出了如何用 n 个点上的函数值或低阶导数值及 n 阶导函数来表示函数的问题。又如，在叙述定积分概念时提出了进一步研究不可积函数的积分问题，在叙述曲线弧长时提出了曲线弧长的外测度问题等等。尽管在这些问题中，有些是在现在的知识水平就可以加以解决的，而另一些则是需要进一步研究才能解决的问题，这样做是希望读者在学习本书时能清楚地了解到本书所述内容的局限性，有许多问题需要读者在今后的学习和研究工作中去逐步加以探索和解决。

本教材作为上海大学面向 21 世纪教学改革项目的一个组成部分得到上海大学各级领导的大力支持。1998 年初上海大学对 21 世纪教学体系与课程内容改革进行了专项立题研究，并将本教材的编写和出版作为其中的重要组成部分。编者根据多年数学分析课程的教学经验对上海大学理学院数学、物理、力学综合班的数学分析课程的教学进行了改革的探索和尝试，在总结多年教学经验和改革实践的基础上写出了本书的初稿。初稿以讲义的形式在数学、物理、力学综合班的数学分析课程中进行了三届试讲，并发给其他专业的学生作为教学参考书试用。该讲义以其深入浅出、具有启发性、便于自学等特点而受到了学生们的好评。即将出版的这本数学分析教材是在该讲义的基础上经过全面、详细、合理地修改后完成的，希望它的面世能在数学分析的教学改革中起到抛砖引玉的作用。

在本书的写作和出版过程中，程昌钧教授认真审阅了全稿并对全书的内容、编写、文字修饰等提出了许多宝贵的建议，对此表示深深的谢意。烟台大学数学系王亮涛教授也对本书的初稿指出过不足之处，在此亦表示感谢。李根国博士和卢华勇、徐俊林等同志完成了本书原稿的全部插图、打印、排版等工作，对他们的辛勤劳动一并表示诚挚的谢意。

全书共十七章，分为上、下册出版，其中上册为七章，下册为十章。

上册的前五章由朱正佑、秦成林合写，其余各章由朱正佑执笔。由于编者水平有限，改革的经验还有待在实践中不断总结和完善，不当之处在所难免，我们恳切地希望能得到广大读者的宝贵意见和建议。

朱正佑

上海大学理学院数学系

上海市应用数学与力学研究所

2000年12月

目　录

注：若课时不够，书中加“＊”处可以不讲

第一章　实数集与函数

§1　实　数　集

1.1　实数

数学是建立在数的理论基础之上的。我们在小时候学习数数时就开始学数学了。扳着手指数数，可以从 1 数到 5，用两只手可以数到 10。最简单的数系是自然数 1，2，3，…，有固定的次序，将需要计数的众多物体依次与自然数一对一地对应起来，有几个物体，就终止在第几个数。但在度量长度时，情况就复杂些。度量长度时，需要一个有单位长度的标准的尺子。一条线段，用其自身作为标准尺子，则长度为 1，用其一半作为标准尺子，则长度为 2。于是人们研究两条线段的长度之比时，只要是使用同一把尺子，则这个比值不应该发生变化。知道了比值，可以用一条线段的长度表示另一条线段的长度。古时候的人们如古希腊时代的毕达哥拉斯学派认为，对于任意两条线段，总能找到一把尺子，使它们各自的长度值都是正整数，这种理论称为可公度理论。根据这种理论，两条线段长度的比值无非是两个正整数 m 和 n 之比 $m:n$，或写成$\frac{m}{n}$，它可以看作$\frac{1}{n}$的 m 倍。大家承认这是一个数，即有理数。这种认识，在实际度量时，由于精确度的限制，不至于使人感到有什么问题。但作为理论却存在问题，数学家们发现：一个正方形的边与其对角线是不可公度的！对这一点可作如下论证：

