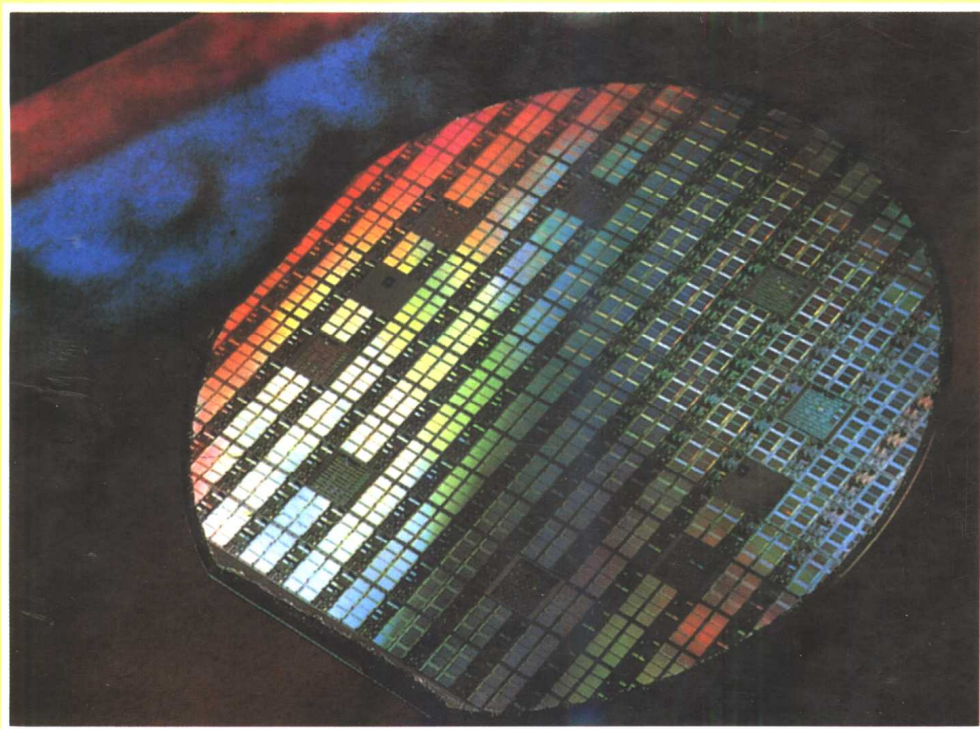

计算机控制原理 与应用

●张晋格 主编



电子工业出版社

计算机控制原理与应用

张晋格 王卓军 主编

张晋格 王卓军 王晓东
冯启晨 张晓华 陈宏钧 编著

电子工业出版社

内 容 简 介

本书对计算机控制理论与实现技术进行了全面、系统的论述,全书分理论篇和应用篇共10章。前6章为理论篇,主要介绍计算机控制系统分析与设计方面的理论与方法,论述中力求简明扼要,深入浅出;7~10章为应用篇,着重介绍计算机控制在工程实践方面的应用技术,主要包括仿真技术、接口技术、系统构成与实现等,通过典型的应用实例,使读者了解与掌握计算机控制系统设计、调试及工程实现的全过程。书末附有习题,可供读者复习与自检用。

本书可作为从事计算机应用、自动控制、工业自动化及其相关专业的大学生、研究生教材,也可作为广大工程技术人员的培训教材与参考书。

计算机控制原理与应用

张晋格 王卓军 主编

责任编辑:龚兰方

*

电子工业出版社出版

北京市海淀区万寿路173信箱(100036)

电子工业出版社发行 各地新华书店经销

北京市顺义李史山胶印厂印刷

开本:787×1092毫米 1/16 印张:24 字数:427千字

1995年9月第一版 1995年9月北京第一次印刷

印数:3000册 定价:29.00元

ISBN7-5053-2947-2/TP·1004

前 言

《计算机控制原理与应用》一书是作者根据近年来从事计算机控制方面的教学、科研实践、参考了国内、外的先进理论与技术、多次修改、总结编写定稿的。

计算机控制作为一门新兴学科,近年来发展迅速,从理论到实践日趋成熟。计算机控制是一门理论性与实践性都很强的学科。它实际上包含着两部分内容:一是计算机控制的理论基础,即数字控制系统理论;二是实现技术,主要包括通道接口技术与系统实现技术。本书试图从理论到实践对这一学科进行系统而简明的阐述。全书共有十章。分为上、下两篇,上篇为理论篇(一至六章)。主要介绍计算机控制系统分析与设计方面有关的理论与方法,论述中力求简明扼要,深入浅出。下篇为应用篇(七至十章),着重讲述计算机控制在工程实践方面的应用技术,主要包括仿真技术、接口技术、系统构成与实现技术等,通过几类典型工业计算机控制应用实例的介绍,使读者了解与掌握计算机控制系统从设计、调试到工程实现的全过程。

