数値计算

W. E. 密倫

科学出版社

数值計算

W. E. 密 伦 著

徐鍾济 安其春 譯

科 学 出 版 社

1959

W. E. MILNE

NUMERICAL CALCULUS

Princeton University Press

1954

內 容 簡 介

本書是一本計算数学方面的基础書籍，写法深入浅出，对公式的推导层次清楚，簡明易懂，并有例題說明其应用．讀者只要学过一点初等微积分和微分方程，即可自修本書．

全書共分十一章．前两章扼要敘述了代数方程的数值解法；第三至第八章以差分为基础，講述了插值法的各种形式造表方法及数值微分、积分和微分方程的数值解法；第九、十两章介紹了最小二乘法的原理及其在正交多項式、数据的修匀、調和分析、頻率曲綫等方面的应用；最末一章介紹了簡单的差分方程．各章后并附有习題．

数 値 計 算

W. E. 密 伦 著

徐鍾济 安其春 譯

*

科 学 出 版 社 出 版（北京朝阳門大街 117 号）

北京市书刊出版业誉业許可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷　新华書店总經售

*

1959 年 12 月第 一 版	书号：2007　字数：266,000
1959 年 12 月第一次印刷	开本：850×1168 1/32
（京） 0001–9,500	印張：10 1/4

定价：1.50 元

序　　言

第一次世界大战以后的这段时間，計算設备的发达实在使人感到惊奇，而最近的将来将会怎样更难以想象。現在差不多在每个办公室或实驗室里大量应用的优良台式計算机——更不用講使人惊異的連續控制的計算机(例如統計分析机)或是不可思議的电子数字积分机和計算机——使得昨天还是絕对困难的許多問題今天已經可以求解。因此数值分析这个科目在今后的年代里必将飞跃的发展。

另一方面，在我們高等学校里的传統課程和数学研究，經常将学生訓練得无法把理論分析使用到实际应用时普遍需要的具体数值結果中去。著者的一个做物理工作的朋友曾說过："你們数学家知道如何解这个問題，但是不能实际地解出它"。

本書的目的是希望能作为連接課本上的数学和数值应用之間的桥梁。它准备在方程的解法、插值法、数值微分和积分、微分方程的数值解、有限差分、用最小二乘方的近似法、数据的修匀、以及簡单的差分方程这些題目中提出初步意見。內容表达力求浅近，使学过一点微积分和微分方程的人都能了解。数学的风格和严密就不作过高的要求，以利于純粹質朴的論述。

由可利用的丰富的材料中确定包括或不包括某些特定的題目是个难人的問題，而个人的爱好将比客观的邏輯更影响这种选择。著者希望所包括的能滿足平常一般的需要，幷能刺激对这門有趣幷有用的数学分支进行更广泛的研究。

著者感謝 J. 普来司先生对附表 VI 的計算，感謝 W. M. 斯通教授所供給的第 82 节里的一些材料，感謝 B. W. 布来梅教授对第八章的审定。

俄勒岡州立学院数学教授

W. E. 密　倫

目　录

第一章

联立綫性方程

在純粹数学中和在应用数学的几个分支中，好多种問題直接地或間接地包含联立的綫性方程．故适宜于用头一章专講解这种方程組的方法和估計解所能达到的准确度．

对于理論的研究和对于带文字系数的方程組的情形，我們普通都用行列式．对于数字系数的情形，我們应用一个适合于机器計算的有系統的消去法的方案．虽然两种方法沒有基本上的区別，不过它們在运算的詳細方面相差很多，所以还是分別地来处理它們为好．然而因为行列式的知識对于消去法的充分了解几乎是必要的，故使两种研究完全无关也是不切实际的．

1. 行 列 式

这里我們不带証明地对行列式的基本性質作一些簡短的敍述．

(a) 一个二阶行列式的值由下面的公式給出，

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

(b) 一个三阶行列式的值由下面的公式給出，

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2.$$

(c) 从一个 n 阶行列式划去第 i 行和第 j 列后所余的 $n-1$ 阶行列式叫做第 i 行和第 j 列元素的子行列式．例如在行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \tag{1}$$

