高等数学

试题精选与解答

蔡高厅 邱忠文 李君湘 编

10

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

高等数学试题精选与解答

蔡高厅　邱忠文　李君湘　编

天津大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学试题精选与解答/蔡高厅,邱忠文,李君湘编.—天津:天津大学出版社,2002.7

ISBN 7-5618-1624-3

Ⅰ.高…　Ⅱ.①蔡…　②邱…　③李…　Ⅲ.高等数学-高等学校-试题　Ⅳ.013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第049074号

出版发行　天津大学出版社
出 版 人　杨风和
地　　址　天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
网　　址　www.tdcbs.com
电　　话　营销部:022-27403647　邮购部:022-27402742
印　　刷　河北省昌黎县第一印刷厂
经　　销　全国各地新华书店
开　　本　148mm×210mm
印　　张　11.25
字　　数　324千
版　　次　2002年7月第1版
印　　次　2002年7月第1次
印　　数　1—4 000
定　　价　16.00元

前　言

“高等数学”是高等学校理工科类学生的一门重要的基础理论课.为了适应理工科本科学生对“高等数学”课程的学习需要,我们编写了《高等数学试题精选与解答》作为“高等数学”课程的教学参考书.

本书精选自天津大学1983年级至2001年级的“高等数学(全校统考)期末考试题”及1990年级至2001年级的“高等数学(全校统考)期中考试题”,其计1038道,其中:判断题36道;填空题186道;选择题182道;解答题580道;证明题54道.所有试题都给出解题过程(如果有)和答案.

天津大学的历届(全校统考)“高等数学”试题,内容充实、形式多样,对“高等数学”课程中的基本概念、基本理论和基本方法都有充分的体现,能较好地完成检验学生对高等数学知识掌握程度的使命.

希望本书的出版能帮助读者,尤其是理工科类的读者用不太长的时间,对学过的“高等数学”课程起到复习、巩固和提高的作用.同时供理工类院校的“高等数学”任课教师参考.

为了便于读者使用,我们不是简单地将试题一份一份地编排,而是将试题精选并按内容分类进行编排,以利于读者按教学内容进行同步复习。在试题序号前的左上角标有△记号者,表示该题曾多次在考试中出现。另外,在每一道试题后面的括号内的百分数表明本题在当次考试中所占的百分比(一般每次考试的满分为100分),由此可以看出该题在当次考试中的分量。由于不同的年份,对不同的内容强调重点不同,在

正常情况下，除客观题外，年份靠前的试题，往往分值高一点，这实际上说明了高等数学的教学质量在逐年提高。一般地讲，客观题每题的正常分值为3%～4%，解答题每题的正常分值为5%～7%。

本书由长期担任“高等数学”教学工作的蔡高厅、邱忠文、李君湘编写．其中蔡高厅教授、邱忠文教授从1984年至2001年先、后一直担任天津大学高等数学教研室主任．本书的资料由邱忠文提供．

限于水平，书中如有疏误之处，恳请读者指正．

编者

2001年10月于天津大学

目　录

第 1 章　函数 …………………………………………………… (1)
第 2 章　极限 …………………………………………………… (5)
第 3 章　导数与微分 …………………………………………… (23)
第 4 章　微分中值定理及导数的应用 ………………………… (59)
第 5 章　不定积分 ……………………………………………… (127)
第 6 章　定积分 ………………………………………………… (137)
第 7 章　空间解析几何与矢量代数 …………………………… (172)
第 8 章　多元函数微分学 ……………………………………… (181)
第 9 章　重积分 ………………………………………………… (222)
第 10 章　曲线积分与曲面积分 ……………………………… (251)
第 11 章　级数 ………………………………………………… (297)
第 12 章　微分方程 …………………………………………… (332)

第1章　函　　数

一、填空题

1. 设函数 $f(x)=e^{x}$，为了使 $f[\varphi(x)]=1+x^2$，则 $\varphi(x)=$ $\underline{\ln(1+x^2)}$. (2%)

2. 若 $f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ e^{x}, & x>0.\end{cases}$

则 $f(x-1)=\underline{\begin{cases}0, & x\leqslant 1,\\ e^{x-1}, & x>1.\end{cases}}$ (3%)

3. $f(x)=\arcsin(2x-1)$ 的定义域是 $\underline{[0,1]}$. (3%)

4. $f(x)=\sqrt{\dfrac{3-x}{x+2}}$ 的定义域是 $\underline{(-2,3]}$. (3%)

5. 设 $f(x)$ 的定义域是 $[1,2]$，则 $f\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$ 的定义域是 $\underline{\left[-\dfrac{1}{2},0\right]}$.

(4%)

6. 函数 $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$ 的定义域 $D_f=\underline{[-4,-\pi]\cup[0,\pi]}$.

