姜国英　黄宣国　编

微分几何一百例

高等教育出版社

(京)112 号

本书是作者们微分几何课多年教学经验之积累所成．内容为分属于四章的一百个例题．这些例题基本覆盖了大学数学系微分几何教材中重要内容，还涉及一些难度较高的著名微分几何定理的证明．

本书叙述细致、由浅入深，具有启发性，可使读者加深对微分几何基本概念的理解，提高解题能力．

本书可供数学专业、应用数学专业的大学生，教师及其他有兴趣的读者参考。

微分几何一百例

姜国英　黄宣国　编

*

高等教育出版社出版

新华书店总店科技发行所发行

商务印书馆上海印刷厂印装

*

开本 850×1168　1/32　印张 6.25　字数 150,000

1992 年 8 月第 1 版　1992 年 8 月第 1 次印刷

印数 00,001—1,599

ISBN 7-04-003964-8/O·1159

定价　2.95 元

前　言

微分几何是现代数学的一个重要分支．编者执教数学系微分几何课程十年，积累了一些微分几何习题．高等教育出版社约复旦大学数学研究所微分几何研究室编一本微分几何习题集，我们在导师胡和生教授的鼓励下，合作编写了这本习题集．

收入这本习题集中的微分几何习题有一百个．同种类型的习题一般只收入一二题．因此，虽然本书只有一百个题目，却基本上覆盖了大学数学系微分几何教材中重要的内容．另外，在本书中，编者也自编了少量习题．对于一些难度较高的著名的微分几何定理，本书也有涉及．

今年是导师苏步青教授九十寿辰，苏先生在微分几何领域辛勤耕耘六十余年，桃李满天下，为我国微分几何一代宗师，我们谨以此书献给苏先生，祝他健康长寿．

由于编者水平有限，书中恐有不妥之处，敬请同行指正．

编　者

一九九一年六月

目　录

第一章　曲线的局部几何性质

§1　曲线的曲率、挠率与 Frenet 标架

Frenet 标架和 Frenet 公式不仅是局部曲线论中最基本的内容，而且是研究曲线性质和解决具体问题的强有力的工具. 因此，熟练掌握已知曲线的 Frenet 标架及其曲率与挠率的计算方法应是学习微分几何的读者必须具备的基本技能. 当空间曲线是用以弧长为参数的向量形式给出时，由定义不难求出它的 Frenet 标架以及曲率和挠率. 当曲线不是以弧长为参数给出时，如能求出弧长，以其作为新参数写出向量表示，那这仍然是前面的情形，不然的话计算就复杂多了. 下面介绍一些曲线不是用弧长作参数给出时的例子，以期读者从中能了解到一些其他的一般处理方法.

例 1　设空间正则挠曲线 C 的向量表示为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，$t$ 是一般参数. 求 C 的 Frenet 标架.

解　将 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 对弧长 s 求导，利用复合函数求导的链式法则，我们有

$$\boldsymbol{T}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{dt}{ds}, \tag{1}$$

再对 s 求导，

$$k\boldsymbol{N}=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2+\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{d^2t}{ds^2}.$$

将上面两式的两端分别作叉积，可以得到

$$k\boldsymbol{B}=\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right)\left(\frac{dt}{ds}\right)^3, \tag{2}$$

从而便有

$$k\boldsymbol{N}=k\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{T}=\left[\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right)\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right]\left(\frac{dt}{ds}\right)^4. \tag{3}$$

注意到
$$\left|\frac{dt}{ds}\right|=\frac{1}{\left|\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|},$$

以及一般参数下曲率 k 的计算公式

$$k(t)=\frac{\left|\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right|}{\left|\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|^3}, \tag{4}$$

由(1)、(2)、(3)便得到要求的 Frenet 标架为

$$\boldsymbol{T}(t)=\operatorname{sign}\left(\frac{dt}{ds}\right)\cdot\frac{\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}}{\left|\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|},$$

$$\boldsymbol{N}(t)=\frac{\left(\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right)\times\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}}{\left|\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right|\cdot\left|\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|},$$

$$\boldsymbol{B}(t)=\operatorname{sign}\left(\frac{dt}{ds}\right)\frac{\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}}{\left|\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right|}.$$

解毕.

