

普通高等工科教育规划教材

工程力学Ⅲ

专题部分

哈尔滨工业大学国家工科力学基地 组编

程 靳 主编



普通高等工科教育规划教材

工程力学 II

专题部分

哈尔滨工业大学国家工科力学基地 组编

主 编 程 新
参 编 程燕平 李 涛
毕贤顺 王 刚



A0967575



机械工业出版社

本书内容包括原国家教委颁布的高等工科院校理论力学及材料力学基本要求的内容。为满足 21 世纪教学改革的需要,本书引入了笛卡尔张量、连续介质力学基本理论及流体力学基础以及几种大型力学通用程序的介绍。增添这些内容的目的是使工科大学生对力学的基本概念、基础理论及力学中的物理量有更深入的理解,从而能正确使用几种大型力学通用程序。

本书共三册,第Ⅰ册为基础部分,包括刚体静力学(原理论力学的静力学)及变形体静力学(原材料力学中杆、轴、梁等内容),适用于少学时类专业。第Ⅱ册为通用部分,含运动学、动力学、连续介质力学及组合变形等,适用于中等学时类专业。第Ⅲ册为专题部分,含原理论力学、材料力学的专题及力学通用程序介绍,适用于多学时类专业。

本书可作为高等工科院校各类型专业理论力学、材料力学(统称工程力学)课程的教材,可作为夜大、电大、函授大学相应专业的自学和函授教材,也可供有关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

工程力学.Ⅲ,专题部分/程新主编.—北京:机械工业出版社,2002.7

普通高等工科教育规划教材

ISBN 7-111-09998-2

I. 工... II. 程... III. 工程力学—高等学校—教材 IV. TB12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 048761 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

责任编辑:季顺利 版式设计:张世琴 责任校对:李秋荣

封面设计:姚毅 责任印制:路琳

北京机工印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2002 年 8 月第 1 版·第 1 次印刷

1000mm×1400mm B5·6.25 印张·243 千字

0 001—4 000 册

定价:15.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

本社购书热线电话(010) 68993821、68326677-2527

封面无防伪标均为盗版

序

高等学校工科（这里“工科”特指机械、建筑、交通、航空航天等类型专业）的力学课程在传统上由“理论力学”及“材料力学”组成。然而高等学校工科力学课程究竟应包含哪些内容，多年来一直是教育界和力学界讨论的话题之一。应该说，力学课程的内容是随着时间、时代而改变的。由于科学技术的不断发展，力学课程的内容也应不断变化。

在 20 世纪 70 年代之前，由于计算机很少，在力学计算上大量采用手算，当时设置的“理论力学”及“材料力学”课程内容适应并满足了当时的需要。比如压力机机身的刚度计算就简化为曲梁的计算，用材料力学方法就可解决。而现在由于计算机的大量采用，对这一问题可采用有限元法计算，或者使用通用程序。这表明，以前的力学课程强调手算（这部分内容一般要求学生熟练掌握，并占用大量学时）是适应当时的需要的，但不满足 21 世纪的需要。

在 21 世纪，高等工科院校学生掌握坚实而宽广的力学基础是最重要的。例如，大量构件的强度、刚度计算，机构的运动学、动力学分析等，虽然有多种大型通用程序，但在使用时必先将实际问题化为力学模型，而这一工作要求使用者有较强的力学基础。要善于进行受力分析及运动分析，要清楚的理解有限运动与无穷小变形之区别，要善于将实际材料化为某些理想材料的本构方程，要正确理解力学中的各类物理量，如应力张量、应变张量等。这其中许多内容属连续介质力学范畴，在过去的理论力学、材料力学中是欠缺的。

一些先进国家工科力学的内容与 20 世纪 70 年代前相比已经有很大的不同。其内容虽然包括我国现有“理论力学”、“材料力学”内容，但手算内容要求很浅（学生了解即可），甚至删去。大量增添了连续介质力学（含流体力学）内容，且较详细，这些内容是我国现有“理论力学”、“材料力学”中所没有的。多数力学课程中都包含笛卡尔张量（少数学校甚至讲述普遍张量），学生只有具备张量概念才能正确理解应力张量、应变张量等大量力学概念，这些都是使用通用程序时必须具备的知识，无法依靠计算机。

