初级中学课本

几何

第二册

$$S=\pi R^2$$

人民教育出版社

初级中学课本

几　何

第二册

人民教育出版社数学室编

*

人民教育出版社出版

北京出版社重印

北京市新华书店发行

北京印刷三厂印刷

*

开本787×1092 1/32 印张6.25 字数106,000

1984年10月第1版 1988年6月第4次印刷

ISBN 7-107-00325-9/G·528(课) 定价0.55元

一、初级中学课本《几何》是在中小学通用教材数学编写组编写的全日制十年制学校初中课本(试用本)《数学》第三至六册中的几何部分的基础上，吸收了几年来各地在试用中的一些经验和意见编写而成的.

二、本书内容包括：相似形；圆；视图(其中相似形中的位似图形和视图等内容为选学内容). 供初中三年级使用，每周三课时.

三、本书的习题共分三类：练习、习题、复习参考题.

1. 练习　供课内练习使用.

2. 习题　供课内、课外选用.

3. 复习参考题　供每章复习选用.

四、本书由人民教育出版社数学室编写，参加编写工作的有鲍珑、李慧君、许缦~~闵等. 全书~~由张孝达、孙福元校订.

目　　录

第六章　相似形……………………………………………… 1
一　比例线段……………………………………………… 1
二　相似三角形……………………………………………26
三　位似图形……………………………………………… 53
第七章　圆 ………………………………………………70
一　圆的有关性质…………………………………………70
二　直线和圆的位置关系…………………………………97
三　圆和圆的位置关系………………………………… 117
四　正多边形和圆……………………………………… 130
五　点的轨迹…………………………………………… 149
附录　圆周长和圆面积………………………………… 167
*第八章　视图…………………………………………171
附录…………………………………………………… 196

第六章　相似形

一　比例线段

6.1　比例

前面，我们学习了全等图形．两个全等图形的形状相同，大小也相同，它们能够完全重合．我们还常见到这样的一些图形，如国旗上的大五角星和小五角星；图 6-1 中我们伟大祖国的两幅大小不同的地图．这些图形大小虽然不同，但形状却是相同的．

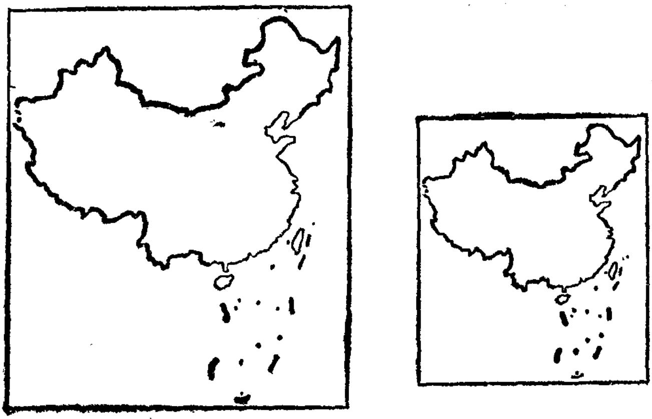


图　6-1

为了研究这些形状相同的图形之间的关系，我们

需要先研究比例和比例线段.

在小学里，我们学过比例，就是两个比相等的式子. 如

$$\frac{80}{2}=\frac{240}{6} \quad 或 \quad 80:2=240:6.$$

如果用字母来表示数，那么比例可以写成如下的形式(只研究所有的字母都不等于零的情形):

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad 或 \quad a:b=c:d.$$

在比例中，a、d 叫做**比例外项**，b、c 叫做**比例内项**，d 叫做 a、b、c 的**第四比例项**. 如果比例中两个比例内项相等，即比例为

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c} \quad 或 \quad a:b=b:c$$

时，我们把 b 叫做 a 和 c 的**比例中项**.

在比例$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$的两边同乘以 bd，得到

$$ad=bc.$$

这个推理步骤就是:

$\because \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d},$

$\therefore \quad ad=bc.$

为了简明，可以把这个推理步骤写成:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Longrightarrow ad=bc. \qquad ①$$

符号"$\Longrightarrow$"读作"推出"．

在等式 $ad=bc$ 的两边同除以 bd，又得到 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，即

$$ad=bc \Longrightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}. \qquad ②$$

①、②式合起来表明 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 与 $ad=bc$ 可以互相推出，它是比例的基本性质．

比例的性质定理

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Longleftrightarrow ad=bc.$$

符号"$\Longleftrightarrow$"读作"等价于"，它表示从左端可以推出右端，并且从右端也可以推出左端．

推论 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c} \Longleftrightarrow b^2=ac.$

根据比例的性质定理，一个比例可以得出多种不同的比例变形．例如，

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Longrightarrow ad=bc \Longrightarrow bc=ad \Longrightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}.$$

由于 $ad=bc$ 可以写成 $bc=ad$，$ad=cb$，$cb=da$，…等七种形式，所以由 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 又可以得出 $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$，$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$，$\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$，…等七种不同的形式．

例 1 依据下列各式，求 $a:b$:

(1) $3a=4b$; (2) $\frac{a}{5}=\frac{b}{7}$.

