数学同步测试丛书

高等数学

同步测试

刘 群 刘瑞芹 王金玉 主编

王学理 主审

6

NEUPRESS

东北大学出版社

高等数学同步测试

主　编　刘　群　刘瑞芹　王金玉
副主编　张　友　孙艳蕊
主　审　王学理

东北大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步测试/刘群,刘瑞芹,王金玉主编.—沈阳:东北大学出版社,2002.8

ISBN 7-81054-677-5

Ⅰ.高… Ⅱ.刘… Ⅲ.高等数学-试题 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 054271 号

出 版 者:东北大学出版社

(邮编:110004 地址:沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号)

出 版 人:李毓兴

印 刷 者:沈阳市第六印刷厂

发 行 者:新华书店总店北京发行所

开　　本:850mm×1168mm 1/32

印　　张:16

字　　数:416 千字

出版时间:2002 年 8 月第 1 版

印刷时间:2002 年 8 月第 1 次印刷

责任编辑:刘宗玉

责任出版:秦 力

封面设计:唐敏智

定　　价:20.00 元

垂询电话:024—83687331(发行部)　　024—83680265(传 真)

E-mail:neuph@neupress.com　　http://www.neupress.com

前　　言

"高等数学"作为绝大多数理工科院校学生的必修课，历来备受青睐．通过"高等数学"的学习，会提高学生们的空间想像能力、逻辑推理能力、分析问题与解决问题的能力．学生们对"高等数学"之所以非常重视，还有以下三个方面的因素：首先，要面临上、下两册的考试，实际上，学校是按两门课对待的；其次，它对后续课影响很大，学不好它，麻烦总会伴随左右；第三，对于有志考研的学生，它也是令人头痛的，不少人被它拉下马来．

实践证明，通过演练大量习题来完成"高等数学"的学习是必然的。但是，学生们往往是盲目地去做题，缺乏科学的选择，最后很难达到预期目的，同时还浪费了大量的宝贵时间．编写本书的目的，就是要解决这一问题．本书的特色在于内容与教材的紧密衔接，随授课进度进行同步测试；精心选择的各类试题，既基本又典型，面广但不重复，循序渐进、重点突出，最终目的是让学生在尽可能短的时间内巩固基本概念，掌握解题方法．

本书共分三大部分，含测试套题 82 套．第一部分为归类测试，共有八讲，每讲含四套题，其中稍易的 A 级两套，稍难的 B 级两套．每套均含填空题、选择题（单项）、计算题、综合题与证明题五种题型．第二部分为期末测试，针对上下两册，各出 20 套测试题．其中 10 套模拟测试题，程度相当于一般院校的期末试题；10 套真题，选自于重点大学实际使用过的期末试题．前两部分每套题完成时间为两个小时．第三部分为考研测试，分模拟测试与真题测

试两讲，每讲各含5套测试题．真题选自近年全国考研“数学一”中试题，模拟题与真题水平相当，每套题要求三个小时完成．

所有测试题均给出详细解答，一部分给出解题思路和方法，指出易犯的错误并剖析原因；有些还结合解题过程对学习的思维方式予以指导，并介绍解题技巧．

本书适用于在校的本科生和有志“考研”的朋友．对于从事“高等数学”教学工作的高校教师也是一本内容翔实的参考书．

本书主编为刘群、刘瑞芹、王金玉，副主编为张友、孙艳蕊，参加编写的还有肖润梅、齐淑华、铁军、梁学忠．全书由王学理审订．

由于作者水平所限，加之时间紧迫，书中难免会有缺憾与不妥之处，若能得到广大读者与同仁的指教、批评，那正是我们衷心的希冀．

编　者

2002年3月

目　　录

第一部分　归类测试

第一讲　极限与导数

A　级

第一套

一、填空题　（3×4＝12 分）

1．$y=f(\sin 2x)$具有二阶导数，则 $y''=$______．

2．若 $y=\csc^3 x+2xe^y$，则$\dfrac{dy}{dx}=$______．

3．$\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(1-\cos\dfrac{1}{x}\right)=$______．

4．曲线 $y=\dfrac{1}{x}$在点$\left(\dfrac{1}{2},2\right)$处的切线方程为______．

二、选择题　（4×3＝12 分）

1．设在 x_0 处 $f(x)$可导，而 $g(x)$不可导，则在 x_0 处[　　]．

(A) $f(x)+g(x)$必不可导，而 $f(x)\cdot g(x)$未必不可导；

(B) $f(x)+g(x)$与 $f(x)-g(x)$都可导；

(C) $f(x)+g(x)$可导且 $f(x)\cdot g(x)$不可导；

(D) $f(x)+g(x)$与 $f(x)\cdot g(x)$都不可导．

2. $f'(a)$存在时，$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{xf(a)-af(x)}{x-a}=$[　　].