本书由哈工大张晋格教授主编,王卓军副教授任副主编,王炎教授主审,参加编写工作的人员有:张晋格(一至三章,§ 10.1 节、§ 10.3 节,前言),冯启晨(四、五章),陈宏钧(六章,§ 10.2 节),张晓华(七章),王晓东(八章,§ 6.7 节、§ 9.5 节、§ 10.4 节、§ 10.5 节),王卓军(九章)。

王炎教授对全书进行了认真审阅,高波、熊礼文为§ 10.3 节提供了原始素材。本书编写过程中得到哈工大工业电气自动化教研室的大力支持,在此一并表示致谢。

本书可以作为工业自动化,自动控制,计算机应用及其他有关专业学生教材或教学参考书,也可以作为广大工程技术人员的培训教材或自学参考书。

由于编者水平所限,书中缺点、错误在所难免,恳请广大读者批评指正。

编者

1995.1. 于哈尔滨工业大学

目 录

理 论 篇

第一章 概述	(1)
§ 1-1 计算机控制系统的概念与结构特点	(1)
§ 1-2 采样过程与保持器	(3)
§ 1-3 计算机控制系统的应用形式	(15)
第二章 计算机控制系统的 Z 变换分析法	(18)
§ 2-1 线性常系数差分方程	(18)
§ 2-2 Z 变换的定义及求法	(22)
§ 2-3 Z 反变换及差分方程的 Z 变换解法	(33)
§ 2-4 Z 传递函数与扩展 Z 变换	(38)
§ 2-5 稳定性分析	(51)
§ 2-6 暂态特性分析	(63)
§ 2-7 稳态误差	(71)
第三章 连续化设计方法	(75)
§ 3-1 模拟装置的数字化方法	(75)
§ 3-2 连续化设计方法的一般步骤	(82)
§ 3-3 数字 PID 调节器的设计	(85)
§ 3-4 大纯滞后补偿控制系统	(97)
第四章 离散化设计方法	(102)
§ 4-1 最少拍系统的设计	(102)
§ 4-2 最少拍冗余系统的设计	(116)
§ 4-3 具有干扰的最少拍系统的设计	(120)
§ 4-4 控制公式的程序设计法	(125)
第五章 状态空间设计法	(129)
§ 5-1 输出反馈设计法	(129)
§ 5-2 状态反馈设计法	(136)
§ 5-3 状态观测器设计	(140)
§ 5-4 二次型性能最优设计法	(146)

第六章 模糊控制与智能控制	(152)
§ 6-1 概述	(152)
§ 6-2 模糊控制的数学基础	(153)
§ 6-3 模糊控制基本原理	(158)
§ 6-4 模糊控制器的设计	(169)
§ 6-5 自组织模糊控制	(174)
§ 6-6 模糊控制实例分析	(177)
§ 6-7 学习控制器及算法	(187)

应 用 篇

第七章 计算机控制系统的数字仿真技术	(195)
§ 7-1 概述	(195)
§ 7-2 计算机控制系统的数字仿真	(199)
§ 7-3 CSMP-C 连续/函数系统仿真语言	(208)
§ 7-4 数字仿真技术的综合应用	(219)

第八章 常用接口技术	(232)
§ 8-1 概述	(232)
§ 8-2 人机通道接口技术	(243)
§ 8-3 检测通道及接口技术	(253)
§ 8-4 控制通道及接口技术	(260)
§ 8-5 系统间通道及接口技术	(266)

第九章 工业控制计算机系统及实现	(277)
§ 9-1 概述	(277)
§ 9-2 PC 总线工业控制计算机及系统实现	(280)
§ 9-3 STD 总线工业控制计算机及系统实现	(287)
§ 9-4 单片机构成的工业控制计算机及其实现	(293)
§ 9-5 Intel8086CPU 最小系统设计	(304)

第十章 计算机控制系统的实现与工业应用实例	(313)
§ 10-1 概述	(313)
§ 10-2 燃油加热炉微机控制系统	(316)
§ 10-3 用单片机控制的交流伺服系统	(325)
§ 10-4 多坐标位置伺服系统的微机控制	(329)
§ 10-5 工业机器人微机控制系统	(335)

附录 1 用留数法求 Z 变换的数学基础	(345)
附录 2 ZFX2.0 连续/离散复合仿真程序包使用说明	(351)
附录 3 用 BASIC 语言实现的一个 Fuzzy 控制	(362)
习题及思考题	(367)
第一~六章 习题及思考题	(367)
第七章 习题	(372)
参考文献	(375)

理 论 篇

第一章 概 述

近年来,计算机在工业控制中的应用日益广泛,如在冶金、化工生产过程控制、高精度伺服控制、工业机器人控制以及机械行业计算机集成制造(CIM)技术等方面都已经取得了令人瞩目的研究与应用成果,并且在国民经济中发挥着越来越大的作用。由于计算机参与了企业生产的管理与控制,不仅提高了工厂自动化生产的水平,而且也推动了控制理论的应用与发展,并逐步形成了计算机控制这一新兴学科。

