

中等專業學校教學用書

代數學教程

P. A. 卡爾寧著

高等教育出版社



中等專業學校教學用書



代 數 學 教 程

P. A. 卡爾寧著
趙根榕 張理京譯

高等教育出版社

本書係根據蘇聯技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико—теоретической литературы）出版的卡爾寧（Р. А. Калинин）著“代數學教程”（Курс алгебры для техникумов）1952年初版翻譯的。原書經蘇聯高等教育部審定為中等技術學校教科書。

本書原由商務印書館出版，自1954年8月起改由本社出版。

代 數 學 教 程

P. A. 卡 爾 寧 著

趙根榕 張理京譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇號

（北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號）

商務印書館上海廠印刷 新華書店總經售

書號 G3·(第 59) 開本 850×1168 1/32 印張 9 14/16 字數 245,000

一九五四年八月上海新一版

一九五五年十一月上海第二版（修訂合訂本）

一九五五年十二月上海第十次印刷

印數：175,001—190,000 定價：¥ 0.89

原 序

本書為適應蘇聯高等教育部批准的中等技術學校數學教學大綱而寫，預定作為中等技術學校各專業的教本。中間專門有一章講結合的初等理論，是為中技社會經濟專業用的。關於複數的一章是為中技電機及機械製造專業而寫的，其中也講到複數的三角形狀。

按照中等技術學校的需要，這教本中關於基本近似算法及對數算尺的理論與實踐，比十年制中學的教本要講得詳細些。

在中等技術學校教本中，當然不可能把初等代數中的許多基本問題（關於無理數，指數及對數函數，以及複數等等的理論）講得十分嚴格。因此著者有意地採用了一些不加證明的命題，而在適當的地方作必要的說明。

著者對於材料的講解力求簡短，避免跟讀者“聊閒天”。課文中引入了好些例題與有解答的問題；有時這些例題在新概念的定義之前，有時在這些定義之後。著者把圖象說明的方法用得十分廣泛，並且藉此力求在教程中有機地輸入函數概念及近世數學上的其他概念。

教本中除了有理論及在課文中所選出的例題之外，教程的每一章還各有一套習題及問題。

著者儘可能使讀者熟悉俄羅斯傑出數學家對科學的貢獻。根據中技數學教學大綱說明書中的建議，我們在好些地方給出簡短的歷史知識。

著者

目 錄

序

第一章 最簡單的函數及其圖象	1
§ 1. 常量與變量	1
§ 2. 變量可能取的值	2
§ 3. 函數與自變量	3
§ 4. 直角坐標系	4
§ 5. 函數的三種基本表示法	8
§ 6. 函數圖象的作法	11
§ 7. 正比例	12
§ 8. 正比例的圖象	12
§ 9. 係數 k 對於正比例圖象的影響	13
§ 10. 反比例	15
§ 11. 反比例的圖象	16
§ 12. 線性函數	17
§ 13. 線性函數的圖象	18
§ 14. 線性函數常項的幾何意義	19
§ 15. 係數 k 對於線性函數的圖象的影響	20
§ 16. 線性函數的根的概念	22
§ 17. 用圖象解線性方程組的例子	22
習題	23
第二章 近似算法	25
§ 18. 近似數及其界限	25
§ 19. 數的四捨五入法	26
§ 20. 準確有效數字	27
§ 21. 絕對誤差及其界限	29
§ 22. 相對誤差及其界限	30
§ 23. 近似數據的算法	32
§ 24. 近似數的加、減法	32

