● 高职高专学校学习辅导丛书

高等数学

中册

Advanced Mathematics

主　编　朱弘毅

副主编　张伟瑾　楼曾豪　孙　劼　邵建润　王春华

上海科学技术出版社

高职高专学校学习辅导丛书

高等数学

（中　册）

主　编　朱弘毅
副主编　张伟瑾
楼曾豪
孙　劼
邵建润
王春华

上海科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．中册／朱弘毅主编．—上海：上海科学技术出版社，2002.3
（高职高专学校学习辅导丛书）
ISBN 7-5323-6349-X

Ⅰ.高…　Ⅱ.朱…　Ⅲ.高等数学－高等学校：技术学校－自学参考资料　Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字（2002）第003936号

上海科学技术出版社出版、发行
（上海瑞金二路450号　邮政编码200020）
新华书店上海发行所经销　常熟市第六印刷厂印刷
开本787×1092　1/32　印张6.75　字数145 000
2002年3月第1版　2002年3月第1次印刷
印数：1—8 000
ISBN 7-5323-6349-X/O·253
定价：7.30元

前　言

高职高专学校学习辅导丛书《高等数学》分上、中、下三册，是与高职高专学校试用教材《高等数学》(上海科学技术出版社 2001 年第四版)配套的学习辅导书。

高等数学是高职高专工程类各专业的一门基础课，该课程有一定的难度，例如，某些基本概念理解不透，运算技巧不易掌握，理论性比中学数学强，针对这门课程的难度和特点，编者希望借助辅导书做好难度的转化工作，有利于学生掌握知识。另一方面，高等数学是刚跨进高等学府大门的学生首遇的一门课程，高等数学任课教师讲授格调又不同于中学教师，学习方法上学生正处于从中学类型向大学类型转变，在这种情况下，学生迫切需要一个辅导老师，帮助他们解决学习中的疑难问题，这也就是我们编写这套书的目的。总之，编者希望这套与教材配套的学习辅导书，有助于学生正确理解有关的概念和理论，更好地掌握解决问题的方法和技巧，有利于学生做好考试前的复习工作。

这三册学习辅导书的编写体例一致，每册书的附录为模拟试卷及参考答案，各章与相应的教材同步。每章由内容提要、例题分析、习题选解、单元检测题四部分组成。例题分析和习题选解中题目一般都是较典型或较难的习题。单元检测题中，我们既考虑到知识的覆盖面，又注意突出重点内容来命题，有利于对该章学习的总结检查。

全书由朱弘毅主编，张伟瑾、楼曾豪、孙劼、邵建润、王春华为中册副主编。参加编写的还有(按姓氏笔划为序)：冯珍珍、朱玉久、朱嗣筠、任美玉、孙劼、李俭、邵建润、沐国宝、沈听、吴珞、罗爱芳、张伟瑾、张福康、高永良、楼曾豪、黄亦虹、裘锡林。

限于编者水平，书中不妥之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2001年2月

目　录

第八章　向量代数与空间解析几何

一、内 容 提 要

1. 空间直角坐标系

在空间任取定点 O,以 O 为原点在空间作三条互相垂直的数轴,这三条数轴分别称为 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)、z 轴(竖轴),统称为坐标轴,三个坐标轴正向构成右手系,这样的三条坐标轴就构成空间直角坐标系.由此建立空间点 M 与有序数组 (x,y,z) 之间的一一对应关系.

空间两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 间的距离为

$$M_1M_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

*2. 向量代数

(1) 向量　既有大小又有方向的量称为**向量**.

向量按基本单位向量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 的分解式为

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}.$$

向量的坐标表示式为

$$\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}.$$

(2) 向量 $\boldsymbol{a}$ 的模

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.$$

(3) 单位向量　模为 1 的向量称为**单位向量**.方向与 $\boldsymbol{a}$

相同,模为 1 的向量称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量,记为 $\boldsymbol{a}^0$. 即

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.$$

(4) 向量 $a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\quad \cos\beta=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.$$

其中,α、β、$\gamma(0\leqslant\alpha、\beta、\gamma\leqslant\pi)$分别为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x、y、z 轴正向的夹角,称为方向角,且满足

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

(5) 向量的线性运算

若 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$, $\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$, 则