计算机与自动控制相结合产生了计算机控制系统。那么究竟什么叫做计算机控制系统,它与常规的模拟控制系统在信号传输及研究方法上有什么差别,应当怎样对计算机控制系统进行分类等等,本章将对这些问题从基本概念上进行扼要地阐述。

§ 1-1 计算机控制系统的概念与结构特点

在控制理论中,根据系统中信号相对于时间的连续性,通常分为连续时间系统和离散时间系统(简称连续系统与离散系统)。在控制类文献中我们还经常遇到采样系统,数字控制系统等名词。对上述名词可以从概念上做如下解释:如果一个系统中只包含离散信号就叫做离散系统。即在这种系统中有一个或多个变量仅在离散的瞬时上变化。如果在系统中既包含有离散信号又包含有连续信号则称之为采样系统。而数字系统是指系统中的某些信号是由数字计算机或数字变送器产生,并且呈现数字代码形式。一般说来,在采样系统和数字系统中的信号至少在一处或几处呈脉冲序列或数字代码的形式。通常采样系统属于更普遍的情况,即只要其中信号是以脉冲数据形式存在的。这两种系统通常称为离散数据控制系统。因此离散控制理论是研究计算机控制系统的理论基础。本书将主要讨论线性定常离散系统的控制问题,这是因为工程上大多数控制系统都具有线性定常系统的特征,对于具有轻度非线性的系统,经线性化处理后,也可以用线性系统方法来分析。

象连续系统一样,计算机控制系统也可以分为开环控制和闭环控制两种方式。在开环控制中,系统的输出量对控制量没有影响。这种控制方式早期主要用于顺序控制,数字程序控制以及数据巡回检测等方面。在闭环控制中,系统的输出量通过数字反馈直接对控制作用产生影响。计算机在系统中通常取代模拟调节器而构成了数字调节器或数字控制器。与模拟调节器相比,计算机不仅可以完成单变量调节任务,而且可以实现多变量或多回路数字闭环控制。此类系统在工业中应用极其广泛,在过程控制中如温度、压力、流量、液位的控制等,在交、直流伺服系统中如电压、电流、转速、位置的控制等。由于被控制量一般来说都是模拟量,而计算机本身的输入输出量都是数字量,因此计算机控制系统通常都具有数字—模拟混合式的结构。计算机闭环控制系统的基本结构框图由图 1-1 所示,图中

包括工作于离散状态下的数字计算机和具有连续工作状态的被控

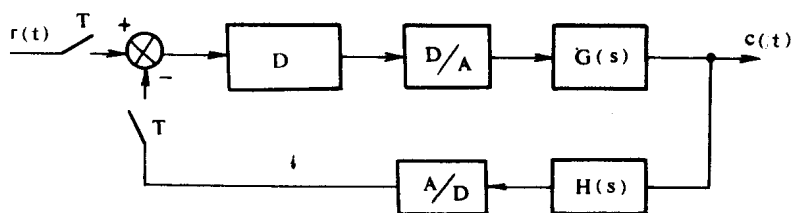


图 1-1 计算机闭环控制系统框图

对象两大部分。被控对象一般为连续变化的物理量（如温度、流量、压力、速度、位移等），称为模拟量，它们通过测量环节（各种传感器）被转换成相应的电压或电流信号，再经过模/数转换器将模拟信号转换成计算机能够处理的数字量送入计算机，从而完成了信息的输入过程。计算机经数学运算和处理后的数字信号还需要经过数/模转换和保持（以便使离散信号变为连续信号），再经过执行机构施加到被控对象，实现了信息的输出。因此从信息转输的观点来观察计算机控制系统，可以抽象为信息的变换与处理过程。其中模/数转换器（A/D）完成了信息的获取（输入），计算机对输入的信息进行比较和处理（控制算法与逻辑运算等），数模（D/A）转换器实现了信息的输出。计算机控制系统中信号的具体变换与传输过程如图 1-2 所示。