§ 25. 近似數的乘法	35
§ 26. 近似數的除法	36
§ 27. 計算數字的法則	38
§ 28. 按計算數字的法則施行較複雜計算的例子	39
§ 29. 預定準確度的計算法	40
§ 30. 精密計算誤差的概念	42
§ 31. 和與差的絕對誤差	42
§ 32. 積與商的相對誤差	44
§ 33. 用表的計算法	46
§ 34. 線性內插法	47
§ 35. 克雷洛夫院士——工程近似算俄羅斯學派的奠基人	48
習題	49
第三章 不等式	51
§ 36. 前言	51
§ 37. 不等式的基本定義及性質	51
§ 38. 一元一次不等式的解法	54
§ 39. 不等式解法的圖象釋例	56
§ 40. 一個著名的不等式	57
習題	57
第四章 冪與根	59
§ 41. 冪	59
§ 42. 近似數乘方時的誤差	61
§ 43. 根的概念	62
§ 44. 積、商與冪的開方法	63
§ 45. 無理數的概念	64
§ 46. 線段的十進位量法	65
§ 47. 整數與分數的具有預定準確度的開平方方法	67
§ 48. 實數的運算	68
§ 49. 開平方的誤差的估計法	70
§ 50. 算術根的基本性質	72
§ 51. 有理式與無理式(根式)	72
§ 52. 根式的變換	73
§ 53. 根式的運算	76
§ 54. 分母的有理化	79

習題	80
第五章 二次方程	85
§ 55. 二次方程的定義	85
§ 56. 不完全二次方程	86
§ 57. 將完全二次方程變換為形狀 $(x+n)^2 = m^2$ 的方法	87
§ 58. 既約二次方程的根的公式的推求	88
§ 59. 二次方程根的一般公式的推求	89
§ 60. 二次方程根的性质及方程的列法	90
§ 61. 文字係數的二次方程的解法	91
§ 62. 二次方程的研究	92
§ 63. 根據二次方程根的性质而提出的問題的解法	94
§ 64. 關於列二次方程的問題	95
§ 65. 二次方程簡史	97
習題	98
第六章 二次函數	104
§ 66. 引言	104
§ 67. 二次三項式分解為線性因子的方法	105
§ 68. 函數 $y = ax^2$ 的圖象	106
§ 69. 數的圖象開平方法	107
§ 70. 係數 a 的大小對於函數 $y = ax^2$ 的圖象的影響	108
§ 71. 函數 $y = ax^2 + c$ 的圖象	109
§ 72. 函數 $y = (x+m)^2$ 的圖象	110
§ 73. 函數 $y = (x+m)^2 + n$ 的圖象	111
§ 74. 函數 $y = ax^2 + bx + c$ 的圖象	112
§ 75. 二次方程的圖象解法及圖象研究	113
§ 76. 二次三項式的最大直及最小值	116
習題	117
第七章 某幾類高次方程及能化為二次方程的方程	119
§ 77. 方程左邊的因子分解法	119
§ 78. 雙二次方程	120
§ 79. 減根與增根	121
§ 80. 無理方程的增根	122
§ 81. 無理方程的解法	123

§ 82. 二次方程組	125
§ 83. 最簡單的二次方程組的解法	126
§ 84. 方程組的技巧解法	127
§ 85. 方程組的圖象解法	130
§ 86. 高次方程的圖象解法	133
§ 87. 尼·伊·羅巴切夫斯基及其在代數學上的著作	133
§ 88. 逐步近似法	135
習題	136
第八章 級數	140
§ 89. 數列	140
§ 90. 算術級數	142
§ 91. 算術級數任意項的公式	143
§ 92. 算術均值	143
§ 93. 算術級數前 n 項和的公式	144
§ 94. 和 S_n 的幾何解釋	145
§ 95. 應用和 S_n 的公式的例子	146
§ 96. 自然數列的前 n 個數的平方和	147
§ 97. 幾何級數	148
§ 98. 幾何級數任意項的公式	148
§ 99. 幾何均值	149
§ 100. 幾何級數前 n 項的和	150
§ 101. 收斂幾何級數	152
習題	154
第九章 冪這個概念的推廣。指數函數	159
§ 102. 零指數冪	159
§ 103. 負指數冪	159
§ 104. 零指數冪與負指數冪的運算	161
§ 105. 分指數冪	162
§ 106. 分指數冪的運算	164
§ 107. 無理指數冪的概念	166
§ 108. 指數函數	166
§ 109. 指數函數的圖象	167
§ 110. 指數函數的性質	169
習題	170