基于这些想法，我们编写了“工程力学”教材，以替代原有的理论力学、材料力学教材。

本书可供高等工科院校机械、土建、交通、航空航天等类型专业作为力学教材（替代理论力学、材料力学）使用。

本书分第 I、II、III 册出版。第 I 册为基础部分，包括刚体静力学（原理论

力学的静力学)及变形体静力学(原材料力学杆、轴、梁等基本内容),适用于少学时类专业。即第Ⅰ册相当于传统教材中少学时类使用的《工程力学》教材。第Ⅱ册为通用部分,含运动学、动力学、连续介质力学(含笛卡尔张量及流体力学)及组合变形、强度理论等,适用于中学时类专业。第Ⅲ册涵盖了近机类中学时类专业使用的传统理论力学、材料力学教材内容。对于一般院校中学时类专业,仅使用第Ⅰ、Ⅱ两册即可。第Ⅳ册为专题部分,其内容包括原理论力学、材料力学的专题部分及若干大型力学通用程序介绍,适用于多学时类专业。带*的内容各专业可根据需要,选取其中的若干章、节讲授。为便于老师讲授本教材,我们编辑印刷了与本书配套的教学参考书,每个学校可免费提供2套。有需要者,请向哈尔滨工业大学理论力学教研室函索。

本书由博士生导师程靳教授主编,参加编写的有程燕平(第一、二、三、四、十九、二十、二十一、二十二、二十三、二十四、二十八章),李涛(第五、六、七、八、九、二十五、二十六、二十七章),程靳(第十、十一、十二、十三、十四、二十九、三十、三十一、三十二、三十三章),毕贤顺(第十五、十六、十七、十八章),王刚(第三十四章),全书由程靳、程燕平统稿。

由哈尔滨工程大学朱加铭教授审阅了书稿,并提出了许多宝贵意见,特此致谢。

本书是国内首次在高等工科院校基础力学课程中引入连续介质力学内容,由于我们水平和条件所限,会有许多缺点和错误,衷心希望大家提出批评和指正。

编者

2002年4月

目 录

序

第七篇 力学专题

引言	1
第二十八章 碰撞	3
第一节 碰撞的分类 碰撞问题的简化	3
第二节 用于碰撞过程的基本定理	4
第三节 恢复系数	6
第四节 碰撞问题举例	8
第五节 碰撞冲量对绕定轴转动刚体的作用 撞击中心	12
习题	15
第二十九章 刚体定点运动及自由刚体运动陀螺仪近似理论	19
第一节 刚体定点运动的运动学描述	19
第二节 自由刚体运动的运动学描述	24
第三节 刚体运动的合成	25
第四节 陀螺仪近似理论	35
习题	41
第三十章 断裂与疲劳	47
第一节 能量法	47
第二节 裂纹尖端场及K准则	49
第三节 线弹性断裂力学的其他问题	53
第四节 弹塑性断裂力学	55
第五节 疲劳	58

第六节 应变疲劳	62
第三十一章 非惯性系中的质点动力学	67
第一节 非惯性系中质点动力学的方程	67
第二节 非惯性系中质点的动能定理	73
习题	75
第三十二章 动力学普遍方程与拉格朗日方程	79
第一节 自由度和广义坐标	79
第二节 以广义坐标表示的质点系平衡条件	80
第三节 动力学普遍方程	87
第四节 拉格朗日方程	89
第五节 拉格朗日方程的初积分	95
习题	100
第三十三章 机械振动基础	106
第一节 单自由度系统的自由振动	106
第二节 计算固有频率的能量法	114
第三节 单自由度系统的有阻尼自由振动	116
第四节 单自由度系统的无阻尼受迫振动	122
第五节 单自由度系统的有阻尼受迫振动	127
第六节 转子的临界转速	131
第七节 隔振	133
第八节 两个自由度系统的自由振动	136
第九节 两个自由度系统的	

受迫振动 动力减振器 ...	146	简介	164
第十节 杆件在受迫振动时		第三节 MSC. PATRAN 程序	
的应力	150	简介	169
习题	152	第四节 MSC. PATRAN、NASTRAN	
第三十四章 几种力学常用大型		程序应用举例	173
通用软件介绍	163	第五节 ANSYS 程序简介	178
第一节 引言	163	附录 E 习题答案	186
第二节 MSC. NASTRAN 程序			