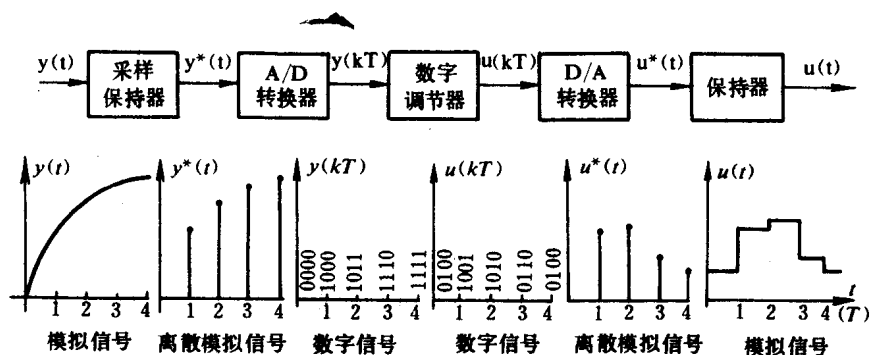


图 1-2 计算机控制系统中的信号变换与传递

为了便于讨论，我们将图 1-2 中的信号名称作一统一定义：

模拟信号 —— 时间上连续，幅值上也连续的信号 $y(t)$ ；

离散模拟信号 —— 时间上离散而幅值上连续的信号 $y^*(t)$ ；

数字信号 —— 时间上离散，幅值也离散的信号 $y(kT)$ 通常用二进制数表示。

采样 —— 将模拟信号 $y(t)$ 抽样成离散模拟信号 $y^*(t)$ 的过程；

量化 —— 采用一组数码（如二进制数码）来逼近离散模拟信号的幅值，将其转换成数字信号。

从图 1-2 可以清楚地看出计算机获得信息的过程, 这个过程是由 A/D 转换器来完成的, 从模拟信号 $y(t)$ 到离散模拟信号 $y^*(t)$ 的过程就是采样, 其中 T 是采样周期, 采样保持时间 τ 称为采样时间, 通常 $T \gg \tau$ 。显然合理地选择采样周期是必要的; T 过大会损失信息, T 过小会使计算机的负担加重, 即存贮与运算的数据过多, 采样定理给出合理地选择 T 的指导原则。 τ 的选择应保证在 τ 的时间内, 被采样的信号 $y(t)$ 基本保持不变, 同时尽可能小一些, 以便在 T 的时间内可以实现多路采样。

从离散模拟信号 $y^*(t)$ 到数字信号 $y(kT)$ 的变化过程叫做量化(整量化), 即用一组二进制数码来逼近采样的模拟信号值。由于微型计算机通常采用 8 位或 16 位有限字长, 因此量化过程会带来量化误差。量化误差的大小取决于量化单位 q 。若被转换的模拟量满量程为 M , 转换成二进制数字量的位数为 N , 则量化单位 q 定义为

$$q = M/2^N$$

而量化误差 $\epsilon = \pm q/2$ 。显然, N 越大, 量化误差越小, 但 N 过大会导致计算上有效字长的增加。

[例 1-1] 若模拟量满量程 $M = 10V$, 计算机有效字长 $N = 8$ 位, 试求量化单位 q 与量化误差 ϵ 。

[解] 量化单位 $q \approx M/2^N = 10V/2^8 = 39.1\text{mv}$

量化误差 $\epsilon = q/2 = 19.5\text{mv}$

下面我们来简单分析计算机对输入的信息进行处理的过程。数字控制器设计者的主要目标是要得到一合适的控制算法。应当指出, 计算机引入控制系统之后, 由于其运算速度快, 精度高, 存贮容量大, 以及强大的运算功能, 因此不仅可以完成常规的 PID 控制算法, 而且可以完成模拟系统难以解决的许多复杂控制算法, 如自适应控制、最优控制、自学习控制、智能控制等。可以说, 如果没有计算机, 现代控制理论的应用问题是很难想像的。关于控制算法的获得是计算机控制系统综合与设计的主要内容。这里我们想着重谈谈由于有效字长对控制算法实现过程中带来的影响。计算机在信号处理过程中, 通常采用浮点制和数值舍入等方法, 在微机控制器运算中经常采用定点制和截断有限字长的方法。例如, 尾数为 N 位的定点数能分辨的最小有效数是 2^{-N} 。但是在定点乘法运算中两个 N 位数相乘结果为 $2N$ 位。因此需要对尾数做量化处理, 使 $2N$ 位的字长缩短为 N 位, 这样就会产生截断误差和舍入误差。所谓截断就是将小于最低位的数截去, 而舍入是指按最接近的值取 N 位, (如四舍五入)。由于截断与舍入误差的存在, 会给系统在实现控制算法的过程中带来不良的影响, 例如数值极限环等, 这在连续系统中是没有的, 有关量化误差及量化噪声的详细分析可参阅有关文献。

最后简单谈一下信息的输出过程。由于被控对象通常是模拟器件, 因此计算机对信息处理的结果(二进制数码)还必须转换成模拟器件能感受的模拟量, 这个过程是由保持器来完成的, 它包括 D/A 转换器与数字寄存器等部分, 关于保持器的详细分析, 在下一节做具体介绍。

§ 1-2 采样过程与保持器

一、脉冲函数的概念

在实践中有许多物理量具有脉冲的性质。如两个台球相撞时产生的瞬时冲击力, 电源

对电容快速充电时出现的脉冲电流，阀门突然关闭时液压管路所产生的冲击力等。这些物理量的共同特点是具有较大的幅值，而作用时间极短，为了描述这些物理量，在数学中引入了狄拉克（Dirac）函数，记作 δ —函数。理想单位脉冲函数 $\delta(t)$ 的定义为

$$\begin{cases} \delta(t) = 0 & t \neq 0 \\ \delta(t) = \infty & t = 0 \end{cases} \quad (1-1)$$

$$\therefore \int_{-\infty(t)}^{+\infty} \delta(t) \cdot dt = 1$$

若理想单位脉冲发生在 $t = t_0$ 瞬间，则

$$\begin{cases} \delta(t - t_0) = 0 & t \neq t_0 \\ \delta(t - t_0) = \infty & t = t_0 \end{cases} \quad (1-2)$$