第十章 對數	172
§ 111. 對數的概念.....	172
§ 112. 反函數的概念.....	173
§ 113. 正函數圖象及反函數圖象間的依賴關係.....	177
§ 114. 對數函數及其圖象.....	178
§ 115. 對數函數的性質.....	179
§ 116. 對數的實用價值.....	180
§ 117. 對數的一般性質.....	181
§ 118. 積與商的取對數法.....	182
§ 119. 對數式的還原法.....	183
§ 120. 十進(常用)對數系.....	183
§ 121. 對數的計算法.....	188
§ 122. 對數的運算.....	190
§ 123. 餘對數.....	192
§ 124. 對數表.....	193
§ 125. 真數表(或反對數表).....	194
§ 126. 線性內插法.....	195
§ 127. 五位對數表.....	196
§ 128. 應用對數計算法的例子.....	197
§ 129. 由一個對數系變到另一個對數系的模.....	200
§ 130. 用對數表計算時所生的誤差.....	200
§ 131. 指數方程.....	202
§ 132. 對數方程.....	204
§ 133. 更複雜的非代數方程的解法.....	205
§ 134. 對數簡史.....	206
習題.....	207
第十一章 對數算尺	213
§ 135. 對數算尺的部件及尺標的名稱.....	213
§ 136. 函數尺標的概念.....	214
§ 137. 對數尺標.....	215
§ 138. 對數尺標的性質.....	217
§ 139. 主尺標上的刻度.....	218
§ 140. 在主尺標(A 及 A_1)上的定數法及讀數法.....	218
§ 141. 用算尺作乘法.....	220

§ 142. 數的位數	221
§ 143. 積的位數的計算法	222
§ 144. 除法	223
§ 145. 乘除法的例子	224
§ 146. 平方尺標上的刻度	225
§ 147. 用平方尺標作乘法及除法的方法	226
§ 148. 數的平方法	227
§ 149. 數的開平方法	228
§ 150. 數的立方法	230
§ 151. 數的開立方法	231
§ 152. 最簡單的混合運算	232
§ 153. 求數的十進對數法	234
§ 154. 用對數算尺從已知對數求真數法	234
§ 155. 用對數算尺的對數尺標作計算的例子	235
§ 156. 比例的解法	237
§ 157. 比例劃分	238
§ 158. 將算尺用作函數表	239
§ 159. 已知直徑計算圓面積的方法及其反算法	240
§ 160. 應用線條 C 解題的例子	241
§ 161. 正弦尺標	242
§ 162. $5^{\circ}44'$ 及 90° 之間角的正弦的求法	242
§ 163. 按位數等於零的正弦值求角法	243
§ 164. $5^{\circ}44'$ 及 45° 間的角的正切的求法	243
§ 165. 按位數等於零的正切求角的方法	244
§ 166. 45° 及 $84^{\circ}17'$ 之間的角的正切的求法	244
§ 167. 求正切的位數等於 1 的角的方法	245
§ 168. 小角(由 $0^{\circ}34'$ 到 $5^{\circ}44'$)的正弦及正切的求法; 正弦或正切的位數 為 -1 的角的求法	245
§ 169. 由 $84^{\circ}17'$ 到 90° 間的角的正切的求法	246
§ 170. 另一求角的正弦及正切與已知角的正弦或正切求角的方法	247
§ 171. 三角形的解法	247
習題	250
第十二章 複利, 結合及二項式	252
§ 172. 複利公式	252