里，c_2 的子行列式是

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix}.$$

同样，划去二行和二列我們得到比原行列式减少二阶的子行列式，划去三行和三列我們得到减少三阶的子行列式，余类推．

(d) 第 i 行和第 j 列元素的代数余因子是指这个元素的子行列式乘以 $(-1)^{i+j}$． 为便利起見用小写字母代表元素和用相同的大写字母代表对应的代数余因子．例如由(1)我們有

$$C_2=-\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix},\qquad B_4=+\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}，\text{余类推．}$$

(e) 任意一行(或列)的每个元素和它自己的代数余因子的乘积的和等于这个行列式。例如，由(1)

$$D=a_2A_2+b_2B_2+c_2C_2+d_2D_2.$$

(f) 某一行(或列)的每个元素和另一行(或列)的对应元素的代数余因子的乘积的和等于零。例如

$$a_2A_3+b_2B_3+c_2C_3+d_2D_3=0.$$

(g) 假若一个行列式的两个行(或两个列)相交换，这个行列式的值改变符号．

(h) 假若一个行列式的两行(或两列)的对应元素相等，这个行列式的值为零．

(i) 假若一个行列式的两行(或两列)的对应元素成比例，这个行列式的值为零．

(j) 一个行列式的值不变，假若

(1) 把各行依次和同次序的各列相交換．

(2) 把某一行(或列)所有元素的公因子移出而結果的行列式乘以这个因子．

(3) 把某一行(或列)的所有元素分别加上一个常数乘另

一行(或列)对应元素的乘积之后。例如，

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a_1+kc_1) & b_1 & c_1 \\ (a_2+kc_2) & b_2 & c_2 \\ (a_3+kc_3) & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

(k) 行列式的行(或列)的数目叫做行列式的阶。

(l) 行列式的秩，假若一个 n 阶的行列式的值不为零，则称这个行列式的秩为 n。假若这个行列式为零，则最高阶不为零的子行列式的阶数就叫做該行列式的秩。

練　　习

用(b)求以下三个行列式的值:

1. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ -4 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 5 \end{vmatrix}$　2. $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{vmatrix}$　3. $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

4. 按(e)用第一行的代数余因子求練习 1, 2, 3 的值。

5. 按(e)用第二列的代数余因子求練习 1, 2, 3 的值。

6. 在練习 1, 2, 3 里，取第一行的元素和第二行的代数余因子的乘积来驗証(f)。

7. 用(e)求

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

的值。

8. 用(j, 3)的方法求練习 7 的值。

9. 求証

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x).$$

10. 求証

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = 0$$

是一个 x 的三次代数方程，它的根是 a, b, c.

11. 求練习 1, 2, 3, 7 中行列式的秩.

2. 綫性方程組用行列式的解法

讓我們考慮一个具有 n 个未知量的綫性方程組.

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ &a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n. \end{aligned} \tag{1}$$

設各 x 的系数所成的行列式的值用 D 来表示，并設这个行列式中元素 a_{ij} 的代数余因子是 A_{ij}. 現在讓我們用 A_{11} 乘上面第一个方程，用 A_{21} 去乘第二个方程，余类推，然后把这些方程相加. 由于代数余因子的性質，相加的結果是

$$Dx_1=b_1A_{11}+b_2A_{21}+\cdots+b_nA_{n1}. \tag{2}$$

很容易看出上式的右端是按照行列式

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的第一列元素的展开式. 即它是行列式 D 第一列各元素用各个 b 来代替的結果. 設我們用 D_1 代表这个行列式，而且一般地設 D_i 代表 D 的第 i 列用各 b 組成的列代替后所得的行列式. 那末我們得到方程組

$$Dx_1=D_1,\ Dx_2=D_2,\ \cdots,\ Dx_n=D_n.$$

現在分为下列三种情况来講:

I. $D\neq 0$, 在此情形方程組有一个且仅有一个解，它就是

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,\ x_n=\frac{D_n}{D}. \qquad (3)$$