设正方形边长为 1，对角线长度为 x，则由勾股定理

$$x^2 = 2$$

若在形式上记 $x = \sqrt{2}$，并设 $\sqrt{2}$ 是一个有理数，记

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

其中，m 与 n 是互素的，即分数$\frac{m}{n}$是既约的。于是 $2n^2 = m^2$。因此，m 是偶数。设 $m = 2k$，则

$$n^2 = 2k^2$$

从而 n 也是偶数，m 与 n 有公因数 2，从而产生矛盾。

不可公度性的发现，在历史上有重要意义。围绕它的争论与研究，推动了数学的发展。但在古希腊，这是一种极其使人迷惑的发现。此与毕达哥拉斯学派的可公度理论相违背，自然被认为发生了危机。据传，揭露不可公度事实的毕达哥拉斯学派的门徒遭到了沉舟身死的下场。这与当时人们的世界观与哲学理论有关。

但历史证明，发现矛盾使人类的认识开始了新的里程。不可公度的发现引起了很多争论，也激发了人们的创造热情。经过长时期的探索，直至 19 世纪下半叶，才形成实数的完整理论。而正是这样的概念才使我们今天所学的微积分有了坚实的基础。因此，在我们的课程中，也要从实数讲起。

我们知道，数系是不断扩充的。中国古代数学家，在两个整数相除而除不尽时，“以法命之”，即称之为分数。《九章算术》中对于数 $a^2 + r$ 的开方有近似公式

$$a + \frac{r}{2a} > \sqrt{a^2 + r} > a + \frac{r}{2a + 1}$$

并指出“开之不尽者为不可开，当以面命之”，即称面积为 $N = a^2 + r$ 的正方形的一条边长 $\sqrt{N}$ 为“面”。这是由有理数扩充到无理数的原始过程。

我们在中学里已经知道，实数是有理数与无理数的全体，能表示成

$\frac{m}{n}$形式的数是有理数(其中 m,n 皆为整数，$n>0$)，不能表示成上述形式的数是无理数。或者说，有限位小数或循环小数是有理数，无限不循环小数是无理数。这样的认识，在中学数学中已经算很完整了，但要进一步学习数学理论却还不够。因为总存在一个问题：何谓实数？我们将在本课程的进行中回答这个问题。但在一开始，我们将认为实数是整数和无限位循环或不循环的小数，并且承认关于实数的一些重要性质，这不影响其他数学概念的引出。实数的性质在中学里一直在使用，我们不一一列出，在此只强调几条：

(1) 对于任意一对实数 x,y，若满足 $x>0,y\geqslant 0$，则恒存在整数 n，使得 $y\leqslant nx$。(阿基米德公理)

(2) 任意两个不同的实数之间都存在有理数和无理数。(有理数集和无理数集的稠密性)

在一条直线上取定点 O 作为原点，指定一线段作为单位长度并规定直线上的点自左向右为正方向，即规定直线上左边的点是位于右边的点的后方。这种指定了原点、单位长度的线段和正方向的直线称为数轴。对数轴上任一点 M，记线段$\overline{OM}$的长度(和单位长度线段比较)为 $|\overline{OM}|$。当 M 位于原点的右方时，令 $x=|\overline{OM}|$，当 M 位于原点的左方时，令 $x=-|\overline{OM}|$，按这样方法规定的数 x 称为点 M 的坐标。于是，数轴上的每一个点 M，都对应一个作为它的坐标的实数。我们要强调的第三条实数性质可总结如下：

(3) 全部实数和数轴上的点相互一一对应。

今后，我们经常将实数与数轴上的对应点不加区分地使用。

1.2 实数集

1. 区间

假定读者已学过集合的概念，并已了解集合 A 和 B 的并集 $A\cup B$、交集 $A\cap B$ 及差集 $A\backslash B$ (或记为 $A-B$) 的含义。按集合论的符号，元素 x 属集合 D，记为 $x\in D$，否则记为 $x\overline{\in} D$，空集记为$\varnothing$。

记全体实数组成的集合(下称实数系)为 $\mathbf{R}$，$\mathbf{R}$ 中的任意子集 D 称

为是一个实数集(简称数集)。我们常用以下符号定义一个数集：

$$D=\{x\mid P\}\text{ 或 }\{x:P\}$$

其中，P 表示 D 中的数应满足的性质。例如，设 a,b 为两个实数，且 $a<b$，定义

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\},\quad [a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

它们分别表示满足 $a<x<b$ 和满足 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数 x 的全体。(a,b) 称为开区间，$[a,b]$称为闭区间。此外还有半开半闭的区间，如