§ 173. 分期償債基金.....	253
§ 174. 確定年金.....	254
§ 175. 結合.....	255
§ 176. 排列.....	255
§ 177. 排列數的公式.....	256
§ 178. 全取排列.....	258
§ 179. 組合.....	258
§ 180. 組合的性質.....	260
§ 181. 牛頓二項式。引言.....	261
§ 182. 只有第二項不相同的二項式的積.....	262
§ 183. 二項式公式的性質.....	264
§ 184. 完全數學歸納法.....	267
習題.....	269
第十三章 複數及其運算.....	271
§ 185. 複數.....	271
§ 186. 複數的幾何表示法.....	272
§ 187. 複數的加法及減法.....	274
§ 188. 複數的幾何加法.....	274
§ 189. 複數的幾何減法.....	276
§ 190. 複數的乘法.....	277
§ 191. 複數的除法.....	278
§ 192. 虛單位的冪.....	279
§ 193. 複數的乘冪.....	280
§ 194. 複數的開平方.....	280
§ 195. 複數的三角形狀.....	282
§ 196. 三角形狀的複數的乘法.....	284
§ 197. 三角形狀的複數的除法.....	285
§ 198. 三角形狀的複數的乘冪.....	285
§ 199. 三角形狀的複數的開方.....	286
習題.....	290
中俄名詞對照表.....	1
俄中名詞對照表.....	4

第一章 最簡單的函數及其圖象[⊖]

§ 1. 常量與變量

研究我們周圍(自然界、技術上、社會生活上)的各種現象和各種過程時,我們必須要處理各種的量(長度、重量、體積、溫度、速度、電流強度、人口密度等等)。

我們從觀察的結果知道,所研究的現象中,有些量是始終保持同一數值的,就是說,它們是不變的,而另一些量則取得不同的數值,它們是可變的。

例 1 物體從某一高度 h 自由下落時,落體的速度及其跟地面的距離是可變的;但,例如物體的質量却保持不變。

例 2 若把圓形金屬板加熱,它的直徑和面積就要改變;但圓板的周長與直徑之比保持不變。

例 3 若三角形 ABC 的頂點 C 在跟底邊 AB 平行的直線上移動,而底邊保持不變(圖 1),則三角形側邊與各角就要變化;但

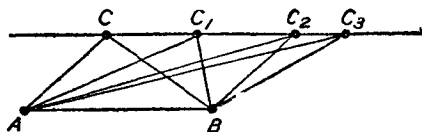


圖 1

三角形的面積及其各內角之和仍保持原值。

在所給問題的條件下,保持同一值的量,叫做常量。

⊖ 譯者註:有的書上叫做“圓形”。

在所給問題的條件下，取得不同值的量，叫做變量。

這樣說來，在上述各例中，落體的質量、圓板的周長與其直徑之比、三角形的面積及其內角之和都是常量；而落體的速度、它跟地面的距離、圓板的直徑、三角形的各角都是變量。

同一個量在某些情況下可看作常量，而在另一些情況下可看作變量。例如鐵的比重是常量，其值等於 7.8。

但若我們要來考慮各種不同的金屬：鉛、銅、錫、鐵、鋅、銀等等，那末這時的比重就成為變量了。

通常用頭幾個拉丁字母 a, b, c, d 等等來記常量，用末後幾個拉丁字母 x, y, z, u, v 等等來記變量。

§ 2. 變量可能取的值

例 1 各種型式的飛機有不同的上昇高度 h ，但每一種型式的飛機有它的“上昇限度”，或者說昇得最高的高度，比方說是 15 公里；飛機要想再往上昇是不可能的。

如果從這種飛機起飛時開始，觀察它的飛行，就可以說：飛機所達高度是個變量，它可能取 0 與 15 公里之間的任何值。

例 2 研究空氣溫度對於某種植物生長情形的影響時，生物學家只在一定的範圍內（比方說從 5°C 到 $35-40^{\circ}\text{C}$ ）來改變溫度，更高或更低的溫度就可能使植物致死。