至于这确实是方程組(1)的一个解，可将它們直接代回到原方程組来証明。

II. $D=0$, 但不是所有的 $D_i=0$. 那末我們会得到不可能的方程，$0=D_i$, 因而方程組(1)无解。

III. $D=0$, 所有的 $D_i=0$. 設 r 是 D 的秩和 r_i 是 D_i 的秩。那末

(a) 假若有任一 r_i 大于 r, 則方程組无解。

(b) 假若沒有 r_i 大于 r, 那末未知量中的 r 个可由其余 $n-r$ 个未知量表出，方法如下：重新排列(如果必要)方程的次序和各未知量的次序使 D(重新排列后的)左上角的 r 行的子行列式不等于零。在前 r 个方程里把前 r 个未知量以外的所有未知量移到等式右端，并和情况 I 一样由前 r 个方程解出前 r 个未知量，这样求得的解也將滿足其余的方程并包含 $n-r$ 个未定的变数。

矩陣. 一个排成 m 行和 n 列的長方陣列、含有 mn 个数量的系統叫做矩陣。和行列式相比較，行列式是一个量，由它的矩陣按某些規則来決定。矩陣根本不是一个量，仅是数量的陣列。例如两个具有不同元素的行列式可能具有相同的值，但两个具有不同元素的矩陣一定是不相同的矩陣。

我們将不涉及矩陣的一般性質，但为便利起見需要定义和应用矩陣的秩这个名詞。从任意給定的矩陣，可以划去(如果必要)矩陣的某些行和列来造成行列式。这样能作成的最高阶的行列式的阶数，假若 m 和 n 不相等，將等于 m 和 n 中的小者。假若 m 和 n 相等，將等于 m。最高阶的行列式的最高秩叫做矩陣的秩。

由方程組(1)右端系数的陣列組成的正方矩陣叫做系数的矩陣。n 行和 $n+1$ 列的矩陣

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}.$$

叫做增广矩陣。

应用这个术語我們可以把上面 I, II, III 的結果用下面的方法表示。

I. 假若系数的矩陣的秩为 n，則方程組有一个唯一的解。

II. 假若增广矩陣的秩大于系数矩陣的秩，則方程組无解。

III. 假若增广矩陣和系数矩陣的秩都等于 $n-k$，那末有无限多个解能用 k 个任意参数来表示。

練　　习

决定下面的方程組是否有解，能解的便求出它的解。应用行列式。

1. $$\begin{aligned} 2x-y+3z&=2,\\ x+y-z&=3,\\ x-y+z&=2. \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} x+y+z&=1,\\ x+2y+3z&=0,\\ x+4y+9z&=0. \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} x+y+z&=1,\\ x+2y+4z&=0,\\ x+3y+9z&=0. \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} a-2b+4c-8d+16e&=1,\\ a-b+c-d+e&=2,\\ a&=3,\\ a+b+c+d+e&=3,\\ a+2b+4c+8d+16e&=3. \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} x+y+z&=1,\\ 2x+2y+z&=0,\\ 3x-y+2z&=2. \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} x+y+z&=3,\\ 2x-2y+z&=1,\\ 3x-y+2z&=4. \end{aligned}$$

7. 解方程組

$$x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{3}x_3+\frac{1}{4}x_4=1,$$

$$\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{4}x_3+\frac{1}{5}x_4=0,$$

$$\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{4}x_2+\frac{1}{5}x_3+\frac{1}{6}x_4=0,$$

$$\frac{1}{4}x_1+\frac{1}{5}x_2+\frac{1}{6}x_3+\frac{1}{7}x_4=0.$$

8. 解方程組

$$\begin{aligned}
2x_1-x_2 \qquad\qquad &= 1,\\
x_1+2x_2-x_3 \qquad &= \frac{1}{2},\\
-x_2+2x_3-x_4 &= \frac{1}{3},\\
-x_3+2x_4 &= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