然而当曲线 C 的具体方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 已知时，尽管 t 不是弧长参数，有时并不一定要直接代例 1 中得到的公式去求它的 Frenet 标架，那样太烦，通常的做法是边计算，边利用有关的几何性质进行化简、推理，比如，我们来看下面的例题.

例 2 已知曲线 C: $\boldsymbol{r}(t)=(4a\cos^3 t,\ 4a\sin^3 t,\ 3b\cos 2t)$, $0<t<\frac{\pi}{2}$, a 和 b 是正常数. 求 C 的曲率 k、挠率 τ 及 Frenet 标架.

解 一般总假定参数 t 增加的方向为曲线的正向，从而

$$\frac{ds}{dt}>0.$$

将 C 的向量表示关于弧长 s 求导，我们有

$$\boldsymbol{T}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{dt}{ds}$$

$$=(-12a\cos^2 t\sin t,\ 12a\sin^2 t\cos t,\ -6b\sin 2t)\cdot\frac{dt}{ds}$$

$$=6\sin 2t(-a\cos t,\ a\sin t,\ \ -b)\cdot\frac{dt}{ds}.$$

利用$|\boldsymbol{T}|=1$,得到

$$\frac{dt}{ds}=\frac{1}{6\sin 2t\sqrt{a^2+b^2}},\tag{1}$$

从而

$$\boldsymbol{T}(t)=\frac{(-a\cos t,\ a\sin t,\ -b)}{\sqrt{a^2+b^2}}.\tag{2}$$

将上式对弧长 s 求导, 利用 Frenet 公式和已得的(1)式便有

$$k\boldsymbol{N}=\frac{(a\sin t,\ a\cos t,\ 0)}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{dt}{ds}$$

$$=\frac{a}{6(a^2+b^2)\sin 2t}(\sin t,\ \cos t,\ 0).$$

由此可得 $\quad k(t)=|k(t)\boldsymbol{N}(t)|=\dfrac{a}{6(a^2+b^2)\sin 2t}$,

且有

$$\boldsymbol{N}(t)=(\sin t,\ \cos t,\ 0).\tag{3}$$

因此,

$$\boldsymbol{B}(t)=\boldsymbol{T}(t)\times\boldsymbol{N}(t)=\frac{(b\cos t,\ -b\sin t,\ -a)}{\sqrt{a^2+b^2}}.\tag{4}$$

将上式再关于弧长 s 求导,并利用(1),我们有

$$-\tau\boldsymbol{N}=\frac{(-b\sin t,\ -b\cos t,\ 0)}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{dt}{ds}$$

$$=-\frac{b}{6(a^2+b^2)\sin 2t}(\sin t,\ \cos t,\ 0).$$

注意到(3),比较上式左右两端,即得

$$\tau(t)=\frac{b}{6(a^2+b^2)\sin 2t}.$$

解毕.

在实际问题中,有不少曲线是以两个曲面交线的形式给出的,

这时其曲率与挠率的计算方法可参考下面的例题.

例 3 设曲线 C 是如下两个二次曲面

$$\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2=1, \quad \lambda x^2+\mu y^2+\nu z^2=1$$

的交线. 求曲线 C 的曲率 k 与挠率 τ.

解 为方便起见,如果记

$$F(x, y, z)=\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2-1,$$

$$G(x, y, z)=\lambda x^2+\mu y^2+\nu z^2-1,$$

则沿两曲面的交线 C,下列的积向量

$$\nabla F\times\nabla G=4((\beta\nu-\gamma\mu)yz, (\gamma\lambda-\alpha\nu)zx, (\alpha\mu-\beta\lambda)xy)$$

就应与 C 的切方向平行. 因此,若记常数

$$a=\beta\nu-\gamma\mu, \quad b=\gamma\lambda-\alpha\nu, \quad c=\alpha\mu-\beta\lambda,$$