(A) $f'(a)$;　　　　(B) $f(a)-af'(a)$;

(C) $-af'(a)$;　　　(D) $af'(a)$.

3. $f(x)$在$[a, b]$上连续是$f(x)$在其上有最大、最小值的[　　].

(A) 必要条件；　　(B) 充分条件；

(C) 充分必要条件；　(D) 既非充分条件也非必要条件.

三、计算题　($6\times5=30$ 分)

1. 求 $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

2. 求 $y=x^{x\ln x}$ 当 $x=\mathrm{e}$, $\Delta x=\dfrac{1}{3}$时的微分.

3. 选择 a, b 之值使当 $x\to-\infty$时，$f(x)=\sqrt{x^2-4x+5}-(ax+b)$为无穷小.

4. 求$\lim\limits_{x\to0}\sqrt[x]{\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}}$，其中 $a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $b\neq1$, $c>0$, $c\neq1$.

5. 指出 $f(x)=\dfrac{\sin x\cdot\sqrt{1-2x+x^2}}{x(x-1)(x-3)}$的所有间断点，并判别其类型.

四、综合题　($8\times4=32$ 分)

1. 已知 $y=\dfrac{x^3}{x+1}$，求 $y^{(n)}(n>2, x\neq-1)$.

2. 已知$\begin{cases}x=3t^2+2t\\ \mathrm{e}^y\sin t-y+1=0\end{cases}$，求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}$.

3. 讨论 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+x^2\mathrm{e}^{nx}}{1+\mathrm{e}^{nx}}$的连续性.

4．已知 $f(x)=\begin{cases}(x-1)\arctan\dfrac{1}{x-1} & ,x\neq 1\\ 0 & ,x=1\end{cases}$，求 $f'(x)$．

五、证明题 （7×2＝14 分）

1．曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\sin x$ 在原点相切，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n\cdot f\left(\dfrac{2}{n}\right)}=\sqrt{2}$．

2．若 $f(x)$ 对一切 x_1，x_2 满足等式 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续．

(1) 求 $f(0)$；

(2) 证明：$f(x)$ 在任意点 x_0 处连续．

第二套

一、填空题 （3×4＝12 分）

1．利用绝对值记号，将函数 $f(x)=\begin{cases}x & ,x\leqslant 0\\ 2x & ,x>0\end{cases}$，用一个式子表示出来，$f(x)=$______．

2．若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=a$（$a$ 为有限数），则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$______．

3．$y=e^{-\frac{x}{y}}$，则 $dy=$______．

4．按近似公式 $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$（当 $|\Delta x|$ 很小时）有 $\sqrt{99}\approx$______．

二、选择题 （4×3＝12 分）

1．设 $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}+\cos 2x$，则 $f^{(27)}(\pi)$ 的值等于[　　]．

(A) 0；　(B) $-\dfrac{1}{2^{27}}$；　(C) $2^{27}-\dfrac{1}{2^{27}}$；　(D) 2^{27}．

2. 设 $f(x)=\begin{cases}3-x^2 & ,0\leqslant x\leqslant 1\\ \dfrac{2}{x} & ,1<x\leqslant 2\end{cases}$，则在(0, 2)内适合 $f(2)-f(0)=f'(\xi)\cdot 2$ 的 ξ 值[　　].

(A) 只有一个；　　(B) 不存在；

(C) 有两个；　　(D) 有三个 .

3. 若 $y=f(x)$，有 $f'(x_0)=\dfrac{1}{2}$，则当 $\Delta x\to 0$ 时，在点 $x=x_0$ 处的微分 dy 是[　　].

(A) 与 Δx 等价无穷小；

(B) 与 Δx 同阶无穷小，但不是等价无穷小；

(C) 比 Δx 高阶无穷小；

(D) 比 Δx 低阶无穷小 .

三、计算题 （6×5=30 分）

1. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$.

2. 方程 $y-x+\dfrac{1}{2}\sin x=0$ 确定的隐函数为 $x=\varphi(y)$. 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}\right|_{\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi-1}{2}\right)}$.

3. 已知 $y=\sqrt{x}(x^2+1)^x$，求 dy.

4. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{2}}{1+e^x}$.

