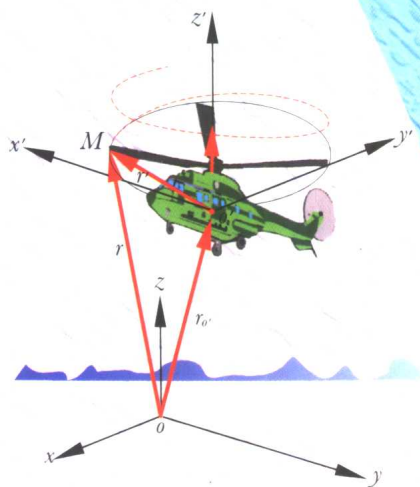




全国基础力学课程教学基地系列教材

理论力学

高等动力学



★ 西北工业大学理论力学教研室 编

★ 和兴锁 主编

西北工业大学出版社

全国基础力学课程教学基地系列教材

理 论 力 学

(高等动力学)

西北工业大学理论力学教研室编

主 编 和兴锁

副主编 支希哲

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书是根据教育部高等工业学校理论力学课程教学的基本要求编写的。它是全国基础力学课程教学基地系列教材《理论力学》的高等动力学部分。全书共七章,分别讲述了动力学Ⅱ、分析力学、工程振动等内容。本书注重分析问题、解决问题的思路及方法,适用于课堂教学。

本书可作为高等工业学校机械、航空、航天、航海、土建、机电和动力等类专业理论力学课程的教材,也可供夜大学、函授大学相关专业及有关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

理论力学:工程静力学、工程动力学、高等动力学/和兴锁
主编. —西安:西北工业大学出版社,2001.6

ISBN 7-5612-1331-X

I. 理... II. 和... III. 理论力学-高等学校-教材 IV. 031

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 15160 号

出版发行:西北工业大学出版社

通信地址:西安市友谊西路 127 号 邮编:710072 电话:029-8493844

网 址: <http://www.nwpup.com>

印刷者:西安电子科技大学印刷厂

开 本:850 毫米×1 168 毫米 1/32

印 张:8.3125

字 数:202 千字

版 次:2001 年 8 月第 1 版 2001 年 8 月第 1 次印刷

印 数:1~2000 册

定 价:12.00 元

前 言



本书是以西北工业大学理论力学教研室历年来编写的各种学时《理论力学》教材为基础编写的。它是全国基础力学课程教学基地模块式《理论力学》教材的动力学Ⅱ、分析力学和工程振动等模块,可作为机械、航空、航天、航海、土建等各专业的理论力学课程教材,也可供有关工程技术人员参考。

在编写过程中,我们参照了国家教育部制订的高等工业学校理论力学教学的基本要求,优化了课程内容,注意了课程的系列化问题,精简了课程的重复部分。在内容选材方面,我们力求坚持理论力学体系的完整性和严密性,定理证明和逻辑推理的严谨性,尽量做到叙述恰当,思路清晰,富于启发性,便于自学;同时坚持理论联系实际,加强了各专业的通用性。书中引伸和加选内容用“*”号标出。

此次编写是在西北工业大学理论力学教研室统一规划和组织下完成的,参加编写工作的有(按章节的顺序)支希哲(第一、三、五章),朱西平(第二、四章),张天舒、高行山(第六章),高行山(第七章)。全书由和兴锁统稿并任主编,支希哲任副主编。

全书由蔡泰信教授主审,吕茂烈教授对本书的编写提出了不少宝贵意见,西北工业大学教材建设科、出版社的领导和编辑们给予许多关心和帮助,在此一并表示感谢。

由于编者水平有限,书中难免存在不妥之处,敬请读者批评指正。

编 者

2001年1月

目 录

第一章 碰撞	1
§ 1-1 碰撞现象及其基本特征	1
§ 1-2 碰撞时的动力学普遍定理	2
§ 1-3 恢复因数	4
§ 1-4 碰撞问题举例	7
§ 1-5 碰撞对定轴转动刚体轴承的作用·撞击中心	12
§ 1-6 碰撞对平面运动刚体的作用	14
习题一	21
第二章 达朗伯原理和动静法	26
§ 2-1 达朗伯原理	26
§ 2-2 惯性力系的简化	27
§ 2-3 动静法的应用举例	32
§ 2-4 定轴转动刚体对轴承的动压力	40
§ 2-5 消除附加动压力的条件·静均衡和动均衡	46
习题二	48
第三章 虚位移原理	57
§ 3-1 概述	57
§ 3-2 约束和约束方程	57
§ 3-3 虚位移·自由度	61
§ 3-4 虚功·理想约束	64
§ 3-5 虚位移原理	65
§ 3-6 广义坐标·广义坐标形式的虚位移原理	72
§ 3-7 质点系在势力场中平衡的稳定性	77