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=\{a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z\}.$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda a_x\boldsymbol{i}+\lambda a_y\boldsymbol{j}+\lambda a_z\boldsymbol{k},(\lambda\text{ 为实数}).$$

(6) 向量的数量积

若 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$, $\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$, 则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

数量积运算满足如下性质:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a},$$

$$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b}),(\lambda\text{ 为实数}),$$

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}.$$

(7) 向量的向量积

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\boldsymbol{n}^0$,其中 $\boldsymbol{n}^0$为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的单位向量,或

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

向量积运算满足如下性质：

$a \times b = - b \times a$,

$\lambda(a \times b) = (\lambda a) \times b = a \times (\lambda b)$,（$\lambda$ 为实数），

$(a + b) \times c = a \times c + b \times c$,

$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$.

(8) 两向量间的夹角

$$0 \leqslant (\hat{a,b}) \leqslant \pi,$$

$$\cos(\hat{a,b}) = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

两向量垂直的充要条件为

$$a \cdot b = 0 \quad 或 \quad a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

两向量平行的充要条件为

$$a \times b = 0 \quad 或 \quad a = \lambda b (\lambda \neq 0) \quad 或 \quad \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

***3. 空间平面方程**

(1) 过点(x_0, y_0, z_0)，法向量为$n = \{A, B, C\}$的平面点法式方程为

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

(2) 法向量为$n = \{A, B, C\}$的平面一般式方程为

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

(3) 平面在 x, y, z 轴上的截距依次为 a, b, c 的平面截距式方程为

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \ (a、b、c \neq 0).$$

*4. 空间直线方程

(1) 直线的一般式方程为

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

$$(\{A_1, B_1, C_1\} \neq \lambda\{A_2, B_2, C_2\}, \lambda \neq 0).$$

(2) 过点(x_0, y_0, z_0)，方向向量为$\boldsymbol{S}=\{m, n, p\}$的直线点向式方程为

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}.$$

(3) 过点(x_0, y_0, z_0)，且方向向量$\boldsymbol{S}=\{m, n, p\}$的直线参数式方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$$

*5. 直线、平面关系

(1) 设直线L_1, L_2的方向向量分别为$\boldsymbol{S}_1=\{m_1, n_1, p_1\}$，$\boldsymbol{S}_2=\{m_2, n_2, p_2\}$，则

直线L_1与L_2平行的充要条件是 $\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$；

直线L_1与L_2垂直的充要条件是

$$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0.$$

(2) 设平面π的法向量为$\boldsymbol{n}=\{A, B, C\}$，直线$L$的方向向量为$\boldsymbol{S}=\{m, n, p\}$，直线$L$与平面$\pi$平行的充要条件是

$$Am + Bn + Cp = 0;$$

直线L与平面π垂直的充要条件是

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

(3) 设平面 π_1,π_2 的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\},\boldsymbol{n}_2=\{A_2,B_2,C_2\}$. 平面 π_1 与平面 π_2 平行的充要条件是

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2};$$

平面 π_1 与平面 π_2 垂直的充要条件是

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

6. 常见曲面方程

(1) 球心为(x_0,y_0,z_0),球半径为 R 的球面方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$

(2) 柱面方程

准线为 xOy 坐标面上的曲线 $F(x,y)=0$, 母线平行于 z 轴的柱面方程为 $F(x,y)=0$.

常用柱面是:

$x^2+y^2=R^2$,圆柱面;

$y=ax^2+b$,抛物柱面;

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$,椭圆柱面;

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$,双曲柱面;

$ax+by+c=0$,平面.

(3) 旋转曲面

xOz 坐标面上的曲线 $F(x,z)=0$,绕 Oz 轴旋转一周所产生的旋转曲面方程为

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0.$$

常用旋转曲面为

$z=a^2(x^2+y^2)$,旋转抛物面(图 8-1);

$z^2=k^2(x^2+y^2)$,圆锥面(图 8-2).

