高等學校教學用書

線代數基礎

А. И. МАЛЬЦЕВ 著
柯召 譯

商務印書館

高等學校教學用書

線代數基礎

A. И. 馬力茨夫著
柯召譯

商務印書館

本書係根據蘇聯技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико—теоретической литературы）出版的馬力茨夫（А. И. Мальцев）著"線代數基礎"（Основы линейной алгебры）1948年版譯出。可爲我國大學數學專業、力學專業二年級、高等代數課程的教本和高等師範學校數學系二年級高等代數課程的主要參考書。

蘇聯國立大學數學專業的高等代數課程共授三學期，第一學年第一學期每週四小時，第二學期每週三小時，第二學年第一學期每週三小時，共演講100小時，課堂練習70小時，其教學大綱分十四部分，其中第十部分爲任意域上向量空間的線性變換，第十一部分爲多項式矩陣，第十二部分爲矩陣的標準形式，第十三部分爲歐幾里得空間和U空間，第十四部分爲正交和對稱變換。此五部分係在第三學期中講授可用本書及伊.蒙.蓋爾仿達的"線代數學"爲教本。至於其前九部分在第一學年中講授可用阿.伊.庫洛什的"高等代數"及爾.耶.奧庫涅夫的"高等代數"爲教本。

線代數基礎

柯　召　譯

商　務　印　書　館　出　版
上海河南中路二一一號
（上海市書刊出版業營業許可證出字第〇二五號）
新　華　書　店　總　經　售
春　明　印　書　館　印　刷
上海新昌路四八一弄二號
（52251）

1953年9月初版　1954年7月再版
版面字數287,000（12開第2次印）4,001—7,000
定價￥20,000

原　　序

本書是以著者在伊凡諾夫國立師範學院授課的講稿爲基礎的。但現在有許多部分已經增加很多,本書目前的形式可以爲師範學院或大學內線代數課程的教本,學者祇要有行列式論和線方程組理論的基礎知識,卽能閱讀。至於閱讀本書必須知道的矩陣計算的簡單知識,已在第一章中予以介紹性的敍述。

在線代數佔有教學計劃中不過多的時數內於必要時可將一部分材料在講授中略去。書中各部分,有些是彼此無關的。例如讀過一般性的第一至三章與第四章的前兩節後,卽可直接進入第七至八章中所述的 U 空間與歐幾里得空間的理論,此後可再來研究若唐法式(第四章)和初級因子的理論(第五章)。在第九與第十章中,給予比平常詳細得多的純粹用幾何方法討論的二次型和二次型耦的理論。第六章的性質比較特殊,討論矩陣計算的更細緻的一些問題。

在本書末尾,有一簡短的文獻目錄,把對本書內容直接有影響的書籍列舉出來,其中特別要提出的是:撥·阿·什洛可夫教授的"張量分析"一書。

最後,著者對於所有對本書的完成曾有所指示或贊助的人士,都致以衷心的感謝,其中特別是阿·格·庫洛什教授的創議與鼓舞,和阿·伊·潑連斯涅爾教授對於稿件的閱讀,且提出了很多重要的意見,一部分在校訂本書時已經予以考慮。

馬列茨夫.

目　錄

線代數基礎

第一章 矩陣

§1. 域

在解決各種問題時,我們常須用到數的概念,但是隨所研究的問題的不同或與其所屬的科學部門的不同,要用到不同的數的集合。在常用的數的集合中,最多遇見的是所有複數的集合,但亦常常僅用實數的集合,卽已足夠,例如在很多種幾何學中,卽是如此。有時我們又無須乎用及全部實數,祇要用及它的一部分,例如有理數部分,卽已足夠。總之,在解決某一問題時,常常很自然的告訴你僅須用及複數的某一肯定的部分。在很多情形中,我們所需要的數的集合,要有這樣的性質,就是這一集合中任何兩個數的和、差、積和商(0除除外)仍舊在這一個集合裏面。例如所有複數的集合,所有實數的集合,所有有理數的集合,都有這樣的性質。複數集合裏面,還有其他很多的部分集合,含有這樣的性質,所有這種樣子的數的集合我們叫做數域。

在本書內,基本目的是硏究線性空間所表現的性質,它與數的概念有密切的關係。因此,爲了使線性空間的理論更普遍,可以廣泛的應用到各種問題上去,我們不先指定某一種固定的數,例如複數、實數或其他的某一種數。我們用任意的數域K來代替它們,K裏面的元素我們稱爲數,以後用小寫的希臘字母來代表。