便可设 C 的单位切向量 $\boldsymbol{T}=(x', y', z')$ 满足

$$e\boldsymbol{T}=\frac{1}{xyz}(ayz, bzx, cxy)$$

$$=\left(\frac{a}{x}, \frac{b}{y}, \frac{c}{z}\right), \tag{1}$$

式中的 e 满足

$$e^2=\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}+\frac{c^2}{z^2}.$$

将(1)式的两边关于弧长 s 求导,注意到 $\boldsymbol{T}$ 的定义,可得

$$e'\boldsymbol{T}+ek\boldsymbol{N}=\left(-\frac{a}{x^2}\cdot x', -\frac{b}{y^2}\cdot y', -\frac{c}{z^2}\cdot z'\right)$$

$$=-\frac{1}{e}\left(\frac{a^2}{x^3}, \frac{b^2}{y^3}, \frac{c^2}{z^3}\right). \tag{2}$$

如果将(1)、(2)的两端分别作外积,我们有

$$e^3k\boldsymbol{B}=-\left(\frac{bc^2}{yz^3}-\frac{b^2c}{y^3z}, \frac{ca^2}{zx^3}-\frac{c^2a}{z^3x}, \frac{ab^2}{xy^3}-\frac{a^2b}{x^3y}\right). \tag{3}$$

注意到 C 同时在两个二次曲面上,于是

$$\frac{bc^2}{yz^3}-\frac{b^2c}{y^3z}=\frac{bc}{y^3z^3}(cy^2-bz^2)$$

$$=\frac{bc}{y^3z^3}[(\alpha\mu-\beta\lambda)y^2-(\gamma\lambda-\alpha\nu)z^2]$$

$$=\frac{bc}{y^3z^3}[\alpha(\mu y^2+\nu z^2)-\lambda(\beta y^2+\gamma z^2)]$$

$$=\frac{bc}{y^3z^3}[\alpha(1-\lambda x^2)-\lambda(1-\alpha x^2)]$$

$$=\frac{bc}{y^3z^3}(\alpha-\lambda),$$

类似地可以得到

$$\frac{ca^2}{zx^3}-\frac{c^2a}{z^3x}=\frac{ca}{z^3x^3}(\beta-\mu),$$

$$\frac{ab^2}{xy^3}-\frac{a^2b}{x^3y}=\frac{ab}{x^3y^3}(\gamma-\nu).$$

因而(3)式便化为

$$-e^3k\boldsymbol{B}=\frac{abc}{x^3y^3z^3}\left(\frac{\alpha-\lambda}{a}x^3,\ \frac{\beta-\mu}{b}y^3,\ \frac{\gamma-\nu}{c}z^3\right).$$

为便于计算，我们把上式再改写为

$$-e^3k\,\frac{x^3y^3z^3}{abc}\boldsymbol{B}=\left(\frac{\alpha-\lambda}{a}x^3,\ \frac{\beta-\mu}{b}y^3,\ \frac{\gamma-\nu}{c}z^3\right).\tag{4}$$

将(4)的两边对弧长 s 求导，并利用(1)，我们有

$$-\left(e^3k\,\frac{x^3y^3z^3}{abc}\right)'\boldsymbol{B}+\tau e^3k\,\frac{x^3y^3z^3}{abc}\boldsymbol{N}$$

$$=3\left(\frac{\alpha-\lambda}{a}x^2x',\ \frac{\beta-\mu}{b}y^2y',\ \frac{\gamma-\nu}{c}z^2z'\right)$$

$$=\frac{3}{e}((\alpha-\lambda)x,\ (\beta-\mu)y,\ (\gamma-\nu)z).\tag{5}$$

现在已能求出所要的曲率 k 与挠率 τ. 利用(4)，注意到 e^2 的表达式，我们得到

$$k=\frac{\left|\frac{abc}{x^3y^3z^3}\right|\left[\left(\frac{\alpha-\lambda}{a}\right)^2x^6+\left(\frac{\beta-\mu}{b}\right)^2y^6+\left(\frac{\gamma-\nu}{c}\right)^2z^6\right]^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}+\frac{c^2}{z^2}\right)^{\frac{3}{2}}}.\tag{6}$$

