应用数学丛书

陆传务　林化夷 编

矢量和张量及其应用

華中工學院出版社

矢量和张量及其应用

陆传务　林化夷　编

华中工学院出版社

内　容　简　介

随着科学技术的发展，矢量与张量的应用日趋广泛。本书简明扼要又比较完整地阐述了矢量与张量的基本概念与理论及其在微分几何、场论、力学、电动力学中的应用。

本书可作为理工科大学生的补充读物或参考书；可供工程技术人员、工科研究生和青年教师以及其他数学爱好者阅读。

矢量和张量及其应用

陆传务　林化夷编

责任编辑　陈礼琣

*

华中工学院出版社出版

（武昌喻家山）

湖北省新华书店发行　各地新华书店经售

华中工学院印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/32　印张：5.25　字数：118,000

1983年12月第一版　1983年12月第一次印刷

印数1—10,000

统一书号：13255-021　定价：0.70元

前　言

矢量法和张量计算不仅在物理、力学、电磁学等学科中是重要的数学工具，就是对数学本身也是重要的。矢量法在高等数学中只介绍过一些基本的运算法则，关于进一步的应用则讲得很少，但这个部分对工科的学生和工程技术人员来说是很重要的，目前有关这方面的参考书却很少；至于比较通俗易懂的有关张量的参考书则更少，而工科学生在大学中又没有学时来学这个内容。编写本书的目的，就是为了弥补这个不足。当然，要编好一本既通俗又有一定深广度的小册子也是不容易的。限于编者的水平，书中的缺点和错误在所难免，恳切希望广大读者批评指正。

编者要对华中工学院出版社（包括印刷厂）的领导和同志们给本书出版的关心和支持表示感谢，特别要对编辑部的陈礼瑢同志所付出的细致与辛勤的劳动深表诚挚的谢意。

编　　者

一九八三年四月于武汉

目　　录

第一章　矢量法

第二章 张 量

第一章　矢　量　法

1.1　矢量代数和微积分

矢量是既有大小又有方向的量，它的物理模型是力、速度等等．相反，温度、质量等物理量，只有大小，没有方向，这样的量叫标量或数量．研究矢量的方法有三种，即几何法、分析法和公理法．我们采用的方法是前二者．特别是分析法，是我们论述的重点．在此基础上介绍矢量法在各个方面的应用．

1.1.1　矢量的线性运算

由于矢量的物理模型是力、速度等等，故矢量的线性运算，同力学一样，也是符合平行四边形法则的．另外，数学中研究的矢量都是自由矢量，即任一矢量可任意平行移动．矢量的线性运算指的是加法和数量乘．由平行四边形法则，不难知道，矢量的线性运算符合下列**法则**：

交换律　　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

结合律　　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，

$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

分配律　　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$，

$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$．

设点 P 的坐标为 (x,y,z)，则 $\boldsymbol{OP}=\boldsymbol{r}$ 叫**径矢量**. $\boldsymbol{OP}$ 大小的平方为 $|\boldsymbol{OP}|^2=x^2+y^2+z^2$，$\boldsymbol{OP}$ 的方向由 $\boldsymbol{OP}$ 与三个坐标轴正向的夹角 $0\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant\pi$ 所确定（如图1—1.1），且有

$$\cos\alpha=\frac{x}{r},\quad \cos\beta=\frac{y}{r},\quad \cos\gamma=\frac{z}{r},$$

$$r=|\boldsymbol{OP}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

以及 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$. 因此 x,y,z 又分别叫做 $\boldsymbol{OP}=\boldsymbol{r}$ 在三个坐标轴上的投影，记为

$$x=\mathrm{proj}_x\boldsymbol{r},\quad y=\mathrm{proj}_y\boldsymbol{r},$$

$$z=\mathrm{proj}_z\boldsymbol{r}.$$

如果在三个坐标轴分别取单位矢，特记作 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，则有 $\boldsymbol{OP}=\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$.