1. 數域 我們給數域以次之眞確定義:複數的某一集合,至少含

有兩個不同的數，而且其中任二數的和、差、積及商（0除除外）仍在此集合中時，稱此集合為一數域。

前面已經提出一些重要的數域，就是所有複數、實數或有理數的數域。有理數域為所有數域中的最小數域，是卽，任一數域內都含有全部有理數。事實上，假設任一已予數域為 K。由定義，知 K 中至少有兩個不相等的數，故 K 必至少含有一數不等於零，表此數為 α。商 $\frac{\alpha}{\alpha}$ 必在 K 中，是卽 K 含有數1。今旣1在 K 中，必含有 $1-1=0$, $0-1=-1$, $-1-1=-2$, $1+1=2$, $2+1=3$，等等。因此，全部整數均在 K 中。又因二整數之商（分母不為零者）均在 K 中，故 K 必含有全部有理數。

除開上面已經說過的數域以外，如所有 $\alpha+\beta i$ 型的數，其中 $i=\sqrt{-1}$，α, β 為有理數者構成一數域。所有 $\alpha+\beta\sqrt{2}$ 型的數，其中 α, β 為有理數者亦成一數域。此外還有其他的數域。

2．多項式 域 K 上文字 λ 的多項式係指次之表示式：

$$\alpha_0\lambda^n+\alpha_1\lambda^{n-1}+\cdots+\alpha_n,$$

其中 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 均在 K 中。如 $\alpha_0\neq 0$，則稱 n 為此多項式的次數。當且僅當二多項式的 λ 的同次項的係數均相等時，始稱此二多項式相等。我們常常用 $f(\lambda)$, $\varphi(\lambda)$ 等等來表 λ 的多項式。如在任一係數在 K 中的多項式 $\varphi(\lambda)$ 中，以 K 中的數 β 代 λ，經計算後可得 K 中的一數 $\varphi(\beta)$。若 $\varphi(\beta)=0$，則稱 β 為 $\varphi(\lambda)$ 之根。

我們按照平常的規則來加起、減去、或乘出兩個多項式。設 $\varphi(\lambda)$, $\psi(\lambda)$ 為係數在 K 中的兩個多項式，則 $\varphi(\lambda)+\psi(\lambda)$, $\varphi(\lambda)-\psi(\lambda)$ 與 $\varphi(\lambda)\cdot\psi(\lambda)$ 的係數亦必均在 K 中，因為它們的係數是由 $\varphi(\lambda)$ 與 $\psi(\lambda)$ 的係數經過有限次相加、相減、相乘後所得出，故必仍在域 K 中。在普通代數課程中，我們熟知任一 λ 的多項式可被另一 λ 的多項式帶餘相

除。換言之，對任何一對多項式 $\varphi(\lambda)$，$\psi(\lambda)$，我們可以找到兩個多項式 $q(\lambda)$ 與 $r(\lambda)$，使其適合等式

$$\varphi(\lambda)=\psi(\lambda)q(\lambda)+r(\lambda),$$

其中 $r(\lambda)$ 如不爲零，則其次數少於 $\psi(\lambda)$ 的次數。多項式 $q(\lambda)$，$r(\lambda)$ 稱爲 $\varphi(\lambda)$ 被 $\psi(\lambda)$ 所除後的商式與餘式。$q(\lambda)$ 與 $r(\lambda)$ 由 $\varphi(\lambda)$ 與 $\psi(\lambda)$ 所唯一確定，而其係數則由 $\varphi(\lambda)$ 與 $\psi(\lambda)$ 的係數，經由有限次加、減、乘、除所得出。因此，如 $\varphi(\lambda)$，$\psi(\lambda)$ 的係數均在域 K 中，則其商式、餘式的係數亦必均在 K 中。

如 $\varphi(\lambda)$ 被 $\psi(\lambda)$ 所除後，餘式爲零，則稱 $\psi(\lambda)$ 除盡 $\varphi(\lambda)$。設 $\psi(\lambda)$ 除盡 $\varphi(\lambda)$，a 爲任一不等於零的數，則 $a\psi(\lambda)$ 亦必除盡 $\varphi(\lambda)$，因如

$$\varphi(\lambda)=\psi(\lambda)q(\lambda),$$

顯然有

$$\varphi(\lambda)=a\psi(\lambda)\cdot\frac{1}{a}q(\lambda)。$$

當 $\psi(\lambda)$ 同時除盡多項式 $\varphi_1(\lambda)$，$\varphi_2(\lambda)$，…時，叫 $\psi(\lambda)$ 爲它們的公因式。公因式中次數最大者稱爲最大公因式。設 $a\neq0$ 而 $\psi(\lambda)$ 爲 $\varphi_1(\lambda)$，$\varphi_2(\lambda)$，… 的最大公因式，則 $a\psi(\lambda)$ 亦爲其最大公因式。因此，最大公因式常常有無窮多個。但是它們彼此之間僅差一常數因子。在這些最大公因式中間有一個且僅有一個，它的首項係數爲 1。我們稱它爲標準最大公因式。