5. 设 $\begin{cases}x=f(t)-\pi,\\ y=f(e^{3t}-1),\end{cases}$ 其中 f 可导，且 $f'(0)\neq 0$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}$.

四、综合题 （$8\times4=32$ 分）

1. 设 $f(x)=\begin{cases}(ae^{x}+be^{-x}+c)/\sin x & ,\ x\neq0\\ 10 & ,\ x=0\end{cases}$，确定 a，b，c 使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续．

2. 已知曲线的极坐标方程为 $r=2\cos\theta$，求该曲线在极坐标点 $P\left(\sqrt{3},\ \dfrac{\pi}{6}\right)$ 处的切线方程．

3. 已知 $y=\dfrac{x^4}{1-x}$，求 $y^{(n)}(x)$ $(n>4)$．

4. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(x+p)(x+q)}-x\right)=\dfrac{1}{2}$，求 $p+q$ 的值．

五、证明题 （$7\times2=14$ 分）

1. 证明：双曲线 $xy=a^2$ 的切线在两坐标轴之间的线段被切点平分．

2. 设 $f(x)=g(x)\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$在点 x_0 的邻域内连续，$g(x)$在 x_0 处可导，且 $g'(x_0)=a$，$g(x_0)=0$，试证：$f(x)$在 x_0 处可导，并求 $f'(x_0)$．

B　级

第一套

一、填空题 （$3\times4=12$ 分）

1. $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{1/x^2}}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$的______间断点．

2. 将 $f(x)=\dfrac{1}{x}$按 $x-1$ 的幂展开到三阶 Taylor 公式为______．

3. $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1-2x^2}}$，则 $y'=$______．

4. 设 $\varphi(x)$在 $x=0$ 处连续，则 $y=f(x)=x\varphi(x)$在 $x=0$ 处的微分为 $dy=$______.

二、选择题 （$4\times3=12$ 分）

1. $f(x)=\sqrt{x(x-1)}+\dfrac{x^2-1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+1)(x-2)}$有[　　]个间断点.

(A) 1；(B) 2；(C) 3；(D) 0.

2. 若$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}=2$，则必有[　　].

(A) $a=2$，$b=8$；　(B) $a=2$，$b=5$；

(C) $a=0$，$b=-8$；　(D) $a=2$，$b=-8$.

3. 若 $x\to0$ 时，$f(x)$为无穷小，且 $f(x)$为 x^2 的高阶无穷小，则$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\sin^2x}=$[　　].

(A) 0；(B) 1；(C) ∞；(D) $\dfrac{1}{2}$.

三、计算题 （$6\times5=30$ 分）

1. 设 $y=(x+2)(2x+3)^2(3x+4)^3$，求 $y^{(6)}$.

2. 求$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{2^{\cos^2x}-1}{\ln(\sin x)}$.

3. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arcsin(\sqrt{x^2+x}-x)$.

4. 已知 $\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$，求$\dfrac{dx}{dy}$.

5. 已知 $r=a\theta$，其中(r,θ)为点(x,y)的极坐标，a 为常数，求微分 dy，dx，并求$\dfrac{dy}{dx}$.

四、综合题 （8×4=32分）

1. 考查 $f(x)=\sqrt{x^2+x^3}$在点 $x=0$ 处的可导性．

2. 求$\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\sqrt[n+1]{x}-\sqrt[n]{x})$ $(x>0,\ x\neq1)$．

3. 已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}, & x\neq0\\ a, & x=0\end{cases}$，确定 a 值使$f(x)$在 $x=0$ 连续．

4. 已知圆 $x^2+y^2=25$ 上($y>0$)的点其纵坐标以 1.5cm/s 的速度减小，求点的纵坐标为 4cm 时，横坐标的变化速率．

五、证明题 （7×2=14分）

1. 设对非零的 x，y 有$f(xy)=f(x)+f(y)$，且 $f'(1)=a$，试证：当 $x\neq0$ 时，$f'(x)=\dfrac{a}{x}$．

2. 设 $f(x)$在$[0,\ 1]$上连续，且非负，$f(0)=f(1)=0$，对任意 $\alpha\in(0,\ 1)$，存在 $x_0\in[0,\ 1]$使 $f(x_0)=f(x_0+\alpha)$成立，试证之．

第二套

一、填空题 （3×4=12分）

1. $\mathrm{d}\sin\sqrt{\cos x}=$______ $\mathrm{d}\cos x$．

2. 函数 $f(x)$在可导点 x_0 处有增量 $\Delta x=0.2$，对应的函数值增量的线性主部为 0.8，则 $f'(0)$的值应为______．

3. $y=x^t+t^x+t^t$，则$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$______．

4. 当 $x\to-1$ 时，ax^2-x+b 相对$x+1$ 为等价无穷小，则 $a=$______；$b=$______．

二、选择题 （4×3=12分）

1. $f(x)=x(e^{x}-e^{-x})$在其定义域$(-\infty, +\infty)$内是[　　].