(4%)

7. 设 $\varphi(x)=\ln x$，$f(x)=\arcsin x$，则 $\varphi[f(x)]$ 的定义域为 $\underline{(0,1]}$.

(4%)

二、选择题

1. 设 $f(x)=\dfrac{\sin(x+1)}{1+x^2}$，$-\infty<x<+\infty$，则此函数是

(A) 有界函数；　(B) 奇函数；　(C) 偶函数；　(D) 周期函数.

答(A)(3%)

2. 函数 $y=\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$，$(-1<x<1)$ 为

(A) 奇函数；　(B) 偶函数；

(C) 非奇非偶函数；　(D) 周期函数.

答(B)(4%)

3. 设 $\varphi(x)$与 $f(x)$互为反函数,则 $f\left(\frac{1}{2}x\right)$的反函数为

(A) $\varphi(2x)$;　　(B) $f(2x)$;　　(C) $2f(x)$;　　(D) $2\varphi(x)$.

答(D)(4%)

4. 设函数 $f(x)=xe^{\sin x}\tan x$,则 $f(x)$是

(A) 偶函数;　　(B) 周期函数;　(C) 单调函数;　(D) 无界函数.

答(D)(4%)

5. 设函数 $f(x)$在(a,b)内连续,则在(a,b)内

(A) $f(x)$必有界;

(B) $f(x)$必存在单值反函数 $f^{-1}(x)$;

(C) $f(x)$必存在原函数;

(D) 必存在一点 $\xi\in(a,b)$,使 $f(\xi)=0$.

答(C)(2%)

三、解答题

1. 已知 $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=1+\cos x$,求 $f\left(\cos\frac{x}{2}\right)$.　　(5%)

解　$f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$

$$=2\left(1-\sin^2\frac{x}{2}\right).$$

令 $\sin\frac{x}{2}=u$,则 $f(u)=2(1-u^2)$.

$$f\left(\cos\frac{x}{2}\right)=2\left(1-\cos^2\frac{x}{2}\right)=2\sin^2\frac{x}{2}$$

$$=1-\cos x.$$

2. 判定 $f(x)=(2+\sqrt{3})^x+(2-\sqrt{3})^x$ 的奇偶性.　　(6%)

解　因为

$$f(-x)=(2+\sqrt{3})^{-x}+(2-\sqrt{3})^{-x}$$

$$=(2-\sqrt{3})^x+(2+\sqrt{3})^x=f(x).$$

根据偶函数的定义,可知 $f(x)$是偶函数.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2-x-1, & x\leqslant 1,\\ 2x-x^2, & x>1.\end{cases}$ 求 $f(1+a)-f(1-a)$，其中 $a>0$. (6%)

解 因为 $a>0$，故 $1+a>1$，$1-a<1$，所以

$$\begin{aligned}&f(1+a)-f(1-a)\\ &=[2(1+a)-(1+a)^2]-[(1-a)^2-(1-a)-1]\\ &=-2a^2+a+2.\end{aligned}$$

4. 设 $f(x)=ax^2+bx+c$，若 a,b,c 都是给定的常数，试计算 $f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)$ 之值. (7%)

解

$$\begin{aligned}&f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)\\ &=a[(x+3)^2-3(x+2)^2+3(x+1)^2-x^2]+b[(x+3)-3\\ &\quad(x+2)+3(x+1)-x]+c[1-3+3-1]\\ &=a[(x+3)^2-x^2+3(x+1)^2-3(x+2)^2]+b[(x+3)-x\\ &\quad+3(x+1)-3(x+2)]\\ &=a(6x+9-6x-9)+b(3-3)=0.\end{aligned}$$

5. 一列火车在运行时，每小时的费用由两部分组成，一部分是固定费用 a，另一部分是与火车的平均速度 x 的立方成正比(比例系数为 k)，常用 y 表示火车连续运行路程 S 所需的总费用，试将 y 表示为 x 的函数. (6%)

解 设火车连续运行路程 S 所需时间为 $t=\dfrac{S}{x}$. 则

$$y=at+kx^3t=S\left(\frac{a}{x}+kx^2\right).$$

四、证明题

1. 设函数 $f(x)$ 对一切实数 x,y 适合

$$f(x+y)=f(x)f(y),$$

$f(0)\neq 0$，$f(1)=a(a>0)$，证明：对一切自然数 n，有 $f(n)=a^n$.

(5%)

证明 用数学归纳法证明.

当 $n=1$ 时，$f(1)=a=a^1$，命题成立.