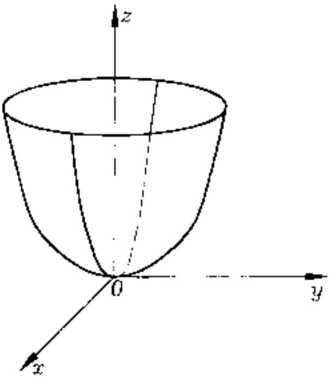

图 8 1

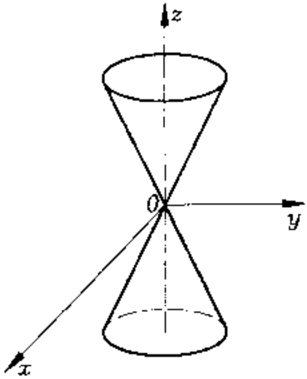

图 8 2

7. 空间曲线方程

(1) 空间曲线的一般式方程为

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0. \end{cases}$$

(2) 空间曲线的参数式方程为

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta) \\ z=z(t). \end{cases}$$

8. 空间曲线在坐标面上的投影

设空间曲线 C: $\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0. \end{cases}$

C 在 xOy 坐标面上投影方程为 $\begin{cases} F(x,y)=0, \\ z=0; \end{cases}$

C 在 yOz 坐标面上投影方程为 $\begin{cases} G(y,z)=0, \\ x=0; \end{cases}$

C 在 xOz 坐标面上投影方程为 $\begin{cases} H(x,z)=0, \\ y=0. \end{cases}$

二、例 题 分 析

例1 求点 $M(2,-3,-1)$关于(1) 各坐标面；(2) 各坐标轴；(3) 坐标原点的对称点的坐标.

分析 对称点的横坐标(或纵坐标或竖坐标)之间有密切联系.如果是关于 xOy 坐标面的对称点,则点的 x,y 坐标分别对应相等,点的 z 坐标互为相反数,关于其他坐标面对称,可以类似分析;如果是关于 x 轴对称,则点的 x 坐标对应相等,而点的 y、z 坐标分别互为相反数,类似分析关于其他坐标轴的对称问题;如果是关于原点的对称点,则对称点的 x、y、z 坐标互为相反数.

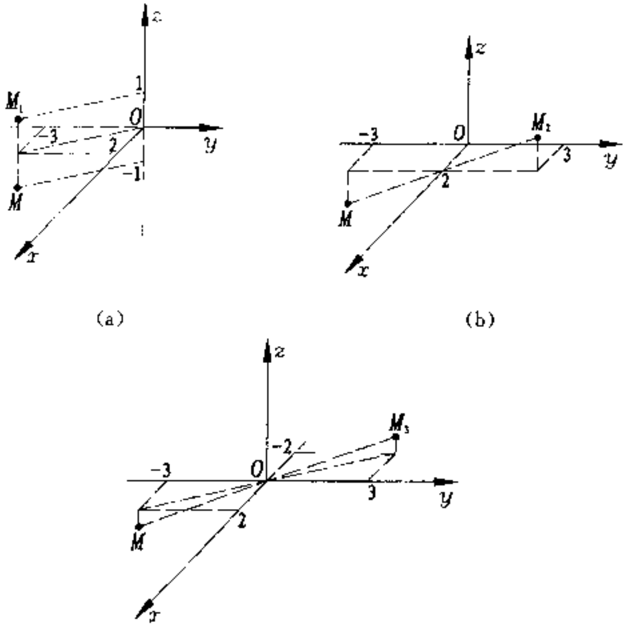

图 8-3

解 点 $M(2,-3,-1)$关于 xOy 坐标面的对称点为 $M_1(2,-3,1)$，关于 Ox 轴的对称点为 $M_2(2,3,1)$及关于原点的对称点为 $M_3(-2,3,1)$[图 8-3(a)、(b)、(c)].

例2 设向量 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}$ 的终点 B 的坐标为 $(2,-1,7)$，求它始点 A 的坐标及 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

解 设始点 A 的坐标为(x,y,z)，由 $\boldsymbol{a}=\overline{AB}$，得

$$\{4,-4,7\}=\{2-x,-1-y,7-z\}.$$

从而，得 $x=-2,y=3,z=0$.

即始点坐标为$(-2,3,0)$.