第七篇 力学专题

引言

本篇介绍若干类力学专题，内容包括：碰撞、刚体定点运动、断裂与疲劳、拉格朗日方程、机械振动基础及若干常用力学通用软件介绍。各专业可根据不同需要选取不同的专题进行讲授。

本书是国内第一次在基础力学课程中引入工程力学常用大型通用软件介绍，目的是要使学生了解这几种常用软件的用途。21 世纪的工程师在进行力学计算时可能很少使用传统的计算方法，而会大量使用力学通用程序。要正确的使用这些大型通用软件，需要学生有更坚实的力学基础，要善于进行力学分析，要清楚地理解各力学量，要会建立最接近实际又可进行操作的力学模型等等。培养学生的这些能力，正是本套书的目的。

第二十八章 碰 撞

两个或两个以上相对运动的物体在瞬直接触，速度发生突然改变的力学现象称为碰撞。锤锻、打桩、各种球类活动中球的弹射与反跳、火车车厢挂钩的联接等等都是碰撞的实例。飞机着陆、飞船对接与溅落中也有碰撞问题。碰撞是工程与日常生活中一种常见而又非常复杂的动力学问题，本章在一定的简化条件下，对两个物体间的碰撞，讨论碰撞过程中的一些基本规律。

第一节 碰撞的分类 碰撞问题的简化

一、碰撞的分类

碰撞时两物体间的相互作用力，称为碰撞力。若碰撞力的作用线通过两物体的质心，称为对心碰撞，否则称为偏心碰撞，见图 28-1a、b。图 28-1 中，AA 表示两物体在接触处的公切面，BB 为其在接触处的公法线，若碰撞时各自质心的速度均沿着公法线，则称为正碰撞，否则称为斜碰撞，见图 28-1a、b。按此分类还有对心正碰撞、偏心正碰撞等，图 28-1a 所示为对心正碰撞。这种分类是按两物体相碰时，其相处位置来分。

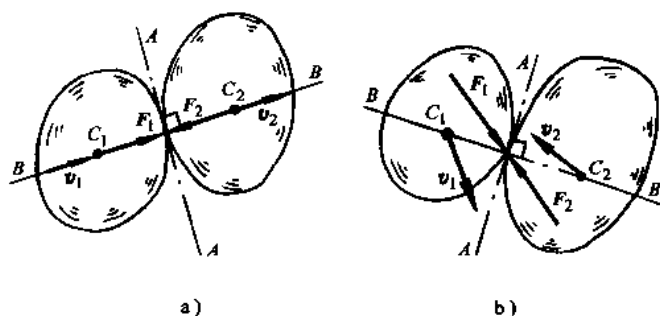


图 28-1

两物体相碰时，按其接触处有无摩擦可分为光滑碰撞与非光滑碰撞。

按物体碰撞后变形的恢复程度（或能量有无损失）可分为完全弹性碰撞、弹性碰撞与塑性碰撞（见本章第三节）。

二、碰撞问题的简化

碰撞现象的特点是，碰撞时间极短（一般为 $10^{-3} \sim 10^{-4} \text{s}$ ），速度变化为有限值，

加速度变化相当巨大,碰撞力极大。例如,一锤头的重力为 30N,以速度 $v_1=3\text{m/s}$ 打在钉子上,测得碰撞时间为 0.002s,锤头反弹速度为 $v_2=0.5\text{m/s}$,为简化计算起见,设碰撞过程为匀减速运动,可得碰撞力为 3856.53N,碰撞力约为锤头重力的 129 倍。此为平均值,碰撞力峰值会更大。又如,鸟与飞行中的飞机相撞而形成所谓的“鸟祸”,碰撞力甚至可达鸟重力的 2 万倍。

由于碰撞时碰撞力极大而碰撞时间极短,在研究一般的碰撞问题时,通常做如下的两点简化:

(1) 在碰撞过程中,由于碰撞力非常大,重力、弹性力等普通力远远不能与之相比,因此这些普通力的冲量忽略不计。

(2) 由于碰撞过程非常短促,碰撞过程中的速度变化为有限值,物体在碰撞开始和碰撞结束时的位置变化很小,因此,在碰撞过程中物体的位移忽略不计。

第二节 用于碰撞过程的基本定理

由于碰撞过程时间短而碰撞力的变化规律很复杂,因此不宜直接用力来量度碰撞的作用,也不宜用运动微分方程描述每一瞬时力与运动变化的关系。常用的分析方法是只分析碰撞前后运动的变化。

同时,碰撞将使物体变形、发声、发热,甚至发光,因此碰撞过程中几乎都有机械能的损失。机械能损失的程度决定于碰撞物体的材料性质以及其他复杂的因素,难以用力的功来计算其机械能的损失。因此,碰撞过程中一般不便于应用动能定理。一般采用动量定理和动量矩定理的积分形式,来确定力的作用与运动变化的关系。

一、用于碰撞过程的动量定理——冲量定理

设质点的质量为 m ,碰撞过程开始瞬时的速度为 v ,结束时的速度为 v' ,则质点的动量定理为

$$m v' - m v = \int_0^t F dt = I \quad (28-1)$$

式中, I 为碰撞冲量,普通力的冲量忽略不计。

对于碰撞的质点系,作用在第 i 个质点上的碰撞冲量可分为外碰撞冲量 $I_i^{(e)}$ 和内碰撞冲量 $I_i^{(i)}$,按照上式有

$$m_i v_i' - m_i v_i = I_i^{(e)} + I_i^{(i)}$$

设质点系有 n 个质点,对于每个质点都可列出如上的方程,将 n 个方程相加,得

$$\sum_{i=1}^n m_i v_i' - \sum_{i=1}^n m_i v_i = \sum_{i=1}^n I_i^{(e)} + \sum_{i=1}^n I_i^{(i)}$$

因为内碰撞冲量总是大小相等、方向相反、成对地存在，因此 $\sum I_i^{(\text{e})} = 0$ ，于是得

$$\sum m_i \mathbf{v}_i' - \sum m_i \mathbf{v}_i = \sum I_i^{(\text{e})} \quad (28-2)$$

式(28-2)是用于碰撞过程的质点系动量定理，在形式上，它与用于非碰撞过程的动量定理一样，但式(28-2)中不计普通力的冲量，因此又称为冲量定理：质点系在碰撞开始和结束时动量的变化，等于作用于质点系的外碰撞冲量的主矢。

质点系的动量可用总质量 m 与质心速度的乘积计算，于是式(28-2)可写成

$$m \mathbf{v}_c' - m \mathbf{v}_c = \sum I_i^{(\text{e})} \quad (28-3)$$

式中 $\mathbf{v}_c$ 和 $\mathbf{v}_c'$ 分别是碰撞开始和结束时质心的速度。

二、用于碰撞过程的动量矩定理——冲量矩定理

质点系动量矩定理一般的表达式为微分形式，即

$$\frac{d}{dt} L_O = \sum M_O(\mathbf{F}_i^{(\text{e})}) = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(\text{e})}$$

式中 L_O 为质点系对于定点 O 的动量矩矢， $\sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(\text{e})}$ 为作用于质点系的外力对点 O 的主矩。

上式可写成

$$dL_O = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(\text{e})} dt = \sum \mathbf{r}_i \times d\mathbf{I}_i^{(\text{e})}$$

对上式积分，得

$$\int_{L_{O_1}}^{L_{O_2}} dL_O = \sum \int_0^t \mathbf{r}_i \times d\mathbf{I}_i^{(\text{e})}$$

或

$$L_{O_2} - L_{O_1} = \sum \int_0^t \mathbf{r}_i \times d\mathbf{I}_i^{(\text{e})}$$

一般情况下，上式中 $\mathbf{r}_i$ 是未知的变量，上式难以积分。但在碰撞过程中，按基本假设，各质点的位置都是不变的，因此碰撞力作用点的矢径 $\mathbf{r}_i$ 是个恒量，于是有

$$L_{O_2} - L_{O_1} = \sum \mathbf{r}_i \times \int_0^t d\mathbf{I}_i^{(\text{e})}$$

或

$$L_{O_2} - L_{O_1} = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{I}_i^{(\text{e})} = \sum M_O(\mathbf{I}_i^{(\text{e})}) \quad (28-4)$$