$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$$

读者可自行写出$[b,a)$的表达式。上述记号中的实数 a,b，称作区间的端点。最后，还有一类区间，如

$$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x\},\quad (-\infty,a)=\{x\mid x<a\}$$

这里的 $+\infty$ 与 $-\infty$ 只是一种符号，可分别想像成数轴的正向与负向的无穷远处。我们还记

$$\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$$

读者可写出 $(a,+\infty)$，$(-\infty,a]$ 的表达式。我们称这一类区间为无穷区间。当不发生混淆时，上述表示中的$+\infty$，简记为∞。此外，当我们不特指某一具体区间时，可记区间为 I,T 等。

作为习题，请读者思考下面两个问题：

(1) 两个开区间的交是开区间吗？

(2) 两个闭区间的并是闭区间吗？

2. 邻域

设 $x,y\in\mathbf{R}$，则我们知道 x 与 y 之间的距离为 $|x-y|$，而绝对值 $|x|$则是 x 与原点 O 之间的距离，且

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x\leqslant 0\end{cases}$$

显然，绝对值具有如下性质：

(1) $|x| = 0$, 当且仅当 $x = 0$

(2) $|x - y| = |y - x|$

(3) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$

由(3)可以得出，$|x + y| \geqslant \big||x| - |y|\big|$。

设 $x_0 \in \mathbf{R}$,$\delta > 0$ 为某一实数，称开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 为 x_0 的邻域，并记为 $O(x_0, \delta)$，显然

$$O(x_0,\delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x \mid x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$$
$$= \{x \big| |x - x_0| < \delta\}$$

上式中最后一种集合表示法指明了 $O(x_0,\delta)$是数轴上与 x_0 的距离小于 δ 的点的全体。所以，我们也称 $O(x_0,\delta)$是以 x_0 为中心，δ 为半径的邻域。邻域的几何意义如图 1.1 所示。

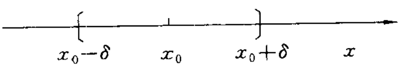

图 1.1　邻域的表示

关于邻域，请读者思考下面三个问题：

(1) 已知 x_0 的邻域 $O(x_0,\delta_1)$与 $O(x_0,\delta_2)$，是否存在邻域$O(x_0,\delta)$，使 $O(x_0,\delta) \subset O(x_0,\delta_1) \cap O(x_0,\delta_2)$?

(2) 设 $x_0, y_0 \in \mathbf{R}$，且 $x_0 < y_0$，是否存在邻域 $O(x_0,\delta)$，$O(y_0,\delta)$使 $O(x_0,\delta) \cap O(y_0,\delta) = \varnothing$?

(3) 设 I 为一个区间，$x_0 \in I$，是否存在邻域 $O(x_0,\delta)$使 $O(x_0,\delta) \subset I$?

3. 有界集

设 D 是一个实数集合，M 是一个实数，如果 D 中任一数 x 都不大于 M，即

$$x \leqslant M, \quad \forall x \in D$$

则称 D 为有上界的集合，并称 M 是它的一个上界。这里，符号$\forall$ 表示任意或一切的意思。显然，若 D 有上界，则上界不是唯一的。若存在数 m，使

$$x \geqslant m, \quad \forall x \in D$$

则称 D 为有下界的集合，并称 m 为其一个下界。既有上界又有下界的数集称为有界集。因此，若 D 有界，则存在 m,M，使

$$m \leqslant x \leqslant M, \quad \forall x \in D$$

显然，当 a,b 为实数时，区间 (a,b)，$[a,b]$，$(a,b]$，$[a,b)$ 都是有界集合，故统称它们是有界区间。

有界集还有一种等价表示：数集 D 是有界集合的充要条件是存在 $M>0$，使

$$|x| \leqslant M, \quad \forall x \in D$$

读者可自行证明其等价性，并在数轴上说明其几何意义。

我们可以看出，无穷区间不是有界集。例如，设 $I=[0,+\infty)$，无论取定多么大的正数 M，由阿基米德公理，我们总可以在 I 中找到一个数，比如自然数 n，使 $n>M$，因此，$[0,+\infty)$ 不是有界集。通常把不是有界的数集称为无界集。于是无界集可定义为：设 D 为数集，如果对于任意给定的正数 $M>0$，都存在某个数 $x \in D$，满足 $|x|>M$，则称 D 为无界集。请读者用数轴说明其几何意义。