习题三	79
第四章 动力学普遍方程和拉格朗日方程	88
§ 4-1 动力学普遍方程	88
§ 4-2 拉格朗日方程	91
§ 4-3 拉格朗日方程的第一积分	103
习题四	110
* 第五章 哈密顿原理和正则方程	117
§ 5-1 增广位形空间	117
§ 5-2 哈密顿原理	118
§ 5-3 哈密顿正则方程	124
习题五	129
第六章 工程振动基础	133
§ 6-1 引言	133
§ 6-2 单自由度系统的无阻尼自由振动	133
§ 6-3 单自由度线性系统的衰减振动	143
§ 6-4 单自由度线性系统的强迫振动	149
* § 6-5 二自由度系统的自由振动	160
* § 6-6 二自由度系统的强迫振动	169
习题六	172
* 第七章 结构动力特性的基本理论及算法	180
§ 7-1 多自由度系统的振动方程	180
§ 7-2 自振频率和振型	183
§ 7-3 矩阵迭代法	193
§ 7-4 子空间迭代法	201
§ 7-5 矩阵变换方法	211
§ 7-6 动力分析中平衡方程组的解法	231
习题七	248

习题参考答案.....	250
参考文献.....	258

第一章 碰 撞

§ 1-1 碰撞现象及其基本特征

碰撞是一种常见的力学现象。当物体受到急剧的冲击时就发生碰撞。球的弹射和回跳、敲钉、打桩、锤锻、冲压等都是碰撞的实例。

与一般的动力学问题相比较,碰撞问题具有以下基本特征:

碰撞过程的持续时间极短,通常用 10^{-3} s 或 10^{-4} s 来度量。以两个 25 mm 直径的黄铜球间的碰撞为例,当两球以 72 mm/s 的相对法向速度发生碰撞时,由实验测知,碰撞进行的时间只有 2×10^{-4} s。

碰撞时物体间产生巨大的碰撞力。在碰撞持续的极短时间内,相碰物体的位置几乎没有改变,但速度却有显著变化,因此物体的加速度和相互间的作用力(称为碰撞力)都极其巨大。碰撞力作用时间很短,是一种瞬时力,其大小远非平常力如重力、空气阻力等所能比拟。由于碰撞力随时间而变化,瞬时值很难测定,因此,通常是用碰撞力在碰撞时间内的冲量来度量碰撞的强弱。这种冲量称为**碰撞冲量**。

相碰物体必然发生变形,而变形可以引起运动状态(能量)的转化。因此,在绝大多数情况下,碰撞过程中都伴随有机能的损失,它转化为热能或其它形式的能。例如巨大的陨石与地面相碰时,可以发生强烈的声和光。碰撞时物体变形的大小和机械能损

失的程度取决于许多因素,特别是与物体的材料性质(弹性、塑性)有关。

根据碰撞现象的上述基本特征,研究碰撞问题时,可作以下两点基本假设:

(1) 由于碰撞力很大,远非常力所能比拟,故平常力在碰撞过程中的冲量可以忽略不计。

(2) 碰撞时间非常短促,而速度是有限量,两者的乘积非常小,因此在碰撞过程中,碰撞物体的位移可以忽略不计。

§ 1-2 碰撞时的动力学普遍定理

碰撞问题可以应用前面几章所讲的动力学普遍定理来研究,但应采用积分形式,并且平常力在碰撞过程中的冲量均忽略不计。

一、冲量定理

对于质点系内第 i 个质点 M_i , 假设其质量为 m_i , 碰撞开始和结束时的速度分别为 v_i 和 u_i , 碰撞冲量为 S_i , 则由动量定理, 有