式中 L_{O_1} 和 L_{O_2} 分别是碰撞开始和结束时质点系对点 O 的动量矩， $\mathbf{I}_i^{(\text{e})}$ 是外碰撞冲

⊙ 为方便计，本章各求和号 $\sum_{i=1}^n$ 从此均写为 $\sum$ 。

量。式(28-4)是用于碰撞过程的动量矩定理,式中不计普通力的冲量矩,又称为冲量矩定理:质点系在碰撞开始和结束时对点 O 的动量矩的变化,等于作用于质点系的外碰撞冲量对同一点的主矩。

三、用于刚体平面运动碰撞过程中的基本定理——刚体平面运动的碰撞方程

质点系相对于质心的动量矩定理与对于固定点的动量矩定理具有相同的形式。与上述推证相似,可以得到用于碰撞过程的质点系相对于质心的动量矩定理

$$L_{C_2} - L_{C_1} = \sum M_C(I_i^{(e)}) \quad (28-5)$$

式中 L_{C_1} 、 L_{C_2} 为碰撞前后质点系相对于质心 C 的动量矩,右端项为外碰撞冲量对质心之矩的几何和(对质心的主矩)。

对于平行于其对称面的平面运动刚体,相对于质心的动量矩在其平行平面内可视为代数量,且有

$$L_C = J_C \omega$$

式中 J_C 为刚体对于通过质心 C 且与其对称平面垂直的轴的转动惯量, ω 为刚体的角速度。由此,式(28-5)可写为

$$J_C \omega_2 - J_C \omega_1 = \sum M_C(I_i^{(e)}) \quad (28-6)$$

式中 ω_1 、 ω_2 分别为平面运动刚体碰撞前后的角速度。上式中不计普通力的冲量矩。

式(28-6)与式(28-3)结合起来,可用来分析平面运动刚体的碰撞问题,称为刚体平面运动的碰撞方程。

第三节 恢复系数

设一小球铅垂地落到固定的平面上,如图28-2所示,此为正碰撞。碰撞开始时,质心速度为 v ,由于受到固定面碰撞冲量的作用,质心速度逐渐减小,物体变形逐渐增大,直至速度等于零为止。此后弹性变形逐渐恢复;物体质心获得反向的速度。当小球离开固定面的瞬时,质心速度为 v' ,这时碰撞结束。

上述碰撞过程可分为两个阶段:

在第一阶段中,物体的动能减小到零,变形增加,设在此阶段的碰撞冲量为 I_1 ,则应用冲量定理在 y 轴的投影式,有

$$0 - (-mv) = I_1$$

在第二阶段中,弹性变形逐渐恢复,动能逐渐增大,设在此阶段的碰撞冲量为 I_2 ,则应用冲量定理在 y 轴的投影式,有

$$mv' - 0 = I_2$$

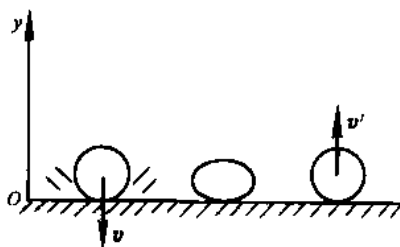


图 28-2

于是得

$$\frac{v'}{v} = \frac{I_2}{I_1} \quad (28-7)$$

由于在碰撞过程中,总要出现发热、发声、甚至发光等物理现象,许多材料经过碰撞后总保留或多或少的残留变形,因此,在一般情况下,物体将损失动能,或者说物体在碰撞结束时的速度 v' 小于碰撞开始时的速度 v 。

牛顿在研究正碰撞的规律时发现,对于材料确定的物体,碰撞结束与碰撞开始的速度大小的比值几乎是不变的,即

$$\frac{v'}{v} = k \quad (28-8)$$

常数 k 恒取正值,称为恢复系数。

恢复系数需用试验测定。用待测恢复系数的材料做成小球和质量很大的平板。将平板固定,令小球自高 h_1 处自由落下,与固定平板碰撞后,小球反跳,记下它达到最高点的高度 h_2 ,如图 28-3 所示。