关于集合的有界性，请读者思考下面两个问题：

(1) 有界集的并(或交)是有界集吗？

(2) 设 D 为有界集，其补集 $\mathbf{R} \setminus D$ 是无界集吗？反之，如果 $\mathbf{R} \setminus D$ 是无界集，D 必是有界集吗？

习题 1—1

1. 把下列数集 X 写成区间的并集，并讨论它们的有界性：

(1) $X=\{x:|x+1|<2\}$；

(2) $X=\{x:|x-2| \geqslant 1\}$；

(3) $X=\{x:|x|>|x+1|\}$；

(4) $X=\left\{x:|x(1-x)|<\dfrac{1}{4}\right\}$；

(5) $X=\left\{x:\left|\dfrac{x+3}{x-1}\right|<\dfrac{x+3}{x-1}\right\}$；

(6) $X=\{x:(x+1)(x+2)(x+3)>0\}$；

(7) $X=\left\{x: 0\leqslant \sin x\leqslant \frac{1}{2}\right\}$。

2. 证明等式和不等式：

(1) 证明 $\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2=x^2$；

(2) 证明 $\big||x|-|y|\big|\leqslant |x+y|$；

(3) 证明 $x(1-x)\leqslant \frac{1}{4}$，等号只有当 $x=\frac{1}{2}$ 时成立。

3. 计算给出的集合：

(1) 令 $I_n=\left[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right]\quad(n=3,4,5,\cdots)$，求所有这些闭区间 I_n 的并集，记为 $\bigcup\limits_{n=3}^{\infty}I_n$；

(2) 令 $I_n=\left[-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right]\quad(n=1,2,3,\cdots)$，求所有这些开区间的交集，记为 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}I_n$。

4. 利用数学归纳法证明下列等式和不等式：

(1) 对任意自然数 n 有

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

(2) 对任意自然数 n，有

$$1+a+a^2+\cdots+a^n=\frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$

其中，$a\neq 1$ 是一个常数。

(3) 设 a 是大于 -1 的不为 0 的常数，证明对任意大于 1 的自然数 n 有

$$(1+a)^n>1+na$$

5. 证明下列数集 D 是有界集：

(1) D 是由有限个数组成的数集；

(2) $D=D_1\cup D_2$，其中，D_1 和 D_2 都是有界集。

§2 变量与函数

2.1 常量与变量

当我们观察或研究某种自然现象与社会现象的运动或发展过程时，将会遇到各种不同的量，如：时间、速度、质量、温度和利率等等。如果在一个过程的发展中，一些量保持不变，永远取一个值，我们称这样的量为常量；而另一些量随着过程的发展可以取不同的值，称这种量为变量。例如，自由落体的下降时间和下降距离是变量，而落体的质量在这一过程中则可认为是常量。又如，在一个交易日中，某股票的价格是变量，而银行的利率则可以看成是常量等等。如果在一个过程中出现的各种量都不发生变化，那么它将是一个僵死的过程，从而也就没有什么实用价值。无论从实用观点或者从理论观点来讲，正是那些变动的量有着最重要的意义。自然现象与社会现象总是在不断地变化的，人类的行动只有在掌握了这种变化规律后才能达到自由王国的境界。因此，研究自然现象与社会现象不仅要注重某一瞬间的截面，更重要的是要注重整个过程中究竟什么东西在变化，以及它们是怎样变化的。数学作为研究自然现象与社会现象的一种有效工具就应该给出一套理论和方法来研究发展过程中出现的量的变化性态。这种理论和方法构成了数学分析的基本内容。

2.2 函数

在同一过程中碰到的各种量，通常都不是彼此独立地在变化，它们之间存在某种依赖关系，其中一个量的变化常常引起其他量的相应变化。例如，正方形的边长变大时，其面积也同时变大；改变自由落体运动中物体离地面的高度，物体到达地面的时间就发生变化；银行利率的调整会使股票价格发生变化等等。一般来讲，在某个现象中所碰到的各个量之间的关系就其互相依赖的程度来讲可以是很不相同的。在第一个例子中，只要知道了正方形的边长 l，就可以唯一地用公式 $S = l^2$ 确定