例 3 凸 n 邊形的內角之和等於 $2d(n-2)$ 。⊖ 這裏 n 只可能取從 $n=3$ 起的正整數值。

例 4 分母可變的分數 $\frac{1}{x}$ ，在 x 為不等於零的任何值時，有一定的數值。

變量 x 在所研究現象的具體條件下所能取的一切值，規定叫做該變量可能取的值。

⊖ 譯者註：式中字母 d 代表一直角， 90° 。以下準此。

§ 3. 函數與自變量

在科學及其無數應用上，所關心的倒不是有變量存在這件事實的本身，而是所給現象中各種變量間的關係；換句話說，我們所關心的是底下的問題：一個量的變化怎樣引起另一個量的變化？例如，讓金屬桿受拉力作用時，由簡單的實驗研究可以發現：負荷增大時，桿長也有一定程度的增大。隨着發動機轉數的變化，飛機的速度也就按一定的規律而變化。

我們來詳細分析幾個簡單的例子。

例 1 已給底為 $a=8$ 公分的矩形。若其高 h 取以下各值：

$$h=1, 1.5, 2, 2.5, 3, 4, \dots(\text{公分}),$$

問這矩形的面積 F 怎樣變化？ $F = a \cdot h$

顯然，面積 F 的對應值將為：

$$8, 12, 16, 20, 24, 32, \dots(\text{平方公分}).$$

例 2 人騎自行車平均每分鐘行 400 公尺。問所行路程 S 怎樣隨時間 t 而變化？

若使時間 t 的值為

$$t=1, 2, 3, 4, \dots(\text{分}),$$

則路程 $S=400, 800, 1200, 1600, \dots(\text{公尺}).$

例 3 均勻運動物體的速度 v 為下列各值時：

$$v=10, 12, 15, 18, 20, 30, \dots(\text{公尺/秒}),$$

經過路程 360 公尺所需的時間要多少？

因運動時間等於所走路程被速度除，故得時間的各值如下：

$$t=36, 30, 24, 20, 18, 12, \dots(\text{秒}).$$

上述各例中都有兩個變量，彼此間有這種關係：其中一個量變化，會引起另一量按一定規律變化。

定義 如果對於變量 x 的每一個可能取的值，都對應着變量

y 的完全確定值，那 y 就叫做另一變量 x 的函數或因變量。變量 x 叫做自變量。

關於變量 x 及 y 兩者，我們說它們有函數依從關係。

拿前面的例子來看，可以說：桿長是拉力（負荷）的函數，飛機速度是發動機轉數的函數。

函數 y 可能依賴於好幾個自變量。例如矩形面積是兩個自變量——矩形的底及高——的函數。直角平行六面體是三個自變量——長、寬及高——的函數。

我們要知道，自變量和因變量這兩個名稱是有條件的。一個變量之為自變量或因變量，是要由問題的具體條件來定的。因變量和自變量的地位常常是可以交換的；可以說，圓面積是半徑的函數，因為對於每個半徑值，對應着圓面積的一定值；但反過來說也是對的：圓半徑是其面積的函數，因為對於圓面積的每個數值，對應着圓半徑的一定值。

§ 4. 直角坐標系

1. 前言 看電影的人可以根據兩個數在電影院中正確地找到他的座位，這兩數便是印在入場券上的排數及該排的號數。

電氣匠會把開關裝在你所需要的地方，如果——比方說——你告訴他下面的事：在窗子右邊距窗 0.5 公尺，距地面高為 1.5 公尺。在上述兩例中，用兩個數可能定出平面上的方位。平面上點的位置的一般定法如下。

在平面上作互相垂直的兩根直線： OX 及 OY ；在每根直線上選取正方向，用箭頭表示（圖 2）。

有向直線 OX 及 OY 叫做坐標軸，而 OX 叫做橫坐標軸， OY 叫做縱坐標軸，軸的交點 O 叫做坐標原點。再選定單位尺標，也就是一根線段 e ，它的長度取作單位。