$$m_i u_i - m_i v_i = S_i \quad (1-1)$$

把对质点系内各质点列写出的如上方程相加, 注意到质点系内部各质点之间相互碰撞的内碰撞冲量总是大小相等, 方向相反, 成对地存在, 在总和中相互抵消, 因此只剩下外碰撞冲量, 于是得

$$\sum m u - \sum m v = \sum S \quad (1-2)$$

式(1-2)表示了碰撞时质点系的冲量定理。即质点系在碰撞过程中的动量变化, 等于该质点系所受的外碰撞冲量的矢量和。

质点系的动量可以用质点系的总质量 M 与质心速度的乘积来计算, 所以式(1-2)可改写为

$$M u_c - M v_c = \sum S \quad (1-3)$$

式中 v_c 和 u_c 分别是碰撞开始和结束时质点系质心 C 的速度。上式称为碰撞时的质心运动定理。

二、冲量矩定理

根据研究碰撞问题的基本假设,在碰撞过程中,质点系内各质点的位移均可忽略,因此,可用同一矢径 r_i 表示质点 M_i 在碰撞开始和结束时的位置(见图 1-1)。以 r_i 与式(1-1)作矢乘,得

$$r_i \times m_i u_i - r_i \times m_i v_i = r_i \times S_i$$

或者写成

$$m_o(m_i u_i) - m_o(m_i v_i) = m_o(S_i)$$

这里 $m_o(m_i v_i)$ 和 $m_o(m_i u_i)$ 分别代表质点 M_i 在碰撞开始和结束时对点 O 的动量矩; $m_o(S_i)$ 代表碰撞冲量 S_i 对点 O 的矩。把对质点系内各质点列写出的如上方程相加,注意到内碰撞冲量总是成对的作用于质点系,每一对内碰撞冲量对任一点的矩的矢量和恒等于零,因而全部内碰撞冲量之矩的总和也恒等于零。所以只剩下外碰撞冲量的矩;于是得

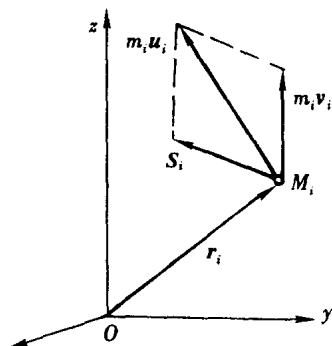


图 1-1

$$\sum m_o(mu) - \sum m_o(mv) = \sum m_o(S) \quad (1-4)$$

把上式投影到任一轴例如 x 轴上,则得

$$\sum m_x(mu) - \sum m_x(mv) = \sum m_x(S) \quad (1-5)$$

式(1-4)和式(1-5)分别表示了碰撞时质点系对点(或对轴)的冲量矩定理,即在碰撞过程中,质点系对任一点(或任一轴)的动量矩的变化,等于该质点系所受外碰撞冲量对同一点(或同一轴)之

矩的矢量和(或代数和)。

由于碰撞过程中伴随有机能损失,因此研究碰撞问题一般不用动能定理。

§ 1-3 恢复因数^①

碰撞过程可以分为两个阶段,由两物体开始接触到两者沿接触面公法线方向相对凑近的速度降到零时为止,这是变形阶段。此后,物体由于弹性而部分或完全恢复原来的形状,两物体重新在公法线方向获得分离速度,直到脱离接触为止,这是恢复阶段。恢复的程度主要取决于相撞物体的材料性质,但也和碰撞的条件(包括物体的质量,形状和尺寸、法向相对速度的大小,以及相撞物体的相对方位等)有关。

碰撞可这样分类:当两物体碰撞时,通过其接触点作一公法线 $n-n$ (见图 1-2),按两碰撞物体的质心 C_1 和 C_2 是否都位于公法线 $n-n$ 上,可将碰撞分为对心碰撞和偏心碰撞,若两质心位于此公法线上时称为对心碰撞,否则称为偏心碰撞。按两碰撞物体接触点的相对速度是否沿该点处的公法线,可将碰撞分为正碰撞和斜碰撞。接触点的相对速度沿公法线的碰撞,称为正碰撞,否则称为斜碰撞。不失一般性,下面以两个光滑球对心斜碰撞的情形为例,介绍恢复因数的概念。