假设当 $n=k$(k 为某一自然数),有 $f(k)=a^k$ 成立.则当 $n=k+1$ 时,有

$$f(k+1)=f(k)f(1)=a^k\cdot a=a^{k+1},$$

根据数学归纳法原理,已证明对一切自然数 n 有

$$f(n)=a^n.$$

第2章　极　　限

一、判断题

1. 若数列$\{x_n\}$有界，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.　　(2%)

答(错)

2. 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$存在，则数列$\{x_n\}$必有界.　　(2%)

答(正确)

3. $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}=0$.　　(2%)

答(错)

4. $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}\sin x=0$.　　(2%)

答(正确)

5. 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$，则必有$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=0$.　　(1%)

答(错)

二、填空题

1. 用“ε-δ”语言叙述$\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=A$的定义：(略).　　(2%)

2. 设当$x\to x_0$时，$\alpha(x)$，$\beta(x)$，$\gamma(x)$均为无穷小，且$\alpha(x)=o(\beta(x))$，$\beta(x)\sim\gamma(x)$，则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)+\beta(x)}{\gamma(x)}=$ __1__.　　(2%)

3. 已知极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{f(2x)}=2$，则极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(4x)}{x}=$ __1__.　　(2%)

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+3x)}{x}=$ __3__.　　(3%)

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{3n}$的值等于 __$e^3$__.　　(4%)

6. 极限$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{5x-1}-\sqrt{2x+5}}{x^2-4}=$ __$\dfrac{1}{8}$__.　　(3%)

7. 极限$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x^2-x-6}$的值等于 __$\dfrac{4}{5}$__.　　(3%)

8. 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x}{e^{x}-e^{-x}}=$ __0__. (3%)

9. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x^2+2)^3}{(2x^3+3)^2}=$ __$\dfrac{27}{4}$__ (4%)

10. 当 $x>0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x})=$ __$\ln x$__. (4%)

11. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=$ __1__. (4%)

12. 若函数 $f(x)=\dfrac{2^x-a}{x(x-1)}$ 有无穷型间断点 $x=0$ 及可去间断点 $x=1$，则 $a=$ __2__. (4%)

13. 若 $f(x)=\dfrac{e^x-a}{x(x-1)}$ 有无穷型间断点 $x=0$ 及可去间断点 $x=1$，则常数 $a=$ __e__. (4%)

三、选择题

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x=$

(A) e;　　(B) e^{-1};　　(C) e^2;　　(D) $e^{\frac{1}{2}}$.

答(C) (2%)

2. 设函数 $f(x)$、$g(x)$ 满足：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，在 x_0 的某一邻域内 $|g(x)|\geqslant M$（M 为一正常数），则当 $x\to x_0$ 时，

(A) 必有 $f(x)g(x)\to A$（A 为一非零常数）;

(B) 必有 $f(x)g(x)\to\infty$;

(C) $f(x)g(x)$ 的极限一定不存在，但 $f(x)g(x)$ 也一定不是无穷大量;

(D) 必有 $f(x)g(x)\to0$.

答(B) (2%)

3. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 点的某个邻域内有定义，则 $f(x)$ 在 x_0 点处连续的充分必要条件是

(A) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在;

(B) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$;

(C) $f(x_0+0)=f(x_0-0)$;

(D) 在 x_0 的某个邻域内，$f(x)=f(x_0)+\alpha(x)$，其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

答(D)(2%)

4. 当 $x\to 0$ 时，$\frac{2}{3}(\cos x-\cos 2x)$ 是 x^2 的

(A) 高阶无穷小；

(B) 同阶无穷小，但不是等价无穷小；

(C) 低阶无穷小；

(D) 等价无穷小.

答(D)(3%)

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^{4x+4}$ 的值为

(A) e;　　(B) e^3;　　(C) e^4;　　(D) e^8.

答(D)(3%)

6. 设 $0<a<b$，则数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}$ 等于

(A) a;　　(B) b;　　(C) 1;　　(D) $a+b$.

答(B)(3%)

7. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{|x|}-1}{x}$ 的结果是

(A) 1;　　(B) -1;　　(C) 0;　　(D) 不存在.

答(D)(3%)

8. 当 $x\to x_0$ 时，若 $f(x)$ 有极限，$g(x)$ 无极限，则下列结论正确的是

(A) $f(x)g(x)$ 当 $x\to x_0$ 时必无极限；

(B) $f(x)g(x)$ 当 $x\to x_0$ 时必有极限；

(C) $f(x)g(x)$ 当 $x\to x_0$ 时可能有极限，也可能无极限；

(D) $f(x)g(x)$ 当 $x\to x_0$ 时，若有极限则极限必为零.

答(C)(3%)

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\sin x\right)$的结果是

(A) -1;　　(B) 1;　　(C) 0;　　(D) 不存在.

答(A)(4%)

10. 当 $x\to 0$ 时，$x^2-\sin x$ 是 x 的

(A) 高阶无穷小;

(B) 同阶无穷小，但不是等价无穷小;

(C) 低阶无穷小;

(D) 等价无穷小.