至于挠率 τ, 如将(2)、(5)的两端分别作内积, 我们有

$$\tau e^4 k^2 \frac{x^3y^3z^3}{abc}=-\frac{3}{e^2}\left(\frac{a^2(\alpha-\lambda)}{x^2}+\frac{b^2(\beta-\mu)}{y^2}+\frac{c^2(\gamma-\nu)}{z^2}\right),$$

因此,

$$\tau=-3\cdot\frac{x^3y^3z^3}{abc}\cdot\frac{\dfrac{a^2(\alpha-\lambda)}{x^2}+\dfrac{b^2(\beta-\mu)}{y^2}+\dfrac{c^2(\gamma-\nu)}{z^2}}{\left(\dfrac{\alpha-\lambda}{a}\right)^2x^6+\left(\dfrac{\beta-\mu}{b}\right)^2y^6+\left(\dfrac{\gamma-\nu}{c}\right)^2z^6}. \tag{7}$$

自然, (6)、(7)中的 x、y、z 应是交线 C 上所论点的坐标.

顺便提一句, 这时利用(1)、(4)和 $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{T}$ 已不难写出交线 C 的 Freent 标架, 这里就不赘述了. 解毕.

例 4 设 C 是空间正则挠曲线, 试求它从法线的球面标线的曲率和挠率.

解 如果设 C: $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$, s 为弧长, 则其从法线的球面标线 C_1 就有表示 $\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{B}(s)$, 这里的 s 是 C_1 的参数. 将 C_1 的向量表示对其弧长 s_1 求导, 我们有

$$\boldsymbol{T}_1=-\tau\boldsymbol{N}\frac{ds}{ds_1}.$$

因此得到

$$\left|\frac{ds_1}{ds}\right|=|\tau|,\quad \boldsymbol{T}_1=\varepsilon\boldsymbol{N}\quad(\varepsilon=\pm1).$$

将所得的第二式再对 s_1 求导,

$$k_1\boldsymbol{N}_1=\varepsilon(-k\boldsymbol{T}+\tau\boldsymbol{B})\frac{ds}{ds_1}.$$

于是

$$k_1^2=\frac{k^2+\tau^2}{\tau^2}. \tag{1}$$

由于 C_1 落在单位球面上, 如果 C_1 的挠率 $\tau_1=0$, 则 C_1就是圆

弧，这时 $k_1=\text{const}$，利用(1)即知，原来的曲线 C 便是一般螺线．因而若 C 不是一般螺线，则其从法线的球面标线 C_1 的曲率 k_1 与挠率 τ_1 均不为零，于是作为球面曲线的 C_1 就有如下的分解式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_1&=-\rho_1\boldsymbol{N}_1-\frac{d\rho_1}{ds_1}\cdot\sigma_1\boldsymbol{B}_1\\&=-\frac{1}{k_1}\boldsymbol{N}_1-\frac{d}{ds_1}\left(\frac{1}{k_1}\right)\cdot\frac{1}{\tau_1}\boldsymbol{B}_1.\end{aligned}$$

因此，

$$\left(\frac{1}{k_1}\right)^2+\left[\frac{d}{ds_1}\left(\frac{1}{k_1}\right)\cdot\frac{1}{\tau_1}\right]^2=1,$$

由此解得

$$\tau_1^2=\frac{\left(\dfrac{dk_1}{ds_1}\right)^2}{k_1^2(k_1^2-1)}. \tag{2}$$

但从(1)式可以推得

$$k_1\frac{dk_1}{ds_1}\frac{ds_1}{ds}=\left(\frac{k}{\tau}\right)\left(\frac{k}{\tau}\right)',$$

从而

$$\left(k_1\frac{dk_1}{ds_1}\right)^2=\left(\frac{k}{\tau}\cdot\frac{k'\tau-k\tau'}{\tau^2}\right)^2\cdot\frac{1}{\tau^2}=\frac{k^2}{\tau^8}(k'\tau-k\tau')^2.$$

因此(2)式化为

$$\tau_1^2=\frac{\left(k_1\dfrac{dk_1}{ds_1}\right)^2}{k_1^4(k_1^2-1)}=\left[\frac{k'\tau-k\tau'}{\tau(k^2+\tau^2)}\right]^2. \tag{3}$$