我們可以用熟知的輾轉相除法來求出兩個多項式的最大公因式。對於這一個方法來說，我們知道最大公因式 $\psi(\lambda)$ 的係數是從 $\varphi_1(\lambda)$，$\varphi_2(\lambda)$ 的係數經由有限次的加、減、乘、除所得出。故如 $\varphi_1(\lambda)$，$\varphi_2(\lambda)$ 的係數均在某一域 K 中，則其最大公因式 $\psi(\lambda)$ 的係數亦必在 K 中。除 $\psi(\lambda)$ 以其首項係數，卽得 $\varphi_1(\lambda)$，$\varphi_2(\lambda)$ 的標準最大公因式。因此，係數在域 K 中的二多項式的標準最大公因式的係數仍在 K 中。

以後我們提到最大公因式時都是指的標準最大公因式。

係數在域 K 中的多項式 $\varphi(\lambda)$，如不能表為係數在 K 中次數較低的多項式的乘積時，稱為對 K 不可約，或稱 $\varphi(\lambda)$ 為 K 上不可約多項式。易知任一多項式可表為不可約多項式的乘積。設 $\varphi(\lambda)$ 的首項係數為 1，且

$$\varphi(\lambda)=\psi_1(\lambda)\psi_2(\lambda)\cdots\psi_m(\lambda), \qquad (1)$$

其中 $\psi_1(\lambda)$, $\cdots$, $\psi_m(\lambda)$ 均對 K 不可約。❶ 設 $\psi_i(\lambda)$ 的首項係數為 $\alpha_i(i=1, 2, \cdots, m)$，則(1)式可改寫如次：

$$\varphi(\lambda)=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m\left[\frac{1}{\alpha_1}\psi_1(\lambda)\right]\cdots\left[\frac{1}{\alpha_m}\psi_m(\lambda)\right]。$$

方括弧中諸多項式的首項係數均為 1，故其乘積的首項係數亦必為 1。但 $\varphi(\lambda)$ 的首項係數為 1，故必 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m=1$。因此域 K 上任一首項係數為 1 的多項式可表為 K 上首項係數為 1 的不可約多項式的乘積。由最大公因式的性質，我們知道如不計次序時，這種分解式僅有一種。設

$$\varphi(\lambda)=\chi_1(\lambda)\chi_2(\lambda)\cdots\chi_m(\lambda),$$

其中 $\chi_1(\lambda),\cdots,\chi_m(\lambda)$ 為 K 上不可約多項式且其首項係數均為 1。併合其相同的因式，可得

$$\varphi(\lambda)=[\chi_1(\lambda)]^{n_1}[\chi_2(\lambda)]^{n_2}\cdots[\chi_s(\lambda)]^{n_s},$$

其中 $\chi_1(\lambda)$, $\cdots$, $\chi_s(\lambda)$ 為各不相等的不可約因式。

一次多項式在任一域中均不可約。高次多項式之是否可約與所選擇的域 K 發生關係。如 K 為複數域，則其不可約多項式的次數均為一次。但在實數域中，有且僅有一次與二次的兩種不可約多項式。首先我們把實係數多項式 $\varphi(\lambda)$ 在複數域中分解為一次因式的乘積，其次將其中的共軛因式相乘消去虛數係數，即知 $\varphi(\lambda)$ 可分解為實係數的因式之積，其次數不超過二次。在有理數域中，我們有任意高次的不可約多項

❶如 $\varphi(\lambda)$ 不可約，則在分解式(1)中，顯然僅有一個因式。

式存在。

3．普遍域 雖則以後我們僅在數域內討論問題，但是，在絕大部分的定義與結果中，把"任一數域"這幾個字換爲"任一可易域"時，仍然眞確。至於可易域的意義，是指任一組兩個或兩個以上元素的集合，其中任二元素的和、積、差、商(0除除外)仍在此集合中，且其運算適合平常算術上的可易、可羣與分配律。此處所說的元素不一定在複數域中。例如第一、二、三、五章中的所有基本結果，經過這樣推廣後，仍然成立。第四章中有些定理是對全部複數的域而言，不能如此推廣。但亦可以換全部複數的域爲代數閉合域，定理仍然成立。