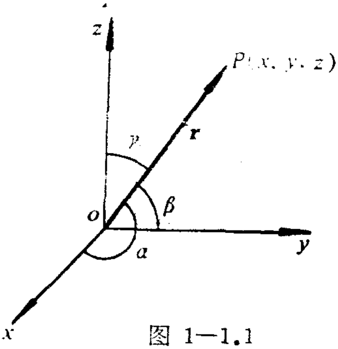

图 1—1.1

由于点 P 与数组 (x,y,z) 和径矢 $\boldsymbol{r}$ 都是一一对应的，故点 P 既可表为 $P(x,y,z)$，又可表为 $P(\boldsymbol{r})$. 设有点 $P(\boldsymbol{r}_1)$ 和 $Q(\boldsymbol{r}_2)$，而

$$\boldsymbol{r}_1=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{r}_2=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k},$$

则有 $$\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}.$$

矢量的这种坐标表示法，对于研究有关问题是很方便的. 例如，求线段 PQ 的中点的坐标. 设中点 R 的坐标为 (x,y,z)，则有 $R(\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$. 因 $\boldsymbol{PR}=\boldsymbol{RQ}$，故得 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}$，即

$$\boldsymbol{r}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2)=\frac{1}{2}(x_2+x_1)\boldsymbol{i}+\frac{1}{2}(y_2+y_1)\boldsymbol{j}+\frac{1}{2}(z_1+z_2)\boldsymbol{k},$$

故中点 R 的坐标为

$$x=\frac{1}{2}(x_1+x_2),\ y=\frac{1}{2}(y_1+y_2),\ z=\frac{1}{2}(z_1+z_2).$$

又如设平行四边形 $ABCD$ 的四顶点的矢量表示分别为 $A(\boldsymbol{r}_1)$，$B(\boldsymbol{r}_2)$，$C(\boldsymbol{r}_3)$ 和 $D(\boldsymbol{r}_4)$．求证对角线 AC 与 BD 互相平分．

由前知道 AC 的中点坐标为 $\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_3)$，$BD$ 的中点坐标为 $\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_4)$。要证对角线 AC 与 BD 互相平分，即要证 $\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_3)=\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_4)$。因为 $\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{AD}$，即 $\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_4-\boldsymbol{r}_1$，故 $\boldsymbol{r}_3+\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_4+\boldsymbol{r}_2$，因而 $\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_3)=\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_4)$．所以对角线 AC 与 BD 互相平分．

1.1.2 矢量的乘法

矢量的乘法有两种，一种叫点乘，乘积是一个数量；另一种叫叉乘，乘积是一个矢量．点乘的物理模型是力作功，叉乘的物理模型是力矩．

设有矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$。则定义点乘为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=|\boldsymbol{a}|\mathrm{proj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{proj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}.$$

点乘符合下列**法则**：

交换律 $\quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

结合律 $\quad \lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$；

分配律 $\quad \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$。

并有

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|},$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2.$$

按上定义，对于单位矢 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 有

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1,$$

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0.$$

故当 $\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$ 时，

则有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$。

由不等式 $|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})|=\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}\leqslant 1$，

得

$$(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2\leqslant(x_1^2+y_1^2+z_1^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2).$$

这个不等式叫作 Schwarz 不等式。它可推广为

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\,y_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right).$$

由上定义可得，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，即

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0.$$

矢量的叉乘定义为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，它是一个矢量，同时与 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 正交，且按右手法则，从 $\boldsymbol{a}$ 转到 $\boldsymbol{b}$ 时，姆指的方向为矢量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方向，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的大小为 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$：

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}).$$

矢量的叉乘符合下列**法则**：

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a};$$

$$\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b});$$

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c};$$

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=0.$$

按上定义，对于单位矢 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，有

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0,$$

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i},$$

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{j}.$$

于是当 $\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$ 时，

有
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\times(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})\\&=(y_1z_2-y_2z_1)\boldsymbol{i}+(z_1x_2-z_2x_1)\boldsymbol{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\boldsymbol{k}\\&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

三个矢量的混合积，有的有意义，有的没有意义．例如 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$，$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 等都没有意义，而

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}$$

才有意义．式中 $\boldsymbol{c}=x_3\boldsymbol{i}+y_3\boldsymbol{j}+z_3\boldsymbol{k}$．又

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$

及 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ 都有意义，但未必相等，因为

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}&=-\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=-[(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}]\\&=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a},\end{aligned}$$