于是，根据(1)、(3)即得所求的曲率与挠率分别为

$$k_1=\frac{\sqrt{k^2+\tau^2}}{|\tau|},\quad \tau_1=\pm\left|\frac{k'\tau-k\tau'}{\tau(k^2+\tau^2)}\right|.\qquad \text{解毕.}$$

注 (2)式揭示了单位球面上曲线的曲率与挠率之间的一个联系．对于曲线切线的球面标线与主法线的球面标线，也可用与本题类似的方法求出它们的曲率与挠率．

§ 2 Frenet 公式的应用

在局部曲线论中，有一大类习题是属于应用 Frenet 公式的常规练习. 它们的共同点是先将所给的几何条件表达成解析式子，再利用 Frenet 公式对所归结的式子进行一定次数的微积分运算(主要是微分)，同时进行适当的处理，然后分析得到的各个结果，逐一找出它们的几何内涵，引出所要的结论. 下面举例说明之.

例 5 设空间正则挠曲线 C 非一般螺线. 证明: C 的主法向量与一固定方向成定角的充分必要条件是 C 的曲率 k 与挠率 τ 满足等式

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{k^2+\tau^2}{k\frac{d}{ds}\left(\frac{\tau}{k}\right)}\right)+\tau=0. \tag{1}$$

证明 先证必要性. 设 $\boldsymbol{e}$ 为所述的固定单位方向，则

$$\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{N}=\cos\theta=\mathrm{const}. \tag{2}$$

上式两端对弧长 s 求导，有

$$\boldsymbol{e}\cdot(-k\boldsymbol{T}+\tau\boldsymbol{B})=0,$$

或改写为

$$\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{T}=\frac{\tau}{k}\,\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{B}. \tag{3}$$

将(3)式两端继续对 s 求导,

$$k\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{N}=\frac{d}{ds}\left(\frac{\tau}{k}\right)\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{B}-\frac{\tau^2}{k}\,\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{N}.$$

利用(2)整理上式，并注意到 C 非一般螺线，即

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\tau}{k}\right)\neq 0,$$

可以得到

$$\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{B}=\frac{k^2+\tau^2}{k\frac{d}{ds}\left(\frac{\tau}{k}\right)}\cos\theta. \tag{4}$$

将上式再对 s 求导,

$$-\tau\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{N}=\frac{d}{ds}\left(\frac{k^2+\tau^2}{k\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{\tau}{k}\right)}\right)\cos\theta. \tag{5}$$

由于现在 $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{N}=\cos\theta\neq0$, 不然的话, 对 $(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{T})'=k\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{N}=0$ 积分会得到 $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{T}=\text{const}$, 即 C 为一般螺线的矛盾结论, 所以可从(5)式中约去因子 $\cos\theta$, 这样便得到要证的结果.

接下来证明条件的充分性. 受必要性证明中(2)、(3)、(4)式的启发, 我们先令

$$\boldsymbol{e}=\frac{\tau}{k}\left(\frac{k^2+\tau^2}{k\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{\tau}{k}\right)}\right)\cos\theta\boldsymbol{T}+\cos\theta\boldsymbol{N}+\frac{k^2+\tau^2}{k\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{\tau}{k}\right)}\cos\theta\boldsymbol{B},$$

式中的 $\cos\theta$ 是绝对值不大于 1 的非零常数, 确切的数值以后决定. 这时由于(1)式成立, 利用 Frenet 公式可得

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}\left(\frac{\boldsymbol{e}}{\cos\theta}\right)\\
&=\left[\frac{k^2+\tau^2}{k}+\frac{\tau}{k}\frac{d}{ds}\left(\frac{k^2+\tau^2}{k\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{\tau}{k}\right)}\right)\right]\boldsymbol{T}\\
&\quad+\frac{\tau}{k}\left(\frac{k^2+\tau^2}{k\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{\tau}{k}\right)}\right)k\boldsymbol{N}-k\boldsymbol{T}+\tau\boldsymbol{B}\\
&\quad+\frac{d}{ds}\left(\frac{k^2+\tau^2}{k\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{\tau}{k}\right)}\right)\boldsymbol{B}-\frac{k^2+\tau^2}{k\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{\tau}{k}\right)}\cdot\tau\boldsymbol{N}\\
&=\boldsymbol{0},
\end{aligned}$$