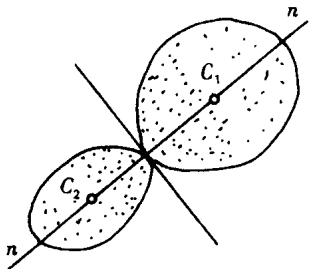


图 1-2

设质量分别为 m_1 和 m_2 的两个光滑球作平动,在某瞬时发生

^① 以前的教材叫恢复系数,现在按新规定,统一改为恢复因数。

对心斜碰撞。假设碰撞开始时,两球的速度分别为 v_1 和 v_2 (见图 1-3(a)), 碰撞结束时,两球仍作平动,其速度分别为 u_1 和 u_2 (见图 1-3(b))。

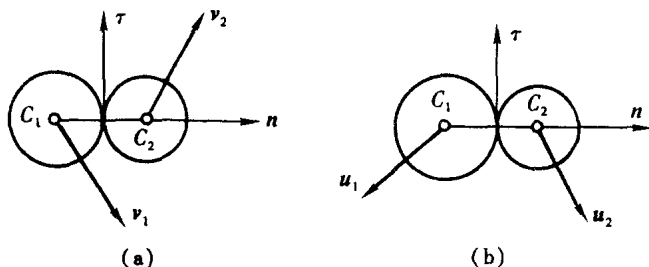


图 1-3

先以两球为研究对象。考察整个碰撞过程,因外碰撞冲量等于零,故由冲量定理,有

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

沿公法线 n 投影,得

$$m_1 u_{1n} + m_2 u_{2n} = m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n} \quad (1-6)$$

再考察碰撞的第一个阶段(变形阶段)。以两球为研究对象,用 u 表示第一阶段结束时两球的公共速度。因外碰撞冲量等于零,故由冲量定理,有

$$(m_1 + m_2)u - (m_1 v_1 + m_2 v_2) = 0$$

沿公法线 n 投影,得

$$(m_1 + m_2)u_n - (m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}) = 0$$

从而求出

$$u_n = \frac{m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}}{m_1 + m_2} \quad (1-7)$$

又分别取两球为研究对象。因为接触面光滑,所以碰撞冲量沿公法线 n 的方向。设质量为 m_1 的球作用于质量为 m_2 的球上的碰

撞冲量为 S_I ,则由冲量定理,有

$$m_1 u - m_1 v_1 = -S_I; \quad m_2 u - m_2 v_2 = S_I$$

沿公法线 n 投影,得

$$m_1 u_n - m_1 v_{1n} = -S_I; \quad m_2 u_n - m_2 v_{2n} = S_I$$

现在考察碰撞的第二个阶段(恢复阶段)。假设这个阶段相应的碰撞冲量为 S_{II} ,则对两球分别利用冲量定理,有

$$m_1 u_1 - m_1 u = -S_{II}; \quad m_2 u_2 - m_2 u = S_{II}$$

沿公法线 n 投影,注意到碰撞冲量 S_{II} 仍沿公法线 n 投影,则有

$$m_1 u_{1n} - m_1 u_n = -S_{II}; \quad m_2 u_{2n} - m_2 u_n = S_{II}$$

恢复阶段与变形阶段碰撞冲量 S_I 和 S_{II} 大小的比值,可以用来度量碰撞后变形恢复的程度,称为恢复因数,用 e 表示,即

$$e = \frac{S_{II}}{S_I} = \frac{u_{1n} - u_n}{u_n - v_{1n}} = \frac{u_{2n} - u_n}{u_n - v_{2n}}$$

利用式(1-6)和式(1-7)消去 u_n ,得

$$e = \frac{S_{II}}{S_I} = \frac{u_{2n} - u_{1n}}{v_{1n} - v_{2n}} = \left| \frac{\text{碰撞结束时的法向相对速度}}{\text{碰撞开始时的法向相对速度}} \right| \quad (1-8)$$

可以证明,对于一般碰撞,恢复因数

$$e = \left| \frac{\text{碰撞结束时接触点的法向相对速度}}{\text{碰撞开始时接触点的法向相对速度}} \right| \quad (1-9)$$