这表明叉乘未必符合结合律．

1.1.3 矢值函数

把矢量代数和微积分法结合起来，对于研究几何、力学和电学等问题是极为方便的．为此先介绍矢值函数．

设有函数 $\boldsymbol{F}(t)$，t 为一实变量．若对于每个 t，相应的函数值均表一矢量．那么，这样的函数 $\boldsymbol{F}(t)$ 就叫作**矢值函数**．它实际上是一个变矢量，因此可写成

$$\boldsymbol{F}(t)=f_1(t)\boldsymbol{i}+f_2(t)\boldsymbol{j}+f_3(t)\boldsymbol{k},$$

式中 $f_i(t)$ $(i=1,2,3)$ 均为数值函数．

例 矢值函数 $\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$，它代表空间中的一曲线 C，其参数方程为

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t).$$

如 $\boldsymbol{r}(t)\equiv\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{l}t$ 表示过点 $P_0(\boldsymbol{r}_0)$ 且平行于定矢量 $\boldsymbol{l}$ 的直线，式中 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\boldsymbol{l}$ 均为定矢量；又如矢值函数

$$\boldsymbol{r}(t)=a\cos t\boldsymbol{i}+a\sin t\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k},$$

它表示以 a 为半径的圆柱面上的螺线 C。这样的函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 叫作**单元矢值函数**。它的几何图形是空间的曲线。再如矢值函数

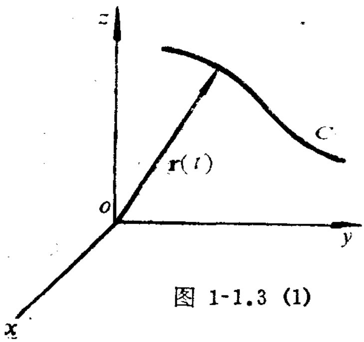

图 1-1.3 (1)

$$\boldsymbol{r}(t,z)=a\cos t\boldsymbol{i}+a\sin t\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

表示以 a 为半径的圆柱面；矢值函数

$$\boldsymbol{r}(\varphi,\theta)=R\sin\varphi\cos\theta\boldsymbol{i}+R\sin\varphi\sin\theta\boldsymbol{j}+R\cos\varphi\boldsymbol{k}$$

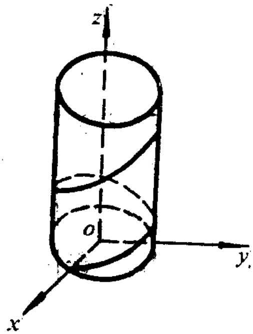

图 1-1.3 (2)

表示以 R 为半径的球面，它们的参数方程分别为

$$\begin{cases}x=a\cos t;\\ y=a\sin t;\\ z=z,\end{cases}\quad(\text{圆柱面})；\qquad \begin{cases}x=R\sin\varphi\cos\theta;\\ y=R\sin\varphi\sin\theta;\\ z=R\cos\varphi,\end{cases}(\text{球面}),$$

其中 t 和 z，φ 和 θ 都是独立的实变量，变量的个数等于曲面的自由度即等于 2．这样的矢值函数就叫作**二元矢值函数**．

它们的几何图形是空间曲面。

下面主要讨论单元矢值函数的微积分法。

设 $\boldsymbol{F}(t)$ 和 $\boldsymbol{G}(t)$ 都是单元矢值函数，$u(t)$ 为数量函数，它们有公共的定义域 $\boldsymbol{D}$。定义下列新的矢值函数为

$$(\boldsymbol{F}\pm\boldsymbol{G})(t)=\boldsymbol{F}(t)\pm\boldsymbol{G}(t);\quad (u\boldsymbol{F})(t)=u(t)\boldsymbol{F}(t);$$

$$(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G})(t)=\boldsymbol{F}(t)\cdot\boldsymbol{G}(t);\qquad (\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G})(t)=\boldsymbol{F}(t)\times\boldsymbol{G}(t);$$

$$\boldsymbol{G}(t)=(\boldsymbol{F}\circ u)(t)=\boldsymbol{F}(u(t)).$$

定义 1 设有矢值函数 $\boldsymbol{F}(t)=f_1(t)\boldsymbol{i}+f_2(t)\boldsymbol{j}+f_3(t)\boldsymbol{k}$，若右边各项的极限都存在，则

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{F}(t)=\lim_{t\to t_0}f_1(t)\boldsymbol{i}+\lim_{t\to t_0}f_2(t)\boldsymbol{j}+\lim_{t\to t_0}f_3(t)\boldsymbol{k}.$$