解: (1) $3a=4b \Longrightarrow \frac{a}{b}=\frac{4}{3}$;

(2) $\frac{a}{5}=\frac{b}{7} \Longrightarrow \frac{a}{b}=\frac{5}{7}$.

下面，我们再学习比例的两个重要性质:

1. 合比性质

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Longrightarrow \frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}.$$

证明: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Longrightarrow \frac{a}{b}\pm 1=\frac{c}{d}\pm 1$

$$\Longrightarrow \frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}.$$

2. 等比性质

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\cdots=\frac{m}{n}(b+d+\cdots+n\neq 0)$$

$$\Longrightarrow \frac{a+c+\cdots+m}{b+d+\cdots+n}=\frac{a}{b}.$$

证明: 设 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\cdots=\frac{m}{n}=k$, 那么 $a=bk$, $c=dk, \cdots, m=nk$.

$$\frac{a+c+\cdots+m}{b+d+\cdots+n}=\frac{bk+dk+\cdots+nk}{b+d+\cdots+n}$$

$$=\frac{(b+d+\cdots+n)k}{b+d+\cdots+n}=k=\frac{a}{b}.$$

例2 (1) 已知: $\frac{a-b}{b}=\frac{3}{8}$. 求证: $\frac{a}{b}=\frac{11}{8}$;

(2) 已知: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\ (b\pm d\neq 0)$. 求证: $\frac{a+c}{a-c}=\frac{b+d}{b-d}$.

证明: (1) $\frac{a-b}{b}=\frac{3}{8}\Longrightarrow\frac{a-b+b}{b}=\frac{3+8}{8}$

$$\Longrightarrow\frac{a}{b}=\frac{11}{8};$$

(2) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Longrightarrow\left.\begin{cases}\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}\\ \frac{a-c}{b-d}=\frac{a}{b}\end{cases}\right\}\Longrightarrow\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}$

$$\Longrightarrow\frac{a+c}{a-c}=\frac{b+d}{b-d}.$$

例3 已知: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=3$, $b+d+f=4$. 求 $a+c+e$.

解: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=3\Longrightarrow\frac{a+c+e}{b+d+f}=3$

$$\Longrightarrow\left.\begin{aligned}a+c+e=3(b+d+f)\\ b+d+f=4\end{aligned}\right\}$$

$$\Longrightarrow a+c+e=3\times 4=12.$$

练 习

1. 求下列各式中的 x:

(1) $4:x=3:5$; (2) $(x+2):x=11:9$;

(3) $3:x=x:12$; (4) $1:x=x:(1-x)$.

2. 已知: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. 写出其他七个比例式, 并指出其中哪些是以 a 和 d 为外项, 以 b 和 c 为内项的比例式, 哪些是以 b 和 c 为外项, 以 a 和 d 为内项的比例式.

3. 从下列各式求 $x:y$:

(1) $3y=4x$; (2) $3:2=y:x$;

(3) $7:x=4:y$; (4) $m:y=n:x$;

(5) $(x+y):y=8:3$; (6) $(x-y):y=1:2$.

4. 已知 h 是 e、f、g 的第四比例项, 写出比例式.

5. 已知: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{5}{7}$. 求 $\frac{2a-c+7e}{2b-d+7f}$.

6. (口答)

(1) $\frac{a}{b}$是不是等于 $\frac{a^2}{b^2}$? 为什么?

(2) 从$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$能不能得出 $\frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}$? 为什么?

7. 从下面两个比例可以推出什么结果:

(1) $b:a=c:b$;

(2) $b:a=b:c$.

6.2 比例线段

我们先来研究两条线段的比.

在同一单位下，两条线段长度的比叫做这**两条线段的比**. 两条线段 AB、CD 的比值为 k 时，可以记作:

$$\frac{AB}{CD}=k \quad 或 \quad AB:CD=k.$$

因为线段的长度是一个正量，所以两条线段的比值一定是正数. 例如，课本的封面相邻两边 a、b 的长度分别是18.5 cm 和 13 cm, 那么

$$\frac{a}{b}=\frac{18.5}{13}=\frac{37}{26} \quad 或 \quad a:b=18.5:13=\frac{37}{26}.$$

如果改用米、毫米作为线段的长度单位, 那么

$$a:b=0.185:0.130=\frac{37}{26};$$

$$a:b=185:130=\frac{37}{26}.$$

由此可知：两条线段的比值与所采用的长度单位没有关系. 因此, 下面讨论线段的比时, 一般不指明长度单位. 但如果遇到给出的线段长度使用不同的单位时, 要先化成同一单位.