又 $\because$ $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{4^2+(-4)^2+7^2}=9$，

所以方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{4}{9},$$

$$\cos\beta=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{-4}{9},$$

$$\cos\gamma=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{7}{9}.$$

例3 向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 符合什么条件时，下列式子成立：

(1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$； (2) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；

(3) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

分析 我们考虑到向量加法、减法的运算法则，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 是以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的两对对角顶点所构成的向量.然后按要求对两对角线的长度关系进行讨论.

解 因$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$和$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$分别是以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的两条对角线之长，从几何知识显然有：

(1) 当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角小于$\frac{\pi}{2}$时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；

(2) 当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角等于$\frac{\pi}{2}$时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；

(3) 当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角大于$\frac{\pi}{2}$时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

例4 在 xOz 平面上求垂直于 $\boldsymbol{a}=\{-2,2,-1\}$并与它有等长的向量.

分析 由于所求向量在 xOz 坐标面上，则向量在 y 轴上的分量为0. 即可设所求向量为 $x\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{j}$.

解 设所求向量为 $\boldsymbol{b}=\{x,O,z\}$，

$\because$ $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(-2)^2+2^2+(-1)^2}=3$，

$\therefore$ $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{x^2+0^2+z^2}=\sqrt{x^2+z^2}=3$，即 $x^2+z^2=9$.

由 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，故 $-2x-z=0$，$z=-2x$.

解方程组

$$\begin{cases}x^2+z^2=9,\\ z=-2x,\end{cases}$$

得 $$x=\pm\frac{3}{\sqrt{5}},\ z=\mp\frac{6}{\sqrt{5}}.$$

即所求向量为$\left\{\frac{3}{\sqrt{5}},0,-\frac{6}{\sqrt{5}}\right\}$或$\left\{-\frac{3}{\sqrt{5}},0,\frac{6}{\sqrt{5}}\right\}$.

例5 设 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{B}=k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，其中，$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，问：

(1) k 为何值时，$\boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{B}$；

(2) k 为何值时，以 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为邻边的平行四边形的面积为 6.

分析 (1) 由 $\boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{B}$ 的充要条件 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0$，求 k；(2) $|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|$表示以 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为邻边的平行四边形的面积，于是得$|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|=6$，所以从计算 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$入手.

解 (1) $\because$
$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}&=(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\\&=2k|\boldsymbol{a}|^2+(2+k)(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+|\boldsymbol{b}|^2\\&=2k+4,\end{aligned}$$

故当 $k=-2$ 时，$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0$，即 $\boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{B}$；

(2) $\because$ $\quad |\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}| = |(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})|$

$$
\begin{aligned}
&= |2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+k(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})| \\
&= |(2-k)(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})| = |2-k|\,|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| \\
&= |2-k|\,|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin\frac{\pi}{2} = 2|2-k| = 6,
\end{aligned}
$$

解方程，得 $\quad k=-1$，或 $k=5$.

即当 $k=-1$ 或 $k=5$ 时，以 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为邻边的平行四边形的面积为 6.

例 6 求过原点且垂直于平面 $\pi_1: x+2y+3z-2=0$ 及 $\pi_2: 6x-y-5z+23=0$ 的平面方程.

解法一 平面 π_1 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=\{1,2,3\}$，平面 π_2 的法向量 $\boldsymbol{n}_2=\{6,-1,-5\}$，所求平面要垂直于平面 π_1 与平面 π_2，故可取所求平面的法向量 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2$. 故

$$
= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -7\boldsymbol{i} + 23\boldsymbol{j} - 13\boldsymbol{k},
$$

又平面过原点，由平面的点法式方程，得所求平面方程为

$$
-7x + 23y - 13z = 0;
$$

解法二 因所求平面过原点，可设平面方程为

$$
\pi:\ Ax + By + Cz = 0.
$$

则法向量 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$.

由题意，得

$\pi\perp\pi_1$， $\therefore$ $\quad \boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{n}_1$，

即
$$
\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}_1 = A + 2B + 3C = 0. \tag{①}
$$

$\pi\perp\pi_2$， $\therefore$ $\quad \boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{n}_2$，

即
$$
\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}_2 = 6A - B - 5C = 0. \tag{②}
$$

解①、②式方程组，得 $\quad A=\frac{7}{13}C$，$B=-\frac{23}{13}C$.