答(B)(4%)

11. 设 $f(x)=\dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}}{2+3e^{\frac{1}{x}}}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$的

(A) 可去间断点;　　(B) 第一类间断点;

(C) 无穷间断点;　　(D) 振荡间断点.

答(B)(4%)

12. 极限$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{|x-1|}$的值是

(A) 1;　　(B) -1;　　(C) 0;　　(D) 不存在.

答(D)(4%)

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)$的值为

(A) e;　　(B) 1;　　(C) $\frac{1}{e}$;　　(D) e^2.

答(D)(4%)

14. 当 $x\to\infty$时，变量 $x^2\sin x$ 是

(A) 无穷小量;

(B) 有界变量，但不是无穷小量;

(C) 无穷大量;

(D) 无界变量，但不是无穷大量.

答(D)(4%)

15. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}, & 当\ x\neq 1,\\ 0, & 当\ x=1.\end{cases}$ 则点 $x=1$ 是 $f(x)$ 的

(A) 连续点； (B) 跳跃间断点；

(C) 可去间断点； (D) 第二类间断点.

答(D)(4%)

四、解答题

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \dfrac{x^n}{1+x^2}dx$. (5%)

解 在区间[0,1]上恒有

$$0\leqslant\frac{x^n}{2}\leqslant\frac{x^n}{1+x^2}\leqslant x^n,$$

根据定积分的性质，有

$$\int_0^1\frac{x^n}{2}dx\leqslant\int_0^1\frac{x^n}{1+x^2}dx\leqslant\int_0^1 x^n dx,$$

或

$$\frac{1}{2(n+1)}\leqslant\int_0^1\frac{x^n}{1+x^2}dx\leqslant\frac{1}{n+1},$$

而极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0,$$

根据极限存在的夹挤准则，得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x^2}dx=0.$$

2. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-e^{-nx}}{1+e^{-nx}}$. (7%)

解 当 $x=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-e^{-nx}}{1+e^{-nx}}=0$；

当 $x>0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}e^{-nx}=0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-e^{-nx}}{1+e^{-nx}}=1$；

当 $x<0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}e^{nx}=0$，故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-e^{-nx}}{1+e^{-nx}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{nx}-1}{e^{nx}+1}=-1.$$

综上所述,得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-e^{-nx}}{1+e^{-nx}}=\begin{cases}-1, & 当\ x<0,\\ 0, & 当\ x=0,\\ 1, & 当\ x>0.\end{cases}$$

3.求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{4-x^2}-2}{1-\cos 2x}$. (6%)

解法一 原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-x^2}{(1-\cos 2x)(\sqrt{4-x^2}+2)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-x^2}{2\sin^2 x(\sqrt{4-x^2}+2)}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}+2}=-\frac{1}{8}.$$

解法二 $\because$当 $u\to0$ 时,$\sqrt{1+u}-1\sim\frac{1}{2}u$,$1-\cos u\sim\frac{1}{2}u^2$.

$$\therefore\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{4-x^2}-2}{1-\cos 2x}=\lim_{x\to0}\frac{2\left(\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}-1\right)}{1-\cos 2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}(2x)^2}=-\frac{1}{8}.$$

4.求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n+1}-1)\sin(n^2+1)}{n}$,($n$ 为正整数). (6%)

解 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}-1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n(\sqrt{n+1}+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+1}$

$=0$,

$|\sin(n^2+1)|\leqslant1$.

根据无穷小的性质:有界函数与无穷小的乘积仍是无穷小.所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-1)\sin(n^2+1)}{n}=0.$$

5. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x}$.　　（7%）

解 $\dfrac{2x+1}{2x-1}=1+\dfrac{2}{2x-1}$,

令 $t=\dfrac{2x-1}{2}$, 当 $x\to\infty$ 时, $t\to\infty$, 从而有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x}&=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{3t+\frac{3}{2}}\\&=\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{3}\cdot\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{3}{2}}\\&=e^{3}.\end{aligned}$$

6. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$.　　（7%）

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}2\cos\left(\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right)$

$\sin\left(\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right)$

$$=2\lim_{x\to+\infty}\cos\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right)\sin\left(\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\right),$$

其中 $\left|\cos\left(\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right)\right|\leqslant 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\left(\dfrac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\right)=0$,

根据无穷小的性质:有界函数与无穷小的乘积仍是无穷小,可知

$$\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=0.$$

7. 试用“ε-δ”式语言叙述函数 $f(x)$ 在 x_0 点处连续的定义.（7%）

解 （略）

8. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n-1}-n)$.　　（7%）

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{\sqrt{n^2+2n-1}+n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}+1}=1.$$