小球与平板接触的瞬时是碰撞开始的时刻,小球的速度为

$$v = \sqrt{2gh_1}$$

小球离开平板的瞬时是碰撞结束的时刻,小球的速度为

$$v' = \sqrt{2gh_2}$$

于是得恢复系数

$$k = \frac{v'}{v} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}$$

几种材料的恢复系数见表 28-1。

表 28-1

碰撞物体的材料	铁对铅	木对胶木	木对木	钢对钢	象牙对象牙	玻璃对玻璃
恢复系数	0.14	0.26	0.50	0.56	0.89	0.94

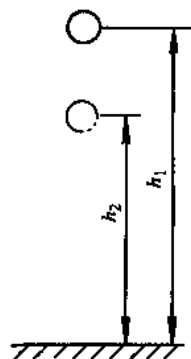


图 28-3

恢复系数表示物体在碰撞后速度恢复的程度,也表示物体变形恢复的程度,并且反映出碰撞过程中机械能损失的程度。对于各种实际的材料,均有 $0 < k < 1$, 由这些材料做成的物体发生碰撞,称为弹性碰撞。

$k=1$ 为理想情况,物体在碰撞结束时,变形完全恢复,动能没有损失,这种碰撞称为完全弹性碰撞。

$k=0$ 是极限情况,在碰撞结束时,物体的变形丝毫没有恢复,这种碰撞称为非弹性碰撞或塑性碰撞。

由式 (28-7) 和式 (28-8) 有

$$k = \frac{v'}{v} = \frac{I_2}{I_1}$$

即恢复系数又等于正碰撞的两个阶段中作用于物体的碰撞冲量大小的比值。

如果小球与固定面碰撞,碰撞开始瞬时的速度 $\mathbf{v}$ 与接触点法线的夹角为 θ , 碰撞结束时返跳速度 $\mathbf{v}'$ 与法线的夹角为 β , 如图 28-4 所示,这种碰撞称为斜碰撞。设不计摩擦,两物体只在法线方向发生碰撞,此时定义恢复系数为

$$k = \left| \frac{v'_n}{v_n} \right|$$

式中 v'_n 和 v_n 分别是速度 $\mathbf{v}'$ 和 $\mathbf{v}$ 在法线方向的投影。

由于不计摩擦, $\mathbf{v}'$ 和 $\mathbf{v}$ 在切线方向的投影相等,由图可见

$$|v'_n| \tan \beta = |v_n| \tan \theta$$

于是

$$k = \left| \frac{v'_n}{v_n} \right| = \frac{\tan \theta}{\tan \beta}$$

对于实际材料有 $k < 1$, 由上式可见,当碰撞物体表面光滑时,应有 $\beta > \theta$ 。

在不考虑摩擦的一般情况下,碰撞前后的两个物体都在运动,此时恢复系数定义为

$$k = \left| \frac{v'_r{}^n}{v_r{}^n} \right| \quad (28-9)$$

式中 $v'_r{}^n$ 和 $v_r{}^n$ 分别为碰撞后和碰撞前两物体接触点沿接触面法线方向的相对速度。

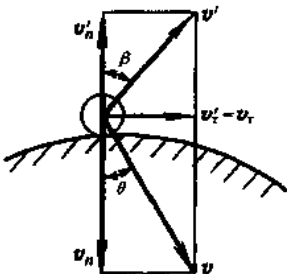


图 28-4

第四节 碰撞问题举例

应用动量定理和动量矩定理的积分形式,并用恢复系数建立补充方程,可以

分析碰撞前后物体运动变化与其受力之间的关系。下面举例加以说明。

例 28-1 两物体的质量分别为 m_1 、 m_2 ，速度分别为 v_1 、 v_2 ，恢复系数为 k ，产生对心正碰撞，如图 28-1a 所示。求碰撞结束时各自质心的速度和碰撞过程中动能的损失。

解：两物体能碰撞的条件是 $v_1 > v_2$ ，取两物体为研究的质点系，因无外碰撞冲量，质点系动量守恒。设碰撞结束时，两物体质心的速度分别为 v'_1 和 v'_2 ，由冲量定理，取 BB 直线为投影轴，有