即 $\dfrac{\boldsymbol{e}}{\cos\theta}$ 为常向量, 且显然有非零的常值模, 因此 $\cos\theta$ 只要取成是它的单位化因子即可. 这时, C 的主法向量 $\boldsymbol{N}$ 与固定的单位方向 $\boldsymbol{e}$ 就交定角. 证毕.

注 如所知, 切向量与一固定方向成定角的曲线是一般螺线,

类似可证：曲线的从法向量与一固定方向成定角的充要条件仍是此曲线为一般螺线.

例 6 设 C 是空间正则挠曲线，曲率 $k\neq$ 常数，Γ 是 C 的密切圆圆心轨迹. 证明：Γ 在每一点的法平面恰好平分对应的 C 的密切球在对应点的半径.

证明 如设 C 的向量表示为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，$s$ 为弧长，则对应的密切圆圆心轨迹 Γ 有表示

$$\Gamma: \boldsymbol{m}_C=\boldsymbol{r}(s)+\rho(s)\boldsymbol{N}(s),$$

这里的 $\rho(s)=\dfrac{1}{k(s)}$ 是 C 的曲率半径. 由于 Γ 的切方向

$$\frac{d\boldsymbol{m}_C}{ds}=\boldsymbol{T}+\rho'\boldsymbol{N}+\rho(-k\boldsymbol{T}+\tau\boldsymbol{B})=\rho'\boldsymbol{N}+\rho\tau\boldsymbol{B},$$

所以 Γ 在每一点 $\boldsymbol{m}_C(s)$ 的法平面 π 的方程就是

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{m}_C(s))\cdot(\rho'(s)\boldsymbol{N}(s)+\rho(s)\tau(s)\boldsymbol{B}(s))=0, \qquad (1)$$

式中的 $\boldsymbol{R}$ 是 π 上动点的向量表示.

而曲线 C 在对应点的密切球球心应是

$$\boldsymbol{m}_S(s)=\boldsymbol{r}(s)+\rho(s)\boldsymbol{N}(s)+\rho'(s)\sigma(s)\boldsymbol{B}(s),$$

其中的 $\sigma(s)=\dfrac{1}{\tau(s)}$ 是 C 的挠率半径. 于是此密切球在 C 的对应点 $\boldsymbol{r}(s)$ 的半径中点便有表示

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}(s)+\boldsymbol{m}_S(s))=\boldsymbol{r}(s)+\frac{1}{2}(\rho(s)\boldsymbol{N}(s)+\rho'(s)\sigma(s)\boldsymbol{B}(s)).$$

若以 $\boldsymbol{R}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{r}(s)+\boldsymbol{m}_S(s))$ 代入平面 π 方程(1)的左端，我们有

$$\frac{1}{2}(\rho'\sigma\boldsymbol{B}-\rho\boldsymbol{N})(\rho'\boldsymbol{N}+\rho\tau\boldsymbol{B})=\frac{1}{2}(\rho'\rho-\rho\rho')=0,$$

因此所论半径的中点确实在平面 π 上. 另外，从 C 的曲率 $k(s)\neq$ 常数知，$\boldsymbol{r}(s)$（或 $\boldsymbol{m}_S(s)$）不落在此平面 π 上，从而这条半径 $\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{m}_S(s)$ 与 π 也就只交于一点，即它的中点. 证毕.

例 7 已知平面曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$. 假设按从 B 到 A 的方向，该曲线弧的曲率半径是单调减少的，试证明：点 A 的密切圆必定全部包含在点 B 的密切圆内.