坐標軸上起點在 O 處的任何線段，對應了一個正數或是負數，那數的絕對值表示線段由所定單位尺標量出的長度，其正負號則指明線段的方向。

在坐標軸正方向上截取的線段對應着正數，在相反方向上截取的線段則對應着負數。

例如，線段 OA 對應着數 $(+4)$ ，線段 OB 對應着數 (-3) ，線段 OD 對應着數 (-5) (圖 2)。

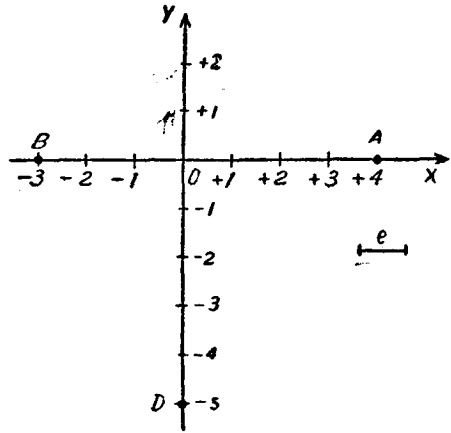


圖 2

設 M 是平面上任意點。如果量出點 M 到坐標軸的距離，它跟坐標軸的相對位置便可定出。為此，我們從點 M 向坐標軸作垂線 MP 及 MQ (圖 3)；在坐標軸上得出兩根線段 OP 及 OQ 。用單位尺標量有向線段 OP ，並使量得的結果具有相應的正負號。得到的數叫做點 M 的橫坐標。

用同一單位尺標量線段 OQ 並使量得的結果取相應的正負號後，得到另一個數，叫做點 M 的縱坐標。

在圖 3 中，點 M 的橫坐標等於 $+2$ ，縱坐標等於 $+3$ 。

橫坐標與縱坐標合起來叫做點的坐標。點 M 的坐標記為 $M(+2, +3)$ ；括弧裏面第一個數總是橫坐標，第二個數總是縱坐標。

應當記住，點的坐標是相對的數；我們要看所給點跟坐標軸的相對位置，來給這數以 $(+)$ 號或 $(-)$ 號。圖 3 中點 M_1 的坐標為：橫坐標等於 $+2$ ，縱坐標等於 -1.5 ；點 M_2 的坐標為：橫坐標等於 -3 ，縱坐標等於 $+2$ ；點 M_3 的坐標為 $(-5, -2)$ 。

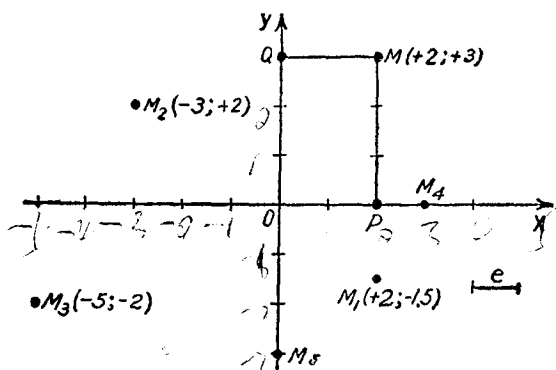


圖 3

在橫坐標軸上，點的縱坐標等於零，如 $M_4(3, 0)$ 。在縱坐標軸上，點的橫坐標等於零，如 $M_5(0, -3)$ 。坐標原點的橫坐標及縱坐標都等於零： $O(0, 0)$ 。

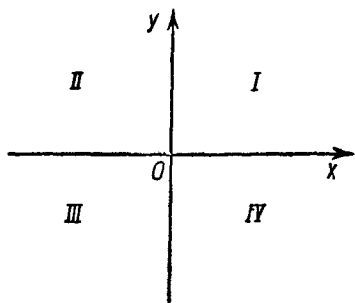


圖 4

為書寫簡便起見，以後規定把正數坐標前面的正號(+)略去：我們以後不寫 $M(+2, +3)$ ，而寫 $M(2, 3)$ ；不寫 $N(-5, +4)$ ，而只寫 $N(-5, 4)$ 。

坐標軸 OX 及 OY 把平面分成四部分，各稱為象限。坐標軸相交而成的四隻角，各稱為坐標角。各象限及各坐標角的排號法，如圖 4 所示。

在各象限內，點各個坐標的正負號如下表：

象 限	橫 坐 標 x	縱 坐 標 y
I	+	+
II	-	+
III	-	-
IV	+	-