第六至九章中的概念與定理同數域的關係比較密切，但亦可能轉變到一類普遍域上去。以後在那些地方將其指出。

§2．矩陣及其運算

設 K 爲一數域，取 K 中 mn 個數排成 m 行 n 列的一個長方陣形，稱爲一 K 上矩陣。在寫出矩陣時，我們把這些數按次序寫在方括弧裏面，或在這陣形的兩邊各加兩條直線。這樣，m 行 n 列矩陣寫爲

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} \end{bmatrix}$$

或

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} \end{Vmatrix},$$

其中 a_{ij} 在 K 中。

當矩陣的行數與列數相同時，稱為方陣，這個相同的行列數稱為方陣之級。僅有一行的矩陣稱為行矩陣。以後我們用拉丁字母 $A, B, \cdots$ 來表示矩陣。

當且僅當兩矩陣的行數相同，列數相同，而且對應行列中的所有數均相等時，兩矩陣方為相等。因之兩個 m 行 n 列的矩陣相等時，其元素間有 mn 個等式存在。

4. 矩陣與數的乘法，二矩陣的加法 矩陣的基本運算為矩陣間的加法、乘法、以及矩陣與數的乘法。矩陣和數的乘法比較簡單，以數 α 乘矩陣 A 或以矩陣 A 乘 α 的積為將 A 中所有元素均乘以 α 後所得出的矩陣，例如

$$5\begin{bmatrix}2 & 3\\7 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3\\7 & -1\end{bmatrix}5=\begin{bmatrix}10 & 15\\35 & -5\end{bmatrix}。$$

所有元素均為零的矩陣稱為零矩陣，記之以0。如要指明零矩陣的行數 m 與列數 n 時，我們記為 0_{mn}。

由數與矩陣的乘法定義，立即得出次諸性質：

（1） $1\cdot A=A$;

（2） $0\cdot A=0$;

（3） $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$。

如 A 為方陣，則由 A 可得出一行列式，記之為 $|A|$。已知乘行列式的任一行中諸元素以 α 時，行列式之值變為原值之 α 倍，今以 α 乘 A 時，A 中所有各行之元素均須乘以 α，故如 A 的級數為 n，則得

$$|\alpha A|=\alpha^n|A|。$$

兩個行數相同列數相同的矩陣，可以相加。其和為將行列數相同處的諸數相加後所得出的矩陣，例如

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 3 & 21 \\ 7 & 0 & -40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 24 \\ 6 & 3 & -32 \end{bmatrix}。$$

從這些定義,可以直接得出次諸性質:

(4)　$A+(B+C)=(A+B)+C$;

(5)　$A+B=B+A$;

(6)　$A+0=A$;

(7)　$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$;

(8)　$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$。

其證明貽諸讀者,特別的由等式1, 7, 可得

$$A+A=2\cdot A;\quad A+A+A=3\cdot A, \cdots$$

引入記法$(-1)A=-A$,我們又可得

$$A+(-A)=0;$$

$$(-\alpha)A=-\alpha A;$$

$$-(A+B)=-A-B;$$

$$-(-A)=A。$$

為簡便計,我們平常把$A+(-B)$寫作$A-B$。

5. 矩陣的乘法　矩陣和矩陣的乘法比起它的加法,矩陣和數的乘法來都要複雜些。設二矩陣為A, B。A的列數等於B的行數,即

$$A=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12}\cdots\alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\cdots\alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2}\cdots\alpha_{mn} \end{bmatrix};\qquad B=\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12}\cdots\beta_{1p} \\ \beta_{21} & \beta_{22}\cdots\beta_{2p} \\ \cdots & \cdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2}\cdots\beta_{np} \end{bmatrix},$$

則其乘積為矩陣

$$C=\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12}\cdots\gamma_{1p} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22}\cdots\gamma_{2p} \\ \cdots & \cdots \\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2}\cdots\gamma_{mp} \end{bmatrix},$$

其中

$$\gamma_{ij}=\alpha_{i1}\beta_{1j}+\alpha_{i2}\beta_{2j}+\cdots+\alpha_{in}\beta_{nj}(i=1,\cdots m;\ j=1,\ \cdots,\ p)。$$