大量的实验表明,恢复因数主要与碰撞物体的材料性质有关,可由实验测定。几种材料的恢复因数见表 1-1。

表 1-1

相碰物体材料	铁对铅	铅对铅	木对胶木	木对木	钢对钢	铁对铁	玻璃对玻璃
恢复因数	0.14	0.20	0.26	0.50	0.56	0.66	0.94

恢复因数一般都小于 1 而大于零,这时的碰撞称为弹性碰撞。物体在弹性碰撞结束时,变形不能完全恢复,动能有损失。理想情

况 $e = 1$ 时,碰撞结束后,物体能完全恢复原来的形状,这种碰撞称为完全弹性碰撞。在另一极端情况 $e = 0$ 时,说明碰撞没有恢复阶段,即物体的变形不能恢复,碰撞结束于变形阶段,这种碰撞称为非弹性碰撞或塑性碰撞。

§ 1-4 碰撞问题举例

应用碰撞时的动力学普遍定理求解碰撞问题,应明确分清三个阶段,即碰撞前阶段、碰撞阶段和碰撞后阶段。碰撞前、碰撞后两个阶段应按照动力学常规问题处理,而对碰撞阶段,则应根据碰撞的特点进行分析和计算。

例 1-1 两个小球的质量分别为 m_1 和 m_2 ,沿着两球中心连线的方向运动如图 1-4 所示,速度分别是 v_1 和 v_2 。假设 $v_1 > v_2$,因而后球在某瞬时赶上前球而发生碰撞。恢复因数为 e ,试求碰撞后两球的速度和碰撞过程中动能的损失。

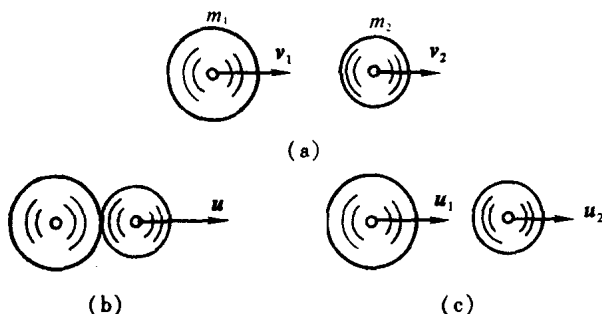


图 1-4

解 此题中两个小球所发生的碰撞为对心正碰撞。考虑两个小球组成的系统,设碰撞结束时,两球的速度分别为 u_1 和 u_2 。整个碰撞过程中,系统的外碰撞冲量等于零,故由冲量定理,有

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad (1)$$

根据恢复因数定义式(1-8),此时有

$$e = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2} \quad (2)$$

联立式(1)、(2),解得

$$u_1 = v_1 - (1 + e) \frac{m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2) \quad (3)$$

$$u_2 = v_2 - (1 + e) \frac{m_1}{m_1 + m_2} (v_2 - v_1) \quad (4)$$

设碰撞前、后系统的动能分别为 T_1 和 T_2 , 则碰撞过程中系统的动能损失为

$$\begin{aligned} \Delta T &= T_1 - T_2 = \\ &= \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right) - \left(\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} m_1 (v_1 - u_1)(v_1 + u_1) + \frac{1}{2} m_2 (v_2 - u_2)(v_2 + u_2) \end{aligned}$$

将式(3)、(4)代入上式,经过化简得两个物体在对心正碰撞过程中的动能损失

$$\Delta T = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 - e^2) (v_1 - v_2)^2 \quad (5)$$

由上式可见,在其它条件相同的情况下,恢复因数 e 越小,碰撞损失的动能越大。对于塑性碰撞, $e = 0$, 碰撞损失的动能最大,而对于完全弹性碰撞, $e = 1$, 系统的动能没有损失。

当一个运动的物体与一个静止的物体发生正碰撞时,假设 $v_2 = 0$, 则 $T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$, 于是由式(5)有

$$\Delta T = (1 - e^2) \frac{m_2}{m_1 + m_2} T_1 = \frac{1 - e^2}{1 + m_1/m_2} T_1 \quad (6)$$