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \quad (a)$$

由恢复系数定义，由式 (28-9)，有

$$k = \frac{v'_2 - v'_1}{v_1 - v_2} \quad (b)$$

取立式 (a) 和式 (b)，解得

$$\left. \begin{aligned} v'_1 &= v_1 - (1+k) \frac{m_2}{m_1+m_2} (v_1 - v_2) \\ v'_2 &= v_2 + (1+k) \frac{m_1}{m_1+m_2} (v_1 - v_2) \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

在理想情况下， $k=1$ ，有

$$v'_1 = v_1 - \frac{2m_2}{m_1+m_2} (v_1 - v_2) \quad v'_2 = v_2 + \frac{2m_1}{m_1+m_2} (v_1 - v_2)$$

如果 $m_1=m_2$ ，则 $v'_1=v_2$ ， $v'_2=v_1$ ，即两物体在碰撞结束时交换了速度。

当两物体做塑性碰撞时，即 $k=0$ ，有

$$v'_1 = v'_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

即碰撞结束时，两物体速度相同，一起运动。

以 T_1 和 T_2 分别表示此两物体组成的质点系在碰撞过程开始和结束时的动能，则有

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2$$

在碰撞过程中质点系损失的动能为

$$\begin{aligned} \Delta T &= T_1 - T_2 = \frac{1}{2} m_1 (v_1^2 - v'^2_1) + \frac{1}{2} m_2 (v_2^2 - v'^2_2) \\ &= \frac{1}{2} m_1 (v_1 - v'_1)(v_1 + v'_1) + \frac{1}{2} m_2 (v_2 - v'_2)(v_2 + v'_2) \end{aligned}$$

将式 (c) 代入上式，得两物体在正碰撞过程中损失的动能

$$\Delta T = T_1 - T_2 = \frac{1}{2}(1+k) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2) [(v_1 + v_1') - (v_2 + v_2')]]$$

由式 (b) 得

$$v_1' - v_2' = -k(v_1 - v_2)$$

于是, 得

$$\Delta T = T_1 - T_2 = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (1 - k^2) (v_1 - v_2)^2 \quad (d)$$

在理想情况下, $k=1$, $\Delta T = T_1 - T_2 = 0$ 。可见, 在完全弹性碰撞时, 系统动能没有损失, 即碰撞开始时的动能等于碰撞结束时的动能。

在塑性碰撞时, $k=0$, 动能损失为

$$\Delta T = T_1 - T_2 = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2$$

如果第二个物体在塑性碰撞开始时处于静止, 即 $v_2=0$, 则动能损失为

$$\Delta T = T_1 - T_2 = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} v_1^2$$

注意到 $T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$, 上式可改写为

$$\Delta T = T_1 - T_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} T_1 = \frac{1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} T_1 \quad (e)$$

可见, 在此塑性碰撞过程中损失的动能与两物体的质量比有关。

当 $m_2 \gg m_1$ 时, $\Delta T \approx T_1$, 即质点系在碰撞开始时的动能几乎完全损失于碰撞过程中。这种情况对于锻压金属是最理想的, 因为我们在锻压金属时, 锻锤的能量尽量消耗在锻件的变形上, 而砧座尽可能不运动。因此在工程中采用比锻锤重很多倍的砧座。

当 $m_2 \ll m_1$ 时, $\Delta T \approx 0$, 这种情况对于打桩是最理想的。因为我们在碰撞结束时, 应使桩获得较大的动能去克服阻力前进, 因此在工程中应取比桩柱重得多的锤打桩。日常生活中用锤子钉钉子也是如此。

例 28-2 图 28-5 所示为一测量子弹速度的装置, 称为射击摆, 它是一个悬挂于水平轴 O 的填满砂土的筒, 当枪弹水平射入砂筒后, 使砂筒绕 O 轴转过一偏角 φ , 测量偏角的大小即可求出枪弹的速度。已知摆的质量为 m_1 , 对于 O 轴的转动惯量为 J_O , 摆的质心 C 到 O 轴的距离为 h 。枪弹的质量为 m_2 , 枪弹射入砂筒时枪弹到 O 轴的距离为 d 。悬挂索的重量不计, 求子弹的速度。

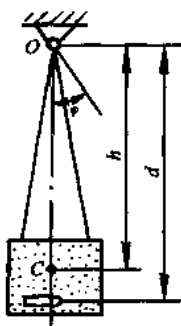


图 28-5