記 A 對 B 的乘積爲 AB，即 $AB=C$。例如

$$\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma & \delta & \varepsilon\\ \lambda & \mu & \nu\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha\gamma+\beta\lambda & \alpha\delta+\beta\mu & \alpha\varepsilon+\beta\nu\\ \alpha_1\gamma+\beta_1\lambda & \alpha_1\delta+\beta_1\mu & \alpha_1\varepsilon+\beta_1\nu\\ \alpha_2\gamma+\beta_2\lambda & \alpha_2\delta+\beta_2\mu & \alpha_2\varepsilon+\beta_2\nu\end{bmatrix}。$$

矩陣相乘的法則可總結如次：二可乘矩陣的乘積爲一矩陣，其第 i 行第 j 列的元素，爲第一矩陣第 i 行諸元素，與第二矩陣第 j 列諸元素，依序逐對相乘所得出的乘積之和。

二矩陣的乘積一般和它們的次序有關，例如

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}18 & 19\\ -16 & -13\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-14 & -7\\ -26 & -8\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}18 & 19\\ -16 & -13\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}75 & 131\\ -55 & -97\end{bmatrix}。$$

有時兩矩陣對於某一順序相乘，可以得出乘積，但變易其次序後，乘法不復可能。

由矩陣的乘法定義，可推出次之關係：

（9）　$\alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B)$。

事實上，設矩陣 A 的元素爲 $\alpha_{ij}(i=1,\ \cdots,\ m;\ j=1,\cdots,\ n)$，矩陣 B 的元素爲 $\beta_{jk}(j=1,\ \cdots,\ n;\ k=1,\ \cdots p)$。由乘法規則，知矩陣 $\alpha(AB)$ 中第 i 行第 k 列的元素爲

$$\alpha(\alpha_{i1}\beta_{1k}+\alpha_{i2}\beta_{2k}+\cdots+\alpha_{in}\beta_{nk})。$$

同理，知矩陣 $(\alpha A)B$, $A(\alpha B)$ 的第 i 行第 k 列元素各爲

$$(\alpha\alpha_{i1})\beta_{1k}+(\alpha\alpha_{i2})\beta_{2k}+\cdots+(\alpha\alpha_{in})\beta_{nk},$$

$$\alpha_{i1}(\alpha\beta_{1k})+\alpha_{i2}(\alpha\beta_{2k})+\cdots+\alpha_{in}(\alpha\beta_{nk})。$$

因為這三個式子是相等的，故知關係 9 成立。用相類似的方法，可以證明次諸性質：

(10)　$(A+B)C=AC+BC$;

(11)　$C(A+B)=CA+CB$。

由關係 10 和 11 可以得出次之規則：以幾個矩陣之和乘幾個矩陣之和時，為將第一矩陣和中每一矩陣乘第二矩陣和中每一矩陣將其相加後所得出之和。

我們已知矩陣的乘法是不一定可易的，就是說 AB 不一定等於 BA 但是可羣律是適合的。[1]

(12)　$A(BC)=(AB)C$。

在證明時，我們設

$$AB=M,\quad BC=N$$

且設 M, N 的元素各為 μ_{ik}, ν_{jl}。由矩陣的乘法，知

$$\mu_{ik}=\alpha_{i1}\beta_{1k}+\alpha_{i2}\beta_{2k}+\cdots+\alpha_{in}\beta_{nk},$$

$$\nu_{jl}=\beta_{j1}\gamma_{1l}+\beta_{j2}\gamma_{2l}+\cdots+\beta_{jn}\gamma_{nl},$$

其中 α_{ij}, β_{jk}, γ_{kl} 為矩陣 A, B, C 的元素。以 M 乘 C 得 $(AB)C$ 的第 i 行第 l 列的元素為

$$\mu_{i1}\gamma_{1l}+\mu_{i2}\gamma_{2l}+\cdots+\mu_{ip}\gamma_{pl}=\sum_k\sum_j\alpha_{ij}\beta_{jk}\gamma_{kl}。$$

同理，以 A 乘 N，得矩陣 $A(BC)$ 的第 i 行第 l 列的元素為

$$\alpha_{i1}\nu_{1l}+\alpha_{i2}\nu_{2l}+\cdots+\alpha_{in}\nu_{nl}=\sum_j\sum_k\alpha_{ij}\beta_{jk}\gamma_{kl}。$$

這兩個式子，除開加法的次序有所不同外，是完全相等的，故知等式 12 是真確的。

---

[1] 矩陣的加法與乘法受到它們之間行列數的某些限制。等式 10, 11, 12 的意義是說，如其某一節可以相乘或相加，則其另一節亦可應用運算結合而且兩節之結果相等。