如图 6-2, 分别度量两个矩形的长 a 和 b, 宽 c 和 d, 得

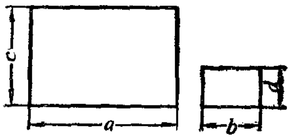


图 6-2

$a=3\ \mathrm{cm}, b=12\ \mathrm{mm}, c=2\ \mathrm{cm}, d=8\ \mathrm{mm}.$

改成用 mm 为单位，得 $a=30\ \mathrm{mm}, c=20\mathrm{mm}$. 可得

$$\frac{a}{b}=\frac{30}{12}=2.5,\ \frac{c}{d}=\frac{20}{8}=2.5.$$

于是得

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\quad 或\quad a:b=c:d.$$

在四条线段 a、b、c、d 中，如果 a 和 b 的比等于 c 和 d 的比，那么，这四条线段叫做**成比例线段**或简称**比例线段**.

例 1 两地的实际距离是 250 m，画在地图上的距离(图距)是 5 cm，图距与实际距离的比(0.05:250)就是比例尺$\left(\frac{1}{5000}\right)$. 在这样的地图上，图距 $a=8\mathrm{cm}$ 的两地 A、B，实际距离是多少米？

解：根据题意

$$\frac{a}{AB}=\frac{1}{5000},$$

$\therefore\quad AB=5000a=40000(\mathrm{cm})=400(\mathrm{m}).$

答：A、B 两地的实际距离是 400 米.

例 2 已知线段 $AB=l$，C 是 AB 上的一点(图 6-3)，且 AC 是 AB 和 BC 的比例中项. 求 AC 的长.

解：设 $AC=x$，那么

$BC=AB-AC=l-x.$

图 6-3

因为 AC 是 AB 和 BC 的比例中项，得

$$x^2=l(l-x),$$

$$x^2+lx-l^2=0.$$

解得 $$x=\frac{-l\pm\sqrt{l^2+4l^2}}{2},$$

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}l,\quad x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}l\ (\text{不合题意}).$$

即 $$AC=\frac{\sqrt{5}-1}{2}l\approx0.618l.$$

把一条线段(AB)分成两条线段，使其中较大的线段(AC)是原线段(AB)与较小的线段(BC)的比例中项，叫做把这条线段**黄金分割**.

在一条线段 AB 上截取这条线段的0.618倍得点 C，点 C 就是线段 AB 的黄金分割点(近似). 我们也可以根据勾股定理，利用尺规作图作出 $\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2+l^2}$，再作出一条线段的黄金分割点. 作法如下：

1. 过点 B 作 $BD\perp AB$，使 $BD=\frac{1}{2}AB$(图 6-4).

2. 连结 AD，在 AD 上截取 $DE=DB$.

3. 在 AB 上截取 $AC=AE$.

点 C 就是所求的黄金分割点.

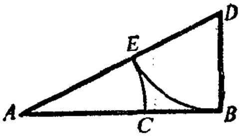


图 6-4

这是因为，$AC=AE=AD-\dfrac{AB}{2}$

$$=\sqrt{AB^2+\left(\frac{AB}{2}\right)^2}-\frac{AB}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{5}\,AB}{2}-\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}AB.$$

练　习

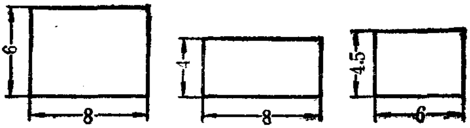
1. 延长线段AB到C，使$BC=AB$。求

(1) $AC:AB$;　　(2) $AB:BC$;　　(3) $AC:BC$。

2. 求正方形的对角线和它的一边的比值:

(1) 用根式表示；(2)精确到0.1；(3)精确到0.001。

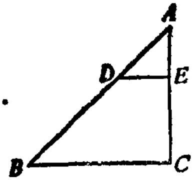
3. (口答)如图所示的三个矩形中，哪两个矩形的长和宽是成比例的线段？



(第3题)

4. 已知：线段 $a=\dfrac{1}{7}$cm，$b=4$cm，$c=28\sqrt{2}$cm。求 a、b、c 的第四比例项。

5. 已知：如图，$\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$，$AD=15$，$AB=40$，$AC=28$，求 AE 的长。



(第5题)

习 题 十 九

1. 烟囱高 30 米，影长 20 米；竿高 1.5 米，影长 1 米。物高与影长成比例吗？

2. (1) 求等腰直角三角形的直角边与斜边的比；

   (2) 求正三角形的高与边长的比。

3. 把下列各式写成比例的形式：

   (1) $mn=pq$；　　(2) $a^2=bc$；　　(3) $x=\dfrac{bc}{a}$.