证明 取直角坐标系如图所示：原点 O 为点 B 所对应的曲率中心，$\overrightarrow{OB}$ 为 x 轴的正方向. $\forall C\in\overset{\frown}{AB}$，设 C 点的曲率中心为 O_1，那么只要能够证明

$$\overline{OO_1}+\overline{O_1C}\leqslant\overline{OB},$$

我们就有 C 点的密切圆全部包含在 B 点的密切圆中的结论，这是因为 C 点密切圆上任何一点到 O 的距离不超过 $\overline{OO_1}+\overline{O_1C}$ 之故.

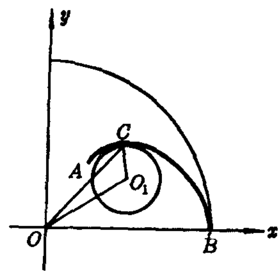

图 1

将 $\overset{\frown}{AB}$ 的正定向规定为由 B 到 A 的方向，取弧长 s 为参数，并令 $s=0$ 对应于 B 点，C 点对应的参数为 s，则对于 $\overset{\frown}{AB}$ 的向量表示 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，利用平面曲线的 Frenet 公式我们有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{r}(0)&=\int_0^s\boldsymbol{r}'(s)ds=\int_0^s\boldsymbol{T}(s)ds\\&=-\int_0^s\rho(s)\boldsymbol{N}'(s)ds\\&=-\rho(s)\boldsymbol{N}(s)\Big|_0^s+\int_0^s\rho'(s)\boldsymbol{N}(s)ds.\end{aligned}$$

从而

$$\boldsymbol{r}(s)+\rho(s)\boldsymbol{N}(s)=\boldsymbol{r}(0)+\rho(0)\boldsymbol{N}(0)+\int_0^s\rho'(s)\boldsymbol{N}(s)ds,$$

这就是

$$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CO_1}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BO}+\int_0^s\rho'(s)\boldsymbol{N}(s)ds.$$

注意到曲率半径单调减少，即 $\rho'(s)\leqslant0$，由上式得到

$$\overline{OO_1} = |\overrightarrow{OO_1}| = |\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CO_1}| = \left|\int_0^s \rho'(s)\boldsymbol{N}(s)ds\right|$$

$$\leqslant \int_0^s |\rho'(s)|ds = -\int_0^s \rho'(s)ds = \rho(0) - \rho(s),$$

或改写成

$$\overline{OO_1} + \rho(s) \leqslant \rho(0),$$

这正是要证的 $\overline{OO_1} + \overline{O_1C} \leqslant \overline{OB}$. 证毕.

例 8 设 C: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ 是球面 S^2 上的正则闭曲线，这里的 s 是弧长. 如果 $k(s)$、$\tau(s)$ 分别为 C 的曲率、挠率，则成立

$$\int_C \frac{\tau(s)}{k(s)} ds = 0.$$

证明 不妨设 S^2 的球心为原点，半径为 R，并设 C 的周长为 L，于是

$$\boldsymbol{r}(s) \cdot \boldsymbol{r}(s) = R^2.$$

将上式对弧长 s 求两次导数，利用 Frenet 公式便得

$$1 + k(s)\boldsymbol{r}(s) \cdot \boldsymbol{N}(s) = 0.$$

因此 C 的曲率 $k(s) \neq 0$，我们把上式改写成

$$\frac{\tau(s)}{k(s)} = -\tau(s)\boldsymbol{r}(s) \cdot \boldsymbol{N}(s) = \boldsymbol{r}(s) \cdot \boldsymbol{B}'(s),$$

于是

$$\begin{aligned}\int_C \frac{\tau(s)}{k(s)} ds &= \int_0^L \boldsymbol{r}(s) \cdot \boldsymbol{B}'(s)ds \\ &= \boldsymbol{r}(s)\boldsymbol{B}(s)\Big|_0^L - \int_0^L \boldsymbol{B}(s) \cdot \boldsymbol{T}(s)ds \\ &= \boldsymbol{r}(L)\boldsymbol{B}(L) - \boldsymbol{r}(0)\boldsymbol{B}(0) = 0,\end{aligned}$$

最后的等式是因为 C 是闭曲线的缘故. 证毕.

§ 3 两条曲线间的对应

局部曲线论中常见的另一类习题是关于两条曲线之间可建立