从 δ —函数的定义来看，无限幅值，宽度为零，而面积为 1 的函数实际上无法获得，通常用图 1-3 所示的实际脉冲来代替理想单位脉冲。描述上述实际脉冲的数学表达式为

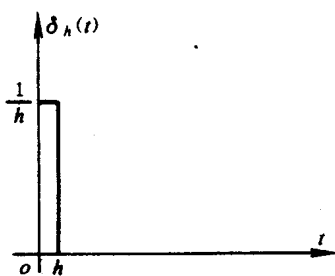


图 1-3 实际脉冲

$$\begin{cases} \delta_h(t) = 0 & t < 0, t > h \\ \delta_h(t) = \frac{1}{h} & 0 < t < h \end{cases} \quad (1-3)$$

实际脉冲的面积为 $h \times \frac{1}{h} = 1$ ，式中 h 是实际脉冲的宽度，显然，当 $h \rightarrow 0$ 时，幅值 $\delta_h(t) \rightarrow \infty$ ，即理想单位脉冲是实际脉冲当脉冲宽度 h 趋近于零时的极限情况。

δ —函数是一种特殊函数，它有许多性质，这里仅介绍它有采样性质（筛选性质）。若 $f(t)$ 为连续函数，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \delta(t) \cdot dt = f(0) \quad (1-4)$$

证明

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t) dt &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^t f(t) \cdot \delta(t) dt + \lim_{t \rightarrow 1} \int_{-t}^t f(t) \cdot \delta(t) dt + \lim_{t \rightarrow 1} \int_t^{\infty} f(t) \\ &\quad \cdot \delta(t) \cdot dt = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{-t}^t f(t) \cdot \delta(t) dt = f(0) \cdot \lim_{t \rightarrow 1} \int_{-t}^t \delta(t) dt = f(0) \end{aligned} \quad (1-5)$$

对于更一般的情况, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - \tau) \cdot dt = f(\tau) \quad (1-6)$$

(1-4) 式和 (1-6) 式的物理意义是: 对于给定的连续函数 $f(t)$, 通过对 $\delta(t)$ 或 $\delta(t - \tau)$ 乘积的积分, 可以摘出在原点的函数值 $f(0)$, 或摘出 $f(t)$ 在 $t = \tau$ 时的函数值 $f(\tau)$, 这就是 δ 函数的采样 (筛选) 性质。 δ - 函数虽然是一种广义函数, 但它们和任何连续函数的乘积在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内的积分都有明确的意义, 因此在工程技术中得到广泛的应用。

下面我们利用 δ - 函数的这一性质推导 δ - 函数的拉氏变换和富氏变换。由拉氏变换定义有

$$L[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-st} \cdot dt = e^{-st} \Big|_{t=0} = 1 \quad (1-7)$$

因为在 $t < 0$ 时, $\delta(t) = 0$, 故可将积分下限的零改为负无穷大 (改变积分限, 不影响积分值), 以便化成标准形式

$$L[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-st} \cdot dt = e^{-st} \Big|_{t=0} = 1 \quad (1-8)$$

同理可得

$$L[\delta(t - \tau)] = e^{-st} \Big|_{t=\tau} = e^{-s\tau} \quad (1-9)$$

由富氏变换的定义得

$$F[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt = e^{-j\omega t} \Big|_{t=0} = 1 \quad (1-10)$$

$$F[\delta(t - \tau)] = e^{-j\omega t} \Big|_{t=\tau} = e^{-j\omega\tau} \quad (1-11)$$

二、采样过程和采样定理

1. 采样过程

将连续时间信号转换成时间离散的脉冲序列的过程称为采样过程。完成信号转换的装置叫做采样器或采样开关。实践中存在着比较重要的几种不同采样型式, 简述如下:

(1) 周期采样: 采样瞬时是等时间间隔的, 即 $t_n = nT$ ($n = 1, 2, \dots$), 又称做普通采样。

(2) 同步采样与非同步采样: 若有多个采样开关, 均按等周期同时开闭, 则称为同步采样; 等周期但不同时开闭, 称为非同步采样。

(3) 多速采样：若各采样开关以不同的周期采样，称为多速采样。

(4) 随机采样：采样瞬时是随机的，即 t_n 为随机变量。

本课程中只讨论周期采样的情况。

下面我们讨论采样过程的数学描述。设有一理想采样开关（即开关闭合时间为零），对连续时间函数 $f(t)$ 进行周期采样，采样周期为 T 。则经过采样后得到离散函数 $f^*(t)$ ，或用一脉冲序列 $f(0), f(T), f(2T), \dots, f(nT), \dots$ 来表示，如图 1-4 所示。理想开关的假设完全是为了满足简化系统分析的需要。实际上，采样开关闭合时，总要有一段停留时间 τ ，然而通常 $\tau \ll T$ ，因此理想开关的假设是可行的。实际采样过程如图 1-5 所示。