4. 已知 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$.

   (1) 用 b、c、d 表示 a；　　(2) 用 a、c、d 表示 b.

5. 图纸上画出的某个零件的长是 32 毫米，如果比例尺是 1:20，这个零件实际的长是多少？如果比例尺是5:1呢？

6. 在相同时刻的物高与影长成比例. 如果某建筑物在地面上的影长为50米，同时，高为1.5米的测竿的影长为2.5米，那么建筑物的高是多少米？

7. 在两个比例式 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ 和 $\dfrac{a'}{b'}=\dfrac{c'}{d'}$ 中，如果 $a=a'$，$b=b'$，$c=c'$，那么 d 和 d' 是不是相等？为什么？

8. 已知：$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{4}$. 求

   (1) $\dfrac{x+y+z}{x}$；　　(2) $\dfrac{x+y+z}{x+y-z}$；　　(3) $\dfrac{y+z-x}{z+x-y}$.

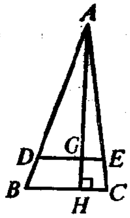
9. 已知：$x:y:z=3:4:5$，$x+y-z=6$. 求 x、y 和 z.

   (注：$x:y:z=3:4:5$ 是 $x:3=y:4=z:5$ 的另一种写

法.)

10. (1) 求证: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Longrightarrow\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$;

(2) 求证: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Longrightarrow\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$.



(第 11 题)

11. 如图, $\triangle ABC$中, $DE\parallel BC$, $AH\perp BC$, AH交DE于点G. 已知: $\frac{AG}{DE}=\frac{AH}{BC}$, 且$DE=12$, $BC=15$, $GH=6$. 求高AH.

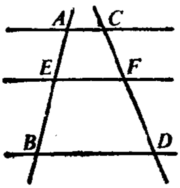
12. (1) 已知: $a=4$ 厘米, $b=6$ 厘米, $c=3$ 厘米. 求 a、b、c 的第四比例项 d;

(2) 已知: $a=2.4$ 厘米, $c=5.4$ 厘米. 求 a 和 c 的比例中项 b;

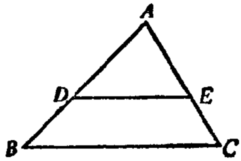
(3)已知: 线段 $a=1$, $b=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $c=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. 求证: 线段 b 是 a、c 的比例中项.

13. 已知: 如图, $\frac{AE}{EB}=\frac{CF}{FD}$. 依据比例的性质证明:

(1) $\frac{AE}{CF}=\frac{EB}{FD}$; (2) $\frac{AB}{EB}=\frac{CD}{FD}$; (3) $\frac{AB}{CD}=\frac{AE}{CF}$.



(第 13 题)



(第 14 题)

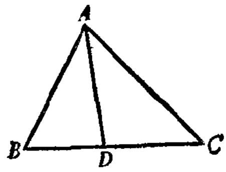
14. 已知: 如图, $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}=\frac{3}{2}$.

求 $\frac{AB}{DB}$，$\frac{EC}{AE}$，$\frac{AB}{AD}$，$\frac{EC}{AC}$.

15. 已知：如图，$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$，

$AB=2.8$ 厘米，$BC=3.6$厘米，

$AC=3.5$ 厘米．求 BD、DC.



（第 15 题）

16. 已知：在四边形 $ABCD$ 和 $A'B'C'D'$ 中，

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DA}{D'A'}=\frac{2}{3},$$

$$AB+BC+CD+DA=13.6\text{厘米}.$$

求 $A'B'+B'C'+C'D'+D'A'$.

6.3 平行线分线段成比例定理

在四边形一章里，我们学过平行线等分线段定理．如图 6-5，$l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$，如果 $AB=BC$，那么 $DE=EF$.

由于 $\frac{AB}{BC}=1$，$\frac{DE}{EF}=1$，

我们可得比例：

$$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}.$$

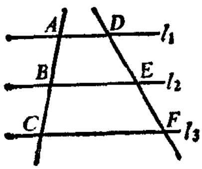


图 6-5

这就是说，平行线等分线段时，分得的线段成比例．

下面我们来研究平行线不等分线段的情形．如图 6-6，$l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$，如果 $AB \neq BC$，那么四条线段 AB，