可见,此时当恢复因数一定时,系统的动能损失取决于两碰撞物体质量的比值。

工程实际中,有时希望系统的动能损失越多越好(如锻压),有

时则希望系统的动能损失越小越好(如打桩)。锻压金属时,锻锤与锻件及砧座碰撞时损失的动能用来使锻件变形。动能损失 ΔT 越大,锻件变形就越大,锻压效率就越高,故应使 $m_2 \gg m_1$ 。工程中采用比锻锤重的多的砧座道理就在于此。

例如:假设锻锤的质量为 m ,锻件和砧座的质量 $M = 15m$,恢复因数 $e = 0.6$,则锤锻的效率为

$$\eta = \frac{\text{碰撞过程中系统动能的损失}}{\text{碰撞开始时系统的动能}} = \frac{\Delta T}{T_1} = \frac{1 - e^2}{1 + m/M} = \frac{1 - 0.6^2}{1 + 1/15} = 0.6$$

e 值越小, η 就越大。当锻件炽热时, $e \approx 0$, 此时

$$\eta = \frac{M}{m + M} = \frac{15}{1 + 15} = 0.94$$

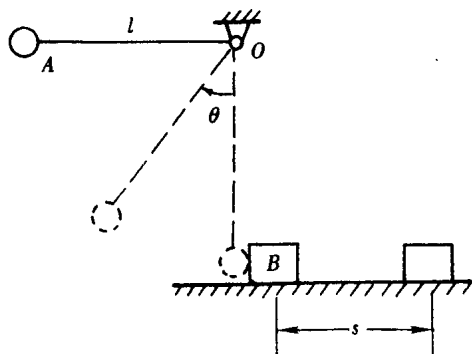
可见效率明显提高,要“趁热打铁”,以便有效地利用这时材料的可塑性就是这个道理。

打桩时,锤与桩碰撞后,应使桩获得较大的动能,以便克服阻力而迅速下沉。动能损失越小,打桩的效率就越高,故应使 $m_1 \ll m_2$ 。因此在工程中应用比桩柱重得多的锤打桩。例如:假设打桩机锤头的质量为 m_1 ,桩柱的质量 $m_2 = m_1/10$,恢复因数 $e = 0$,则打桩的效率为

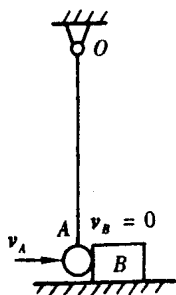
$$\eta = \frac{\text{碰撞结束时系统剩余的动能}}{\text{碰撞开始时系统的动能}} = \frac{T_1 - \Delta T}{T_1} = 1 - \frac{\Delta T}{T_1} = 1 - \frac{1}{1 + m_1/m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} = \frac{1}{1 + 1/10} = 0.91$$

例 1-2 小球 A 的质量 $m_A = 0.5 \text{ kg}$,悬线长 $l = 1.2 \text{ m}$,自图 1-5(a) 所示水平位置无初速释放,当悬线转到图 1-5(b) 所示铅直位置时,小球 A 与质量 $m_B = 1.5 \text{ kg}$ 的静止物块 B 发生弹性碰撞。碰撞结束后悬线可摆回到与铅直线成偏角 $\theta = 15^\circ$ 的位置,而物块 B 沿水平面向前移动了距离 $s = 1.1 \text{ m}$ 而停止。试求小球与

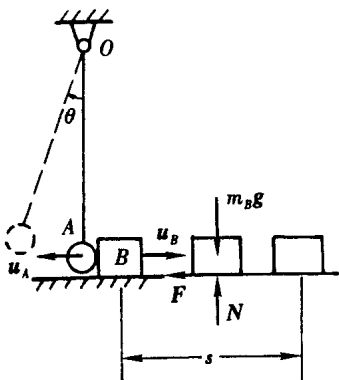
物块碰撞的恢复因数,以及物块与水平面间的摩擦因数。



(a)



(b)



(c)

图 1-5

解 本题可分为碰撞前、碰撞和碰撞后三个阶段,分别进行分析计算。

(1) 碰撞前阶段。这个阶段是悬线由水平位置摆到铅直位置的过程。取小球A为研究对象,它受重力和悬线拉力(图中未画出)的作用,初速度为零。刚与物块B开始接触瞬时,速度为 v_A 。根据