9. 解方程組

$$\begin{aligned}
x_0+x_1+x_2+x_3+x_4&=1,\\
x_0+x_1+2x_2+3x_3+4x_4&=0,\\
x_0+x_1+2x_2+6x_3+12x_4&=0,\\
x_0+x_1+2x_2+6x_3+24x_4&=0,\\
x_0-x_1-x_2-x_3-x_4&=0,
\end{aligned}$$

10. 証明三角形方程組

$$\begin{aligned}
x_1 \qquad\qquad\qquad &= c_1,\\
a_{12}x_1+x_2 \qquad\qquad &= c_2,\\
a_{13}x_1+a_{23}x_2+x_3 \qquad &= c_3,\\
a_{14}x_1+a_{24}x_2+a_{34}x_3+x_4 &= c_4,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

一定有一个唯一解，它可用簡单代入法求得.

11. 証明練习 10 中的方程組的解可以写成

$x_1=c_1,$

$x_2=c_2-a_{12}c_1,$

$$x_3=c_3-a_{23}c_2+\begin{vmatrix}a_{12} & 1\\ a_{13} & a_{23}\end{vmatrix}c_1,$$

$$x_4=c_4-a_{34}c_3+\begin{vmatrix}a_{23} & 1\\ \\ a_{24} & a_{34}\end{vmatrix}c_2-\begin{vmatrix}a_{12} & 1 & 0\\ a_{13} & a_{23} & 1\\ a_{14} & a_{24} & a_{34}\end{vmatrix}c_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

3. 齐次方程組

一組具有 n 个未知量的 n 个联立綫性方程

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0,$$

其中所有常数項为零，至少总有一个解，即 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$。假若行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \cdot & \cdots\cdots & \cdot\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

不为零，則方程組沒有其它的解。假若 D 的秩为 r，而 $r<n$，就可能用其余 $n-r$ 个变数来解出这 r 个变数。

例 1　研究方程組

$$2x+\ y-\ z=0,$$
$$x+2y+\ z=0,$$
$$-x+\ y+2z=0.$$

这里我們求得行列式 D 的秩数为 2。故我們可以把一个变数，例如 z，移到右端，并解出 x 和 y，得

$$x=z,\quad y=-z.$$

假如 D 的秩是 $n-1$，則 D 的代数余因子就不都是零。在这个情形下，表示齐次方程組的非零解的一个更对称的方法是使每个 x_j 与 D 的某行的第 j 个元素的代数余因子（假若这行的代数余因子不全为零）成比例。例如

$$x_1=kA_{i1},\ x_2=kA_{i2},\ \cdots,\ x_n=kA_{in},$$

其中 k 是一个任意常数。至于这些值确实是一組解可从第 1 节的(e)和(f)立即推出，因为在这种情形 $D=0$。

应用这个手續于例 1 的方程組，我們得

$$x=3k,\ y=-3k,\ z=3k,$$

如設 $3k=k'$，則

$$x=k',\ y=-k',\ z=k'.$$

这个結果可以看出是和前面所得的一个等价的。

在很多种的应用中时常发生的一类問題可用下例說明：

例 2　对于参数 λ 的哪些数值，方程組

$$\begin{aligned}4x+2y+\ z&=\lambda x,\\2x+4y+2z&=\lambda y,\\x+2y+4z&=\lambda z\end{aligned}$$

有非零解。

集合 $x, y,$ 和 z 的系数，我們得到以上齐次方程組的行列式

$$D=\begin{vmatrix}(4-\lambda) & 2 & 1\\ 2 & (4-\lambda) & 2\\ 1 & 2 & (4-\lambda)\end{vmatrix}.$$

要使这个齐次方程組有非零解，行列式 D 必須为零。展开行列式，我們获得参数 λ 必須滿足的下列三次方程

$$(4-\lambda)^3-9(4-\lambda)+8=0.$$

从这个方程解出 λ，我們求得三个值

$$\lambda_1=1.62772,\quad \lambda_2=3,\quad \lambda_3=7.37228.$$

对于 λ 的每个值給定的方程組都有一組非零解。

練　习

1. 解

$$\begin{aligned}3x+2y-\ z&=0,\\2x-\ y+2z&=0,\\x-4y+5z&=0.\end{aligned}$$