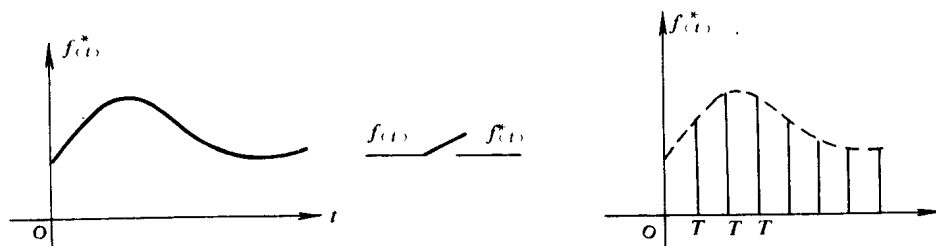


图 1-4 理想采样过程

为了用数学方法描述采样过程，我们很自然地想到具有采样性质的 δ -函数。在前面我们已经给出单位脉冲函数的数学表达式，对于周期采样有

$$\delta(t - nt) = \begin{cases} \infty & (t \neq nt) \\ 0 & (t = nt) \end{cases} \quad n = 0, 1, 2 \quad (1-12)$$

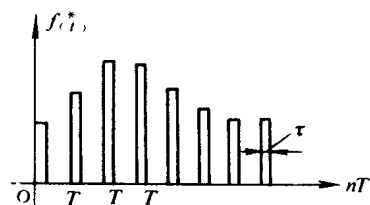


图 1-5 实际采样过程

如果我们用 $p(t)$ 表示一系列的单位脉冲函数，则称 $p(t)$ 为单位脉冲序列，其数学表达式为

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \quad (n \text{ 为整数}) \quad (1-13)$$

而采样信号 $f^*(t)$ 可用下式来描述

$$\begin{aligned} f^*(t) &= p(t) \cdot f(t) = f(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT) \cdot \delta(t - nT) \end{aligned} \quad (1-14)$$

考虑到 $f(t)$ 的单边性, 即当 $t < 0$ 时, $f(t) = 0$ 有

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \cdot \delta(t - nT) \quad (1-15)$$

式 (1-14) 和 (1-15) 表明: 采样信号可以用单位脉冲序列 $p(t)$ 与 $f(t)$ 的乘积描述, 其物理意义可以理解为脉冲调制过程, 这里采样开关起着理想脉冲发生器的作用, 通过它将连续信号 $f(t)$ 调制成脉冲序列 $f^*(t)$ 。

应当指出, 将采样开关当做理想脉冲发生器是近似的, 有条件的, 即采样时间 (或称开关闭合时间) τ 应远远小于采样周期 T 及被控对象的时间常数, 这一条件在实际的离散系统中通常是满足的。

2. 采样定理

在第一章我们已经讨论过, 采样周期 T 的选择是重要的, 若 T 过大会损失信息, 为了从采样的离散信号恢复到原来的连续信号而不至于失真, 在离散系统设计中必须考虑采样周期 T 的选取上限和下限, 显然, T 的下限是无限制的, 因为当 $T \rightarrow 0$ 时, 离散系统实际上转变成连续系统。当然在实际的计算机系统中, T 的下限要受到计算机运算速度的限制。然而更重要的是确定 T 的上限值, 或采样频率 ω_s 的最低值 (下限值), 这里 $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ 。采样定理 (Shannon 定理) 从理论上回答了这个问题。现将采样定理叙述如下:

若对于一个具有有限频谱 ($|\omega| < \omega_{\max}$ 的连续信号 $f(t)$ 进行采样, 当采样频率满足 $\omega_s \geq 2\omega_{\max}$ 时,

则采样信号 $f^*(t)$ 能无失真地恢复到原来的连续信号 $f(t)$ 。这里 $\omega_{\max}$ 是信号 $f(t)$ 有效频谱的最高频率, ω_s 是采样频率。

下面我们对采样定理进行推导并给出简要的证明。

式 (1-13) 给出单位脉冲序列 $p(t)$ 的表达式为

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

其图象如图 1-6 所示, 显然 $p(t)$ 是以 T 为周期函数, 因此可以展开成傅里叶级数, 它的复数形式为

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cdot e^{jk\omega_s t} \quad (1-16)$$