如果 $\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{F}(t)=\boldsymbol{F}(t_0)=f_1(t_0)\boldsymbol{i}+f_2(t_0)\boldsymbol{j}+f_3(t_0)\boldsymbol{k}$，

则称 $\boldsymbol{F}(t)$ 在 t_0 处是连续的。

定义 2 以下二式只要右边有意义，等式就成立，即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}'(t)&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}(\boldsymbol{F}(t+\Delta t)-\boldsymbol{F}(t))\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f_1(t+\Delta t)-f_1(t)}{\Delta t}\boldsymbol{i}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f_2(t+\Delta t)-f_2(t)}{\Delta t}\boldsymbol{j}\\&\quad+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f_3(t+\Delta t)-f_3(t)}{\Delta t}\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

和 $\displaystyle\int_a^b\boldsymbol{F}(t)dt=\left(\int_a^b f_1(t)dt\right)\boldsymbol{i}+\left(\int_a^b f_2(t)dt\right)\boldsymbol{j}+\left(\int_a^b f_3(t)dt\right)\boldsymbol{k}.$

由上面的定义可知，矢值函数的微积分法实际上就是它的三个投影的数值函数的微积分法。故许多数值函数的微积分法则和结论均可推广到矢值函数上去。例如，当 $\boldsymbol{F}(t)$ 和 $\boldsymbol{G}(t)$，以及 $u(t)$ 均可微时。则有

$$(\boldsymbol{F}(t)\pm\boldsymbol{G}(t))'=\boldsymbol{F}'(t)\pm\boldsymbol{G}'(t);$$
$$(u\boldsymbol{F})'(t)=u'(t)\boldsymbol{F}(t)+u(t)\boldsymbol{F}'(t);$$
$$(\boldsymbol{F}(t)\cdot\boldsymbol{G}(t))'=\boldsymbol{F}'(t)\cdot\boldsymbol{G}(t)+\boldsymbol{F}(t)\cdot\boldsymbol{G}'(t);$$
$$(\boldsymbol{F}(t)\times\boldsymbol{G}(t))'=\boldsymbol{F}'(t)\times\boldsymbol{G}(t)+\boldsymbol{F}(t)\times\boldsymbol{G}'(t);$$
$$(\boldsymbol{F}\circ u)'(t)=\boldsymbol{F}'(u(t))u'(t).$$

若 $\boldsymbol{F}(t)$和 $\boldsymbol{G}(t)$在$[a,b]$上可积，则有

$$\int_a^b(c_1\boldsymbol{F}(t)+c_2\boldsymbol{G}(t))dt=c_1\int_a^b\boldsymbol{F}(t)dt+c_2\int_a^b\boldsymbol{G}(t)dt;$$
$$\int_a^b\boldsymbol{F}(t)dt=\int_a^c\boldsymbol{F}(t)dt+\int_c^b\boldsymbol{F}(t)dt;$$
$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\int_a^b\boldsymbol{F}(t)dt=\int_a^b\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{F}(t)dt,$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 为一定矢量。另外，还有

$$\left|\int_a^b\boldsymbol{F}(t)dt\right|\leqslant\int_a^b|\boldsymbol{F}(t)|dt.$$

以上各式均可通过相应矢量的分量来证明。下面证明最后一个不等式

设 $\boldsymbol{\alpha}=\int_a^b\boldsymbol{F}(t)dt$，则有

$$\begin{aligned}0\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|^2&=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}\cdot\int_a^b\boldsymbol{F}(t)dt=\int_a^b\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{F}(t)dt\\&\leqslant\left|\int_a^b\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{F}(t)dt\right|\leqslant\int_a^b|\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{F}(t)|dt\\&\leqslant\int_a^b|\boldsymbol{\alpha}|\cdot|\boldsymbol{F}(t)|dt=|\boldsymbol{\alpha}|\int_a^b|\boldsymbol{F}(t)|dt,\end{aligned}$$

故当 $\boldsymbol{\alpha}\neq0$时，有$|\boldsymbol{\alpha}|=\left|\int_a^b\boldsymbol{F}(t)dt\right|\leqslant\int_a^b|\boldsymbol{F}(t)|dt$。当 $\boldsymbol{\alpha}=0$时，此式显然也成立。