(A) 有界函数；　(B) 单调增加函数；

(C) 偶函数；　　(D) 奇函数 .

2. 方程 $x^4-x-1=0$ 至少有一个根的区间是[　　].

(A) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$；　(B) $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$；　(C) $(2, 3)$；　(D) $(1, 2)$.

3. 若 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=k_1$，$\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=k_2$，其中 k_1，k_2 为确定的实常数，则点 $x=a$ 不可能是$f(x)$的[　　].

(A) 可去间断点；　　(B) 跳跃间断点；

(C) 连续点；　　　　(D) 无穷间断点 .

三、计算题 （6×5=30分）

1. 设$\begin{cases} x=1-e^{x}-t \\ y=e^{yt} \end{cases}$，求$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}$

2. 设 $f(x)=\begin{cases} g(x)\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，且 $g(0)=g'(0)=0$. 求 $f'(0)$.

3. 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{ax+b}{ax+c}\right)^{hx+k}$(其中 $a\neq 0$，$h\neq 0$).

4. 设 $f(x)=\begin{cases} \sin^3 x\cdot\sin\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{\ln(1+3x)}{x}, & x>-\dfrac{1}{3},\ x\neq 0 \\ A, & x=0 \end{cases}$，讨论 A 为何值时$f(x)$在 $x=0$ 处连续 .

5. 若曲线 $y=f(x)$在点(x, y)处的切线斜率与 x^2 成正比，并知该曲线通过点 $A(1, 6)$和点 $B(2, -8)$，求该曲线方程 .

四、综合题 （$8\times4=32$ 分）

1．当等边三角形的高为 8cm 时，证明其面积对高的变化率为 $16\sqrt{3}/3$.

2．设 $u_1=\sqrt{2}$，$u_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$，…，$u_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$，证明：数列$\{u_n\}$的极限存在，并求出这个极限．

3．设 $y=y(x)$满足 $y''(x)=1$，如果将 x 看做 y 的函数 $x=x(y)$，这时该式怎样变化？

4．$x=f'(t)$，$y=tf'(t)-f(t)$，$f'''(t)$存在且 $f''(t)$不为零，求$\dfrac{d^3y}{dx^3}$.

五、证明题 （$7\times2=14$ 分）

1．设 $f(x)$可导，且记 $f'(x)$为 $Df(x)$，定义另一种导数为

$$D^*f(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f^2(x+\Delta x)-f^2(x)}{\Delta x}$$

(1) 试用 $Df(x)$表示 $D^*f(x)$；

(2) 试推出 $D^*[f(x)+g(x)]$的求导公式，已知 $D^*g(x)$存在．

2．设 $A>0$，且$|B|$与 A^n 相比很小，证明：

$$\sqrt[n]{A^n+B}\approx A+\frac{B}{n\cdot A^{n-1}}$$

第二讲　中值定理与导数的应用

A　级

第一套

一、填空题　($3\times4=12$ 分)

1. 按 $x+1$ 的幂展开多项式 $p(x)=x^3+3x^2-2x+4$，则 $p(x)=$______.

2. 曲线 $y^2=x$ 在(0, 0)点的曲率为 $k=$______.

3. $f(x)=x^3-3x$ 在区间[0, 2]上的最小值是______.

4. $y=3x^4-4x^3$ 的拐点是______.

二、选择题　($4\times3=12$ 分)

1. 曲线 $y=x\arctan x$ 的图形[　　].

(A) 在$(-\infty, +\infty)$内是凹的；

(B) 在$(-\infty, +\infty)$内凸；

(C) 在$(-\infty, 0)$内为凸，在$(0, +\infty)$内是凹的；

(D) 在$(-\infty, 0)$内为凹，在$(0, +\infty)$内为凸.

2. 设 $a<0$，则当满足条件[　　]时函数 $f(x)=ax^3+3ax^2+8$ 为增函数.

(A) $x<-2$;　　(B) $-2<x<0$;

(C) $x>0$;　　(D) $x<-2$ 或 $x>0$.

3. $f(x)=(x-1)^2(x+1)^3$ 的极值点的集合是[　　].