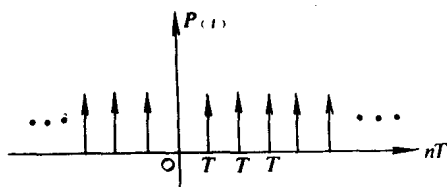


图 1-6 单位脉冲序列

式中 C_k ——傅里叶系数, 它由下式给出

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} p(t) e^{-jk\omega_s t} dt \quad (1-17)$$

对于 $p(t)$ 从 $-T/2$ 到 $T/2$ 的积分, 仅在 $t = 0$ 处有唯一的脉冲分量 $\delta(t)$, 且积分值为 1, 所以

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} p(t) \cdot e^{-jk\omega_s t} \cdot dt = \frac{1}{T} \int_{0-\epsilon}^{0+\epsilon} \delta(t) [e^{-jk\omega_s t}]_{t=0} \cdot dt = \frac{1}{T} \quad (1-18)$$

式中 ϵ —— 零附近的微量, 将式 (1-16)、(1-18) 代入 (1-14) 中有

$$f^*(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-jk\omega_s t},$$

为便于分析令 $n = -k$, 则

$$f^*(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-jn\omega_s t} \quad (1-19)$$

对 (1-19) 式做富氏变换, 设连续函数 $f(t)$ 的傅里叶变换 (频谱函数) 为 $F(j\omega)$, 离散函数 $f^*(t)$ 的傅里叶变换 (频谱函数) 为 $F^*(j\omega)$, 则由富氏变换复位移定理有

$$F^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(j\omega + jn\omega_s) \quad (1-20)$$

式 (1-20) 建立了连续函数频谱 $F(j\omega)$ 和采样函数频谱 $F^*(j\omega)$ 之间的关系, 将 (1-20) 式展开有

$$\begin{aligned} F^*(j\omega) = & \cdots \frac{1}{T} F(j\omega - j2\omega_s) + \frac{1}{T} F(j\omega - j\omega_s) + \frac{1}{T} F(j\omega) + \\ & + \frac{1}{T} F(j\omega + j\omega_s) + \frac{1}{T} F(j\omega + j2\omega_s) + \cdots \end{aligned} \quad (1-21)$$

通常连续函数 $f(t)$ 的频带是有限的, 为一孤立的频谱, 其最高频率为 $\omega_{\max}$, 如图 1-7 (a), 而 $f^*(t)$ 的频谱是离散频谱, 如图 1-7 (b), 其中 $n = 0$ 的量 $\frac{1}{T} F(j\omega)$ 叫**主频谱**, 此外, 除 $n = 0$ 之外, $F^*(j\omega)$ 还包含 $|n| > 0$ 的无限多个附加的高频频谱, 又称为**辅频谱**。由图可见, 根据式 (1-21) 式所绘出的频谱图中 $\frac{1}{T} F(j\omega)$ 项 ($n = 0$) 即为 $f(t)$ 的频谱 $F(j\omega)$, 只是幅值为原来的 $\frac{1}{T}$ 。而高频分量 ($n \neq 0$) 项是由于采样引起的。显然当采样频率 ω_s 不同时, 离散频谱的分布情况也不同。为了不失真的复现采样前的原来信号, 则要求连续信号被采样的离散频谱彼此不重叠, 即采样频率 ω_s 要足够高并且在复现时要有一理想滤波器

抑制全部附加的高频频谱分量，图 1-8 给出几种不同采样频率时的情况。

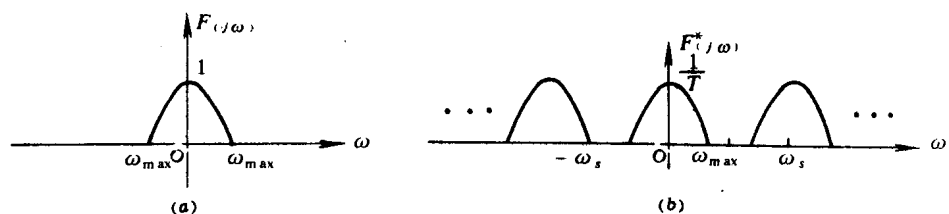
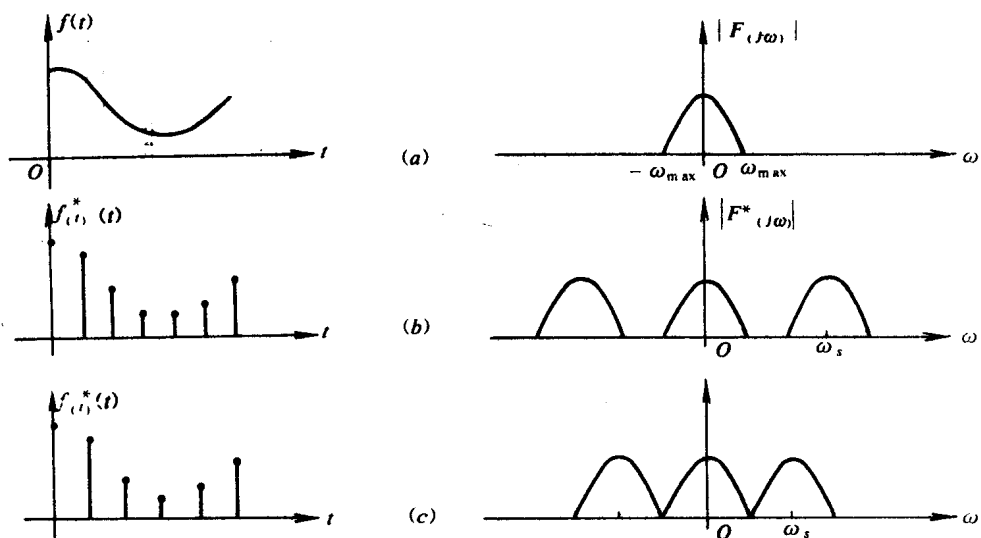