1.1.4 矢值函数的映射性

当把数值函数看作映射时，它是实数轴到实数轴间的映

射。例如，$f_1(x)=\sin x$ 把$(-\infty,\infty)$映射到$[-1,1]$上；$f_2(x)=x^2$ 把$(-\infty,\infty)$映到$[0,\infty)$上；$f_3(x)=\arcsin x$ 把$[-1,1]$映射到$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$上。而矢值函数 $\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$，则是把实数轴映射到空间曲线 C 上，而 C 的参数方程为

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t)。$$

例如，$\boldsymbol{r}(t)=a\cos t\boldsymbol{i}+a\sin t\boldsymbol{j}+ct\boldsymbol{k}$ 把$(-\infty,\infty)$映射到圆柱螺线 C 上，并且曲线 C 的弧长的微分 ds 与数轴上线段的微分 dt 之间有关系式

$$ds=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt。$$

只要数值函数 $x(t)$，$y(t)$ 和 $z(t)$ 都是可微的，这个公式对一般的矢值函数 $\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$ 就都成立。这是单元矢值函数在映射上的特征。

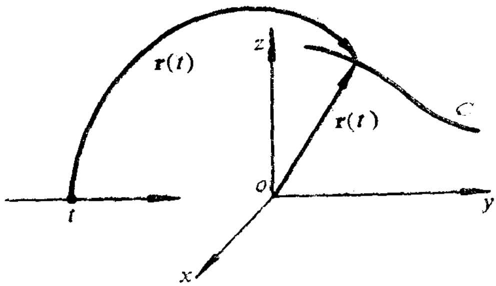

图 1—1.4(1)

设有二元矢值函数 $\boldsymbol{r}(u,v)=X(u,v)\boldsymbol{i}+Y(u,v)\boldsymbol{j}$，它把 uv 平面中的一点(u,v)映射到 xy 平面中的一点(x,y)。因此把 uv 平面中的域 T 映射到 xy 平面中的域 S，如图1—1.4(2)所示。如果映射是一一对应的，则有反变换

$$\begin{cases}u=U(x,y);\\ v=V(x,y)\end{cases}$$

把 S 一一地映射到 T 上。

设 $X(u,v)$ 和 $Y(u,v)$ 都是连续可微函数，如图1—1.4(3)所示，这表明 uv 平面中的长方域 $\Delta u\Delta v$ 被映射成 xy 平面中的曲边形域。它的面积为

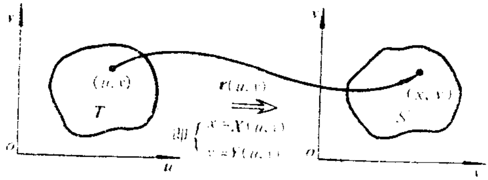

图 1—1.4(2)

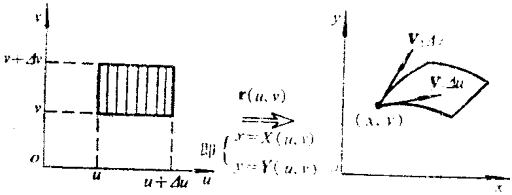

图 1—1.4(3)

$$|\boldsymbol{V}_1\Delta u\times\boldsymbol{V}_2\Delta v|=|\boldsymbol{V}_1\times\boldsymbol{V}_2|\Delta u\Delta v=|J(u,v)|\Delta u\Delta v,$$

式中，
$$\boldsymbol{V}_1=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}=\frac{\partial X}{\partial u}\boldsymbol{i}+\frac{\partial Y}{\partial u}\boldsymbol{j};$$

$$\boldsymbol{V}_2=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}=\frac{\partial X}{\partial v}\boldsymbol{i}+\frac{\partial Y}{\partial v}\boldsymbol{j};$$

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial X}{\partial u} & \dfrac{\partial Y}{\partial u}\\ \dfrac{\partial X}{\partial v} & \dfrac{\partial Y}{\partial v}\end{vmatrix};\quad \boldsymbol{V}_1\times\boldsymbol{V}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial X}{\partial u} & \dfrac{\partial Y}{\partial u} & 0\\ \dfrac{\partial X}{\partial v} & \dfrac{\partial Y}{\partial v} & 0\end{vmatrix}=J\boldsymbol{k}.$$

故有重积分的一般变换式

$$\iint\limits_S f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_T f(X(u,v),Y(u,v))\,|J|\,dudv.$$