图 1-7 (a) 连续函数的频谱 (b) 离散函数的频谱

图 1-8 (a) 表示 $T = 0$ ，即信号没被采样的情况，(b) 表示 T 较小，采样频率较高，且满足 $\omega_s > 2\omega_{max}$ 时的情况，此时离散频谱互不重叠。(c) 表示当 $\omega_s = 2\omega_{max}$ 时的情况，离散频谱刚好相接，但不重叠，而 (d)、(e) 是当 $\omega_s < 2\omega_{max}$ 的情况，这时采样后的频谱已经变成连续频谱，而且重叠后的谱形与原信号 $F(j\omega)$ 的孤立频谱形状完全不同。由此可见，为了复现原信号的全部信息，要求离散频谱互不重叠，即要求 ω_s 满足下述条件

$$\omega_s \geq 2\omega_{max} \quad (1-22)$$



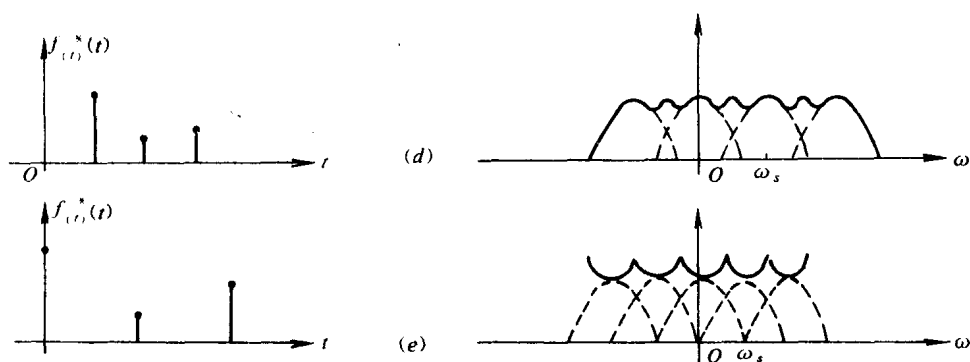


图 1-8 离散频谱的几种情况

这就是著名的香农 (Shannon) 采样定理, 需要说明的是, 采样定理仅给出选择采样频率 ω_s 的下限值 (或采样周期的上限值), 它是选择 ω_s 的必要条件, 但从控制角度考虑, 采样频率也不是越高越好, 因为采样频率太高, 一则增加计算机的负担, 要求计算机的运算速度高, 使计算机成本上升; 另一方面, 过高的采样频率, 会使系统对干扰的敏感程度上升, 因此在实际选取采样周期时还要权衡利弊, 适当处理。

三、保持器

对于模拟—数字混合系统, 实现计算机控制的另一个重要问题是信号的恢复 (或重构), 即把采样信号恢复为被控制对象能够感知的连续信号。从频域上来看, 在满足采样定理 $\omega_s \geq 2\omega_{\max}$ 的条件下, 由于采样信号的主频谱与原连续信号的频谱完全相同, 只是附加了一些高频频谱分量, 因此, 如果有一理想低通滤波器, 其频率特性有如下形式:

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_{\max} \\ 0 & |\omega| > \omega_{\max} \end{cases} \quad (1-23)$$

则可以无失真地将连续信号的频谱提取出来, 即使采样信号恢复为连续信号。图 1-9 给出了信号恢复的原理和理想滤波器的特性。

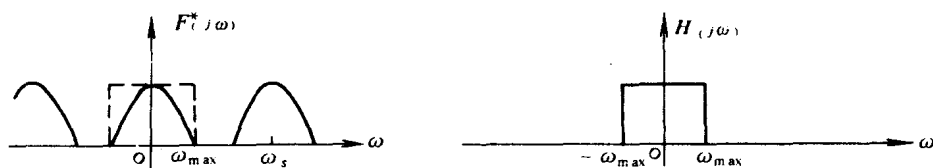


图 1-9 理想滤波器的特性与信号复现

然而, 理想滤波器实际上并不存在, 通常物理上可以实现的是根据现在和过去时刻的