

数值计算

W. E. 密 倫

科学出版社

数值计算

W. E. 密伦 著

徐鍾济 安其春 译

科学出版社

1959

W. E. MILNE
NUMERICAL CALCULUS
Princeton University Press
1954

內 容 簡 介

本書是一本計算数学方面的基础書籍，写法深入浅出，对公式的推导层次清楚，簡明易懂，并有例題說明其应用。讀者只要学过一点初等微积分和微分方程，即可自修本書。

全書共分十一章。前两章扼要敘述了代数方程的数值解法；第三至第八章以差分为基础，講述了插值法的各种形式造表方法及数值微分、积分和微分方程的数值解法；第九、十两章介紹了最小二乘法的原理及其在正交多項式、数据的修勻、調和分析、頻率曲綫等方面的应用；最末一章介紹了簡單的差分方程。各章后并附有习題。

数 值 計 算

W. E. 密 伦 著
徐鍾济 安其春 譯

*

科学出版社出版 (北京朝陽門大街 117 号)
北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷 新华書店总經售

*

1959年12月第一版	书号: 2007 字数: 266,000
1959年12月第一次印刷	开本: 850×1168 1/32
(京) 0001-9,500	印张: 10 1/4

定价: 1.50 元

序 言

第一次世界大战以后的这段时间，计算设备的发达实在使人感到惊奇，而最近的将来将会怎样更难以想象。现在差不多在每个办公室或实验室里大量应用的优良台式计算机——更不用讲使人惊异的连续控制的计算机(例如统计分析机)或是不可思议的电子数字积分机和计算机——使得昨天还是绝对困难的许多问题今天已经可以求解。因此数值分析这个科目在今后的年代里必将飞跃的发展。

另一方面，在我们高等学校里的传统课程和数学研究，经常将学生训练得无法把理论分析使用到实际应用时普遍需要的具体数值结果中去。著者的一个做物理工作的朋友曾说过：“你们数学家知道如何解这个问题，但是不能实际地解出它”。

本书的目的是希望能作为连接课本上的数学和数值应用之间的桥梁。它准备在方程的解法、插值法、数值微分和积分、微分方程的数值解、有限差分、用最小二乘方的近似法、数据的修匀、以及简单的差分方程这些题目中提出初步意见。内容表达力求浅近，使学过一点微积分和微分方程的人都能了解。数学的风格和严密就不作过高的要求，以利于纯粹质朴的论述。

由可利用的丰富的材料中确定包括或不包括某些特定的题目是个难人的问题，而个人的爱好将比客观的逻辑更影响这种选择。著者希望所包括的能满足平常一般的需要，并能刺激对这门有趣并有用的数学分支进行更广泛的研究。

著者感谢 J. 普来司先生对附表 VI 的计算，感谢 W. M. 斯通教授所供给的第 82 节里的一些材料，感谢 B. W. 布来梅教授对第八章的审定。

俄勒冈州立学院数学教授

W. E. 密 伦

目 录

第一章 联立綫性方程	1
1. 行列式	1
2. 綫性方程組用行列式的解法	4
3. 齐次方程組	8
4. 消去法	10
5. 綫性方程組的数值解法	12
6. 对称方程組	17
7. 計算的准确度的核对	18
8. 行列式的求值	19
9. 代数余因子的計算	20
10. 固有誤差的大小	22
第二章 方程用逐步求近法的解法	27
11. 一个未知元的方程	27
12. 例外情况	30
13. 联立方程	33
14. 逐次代換法	35
15. 例外情况	37
16. 代数方程的复根	40
17. λ 行列式的解法	44
第三章 插值法	48
18. 插值函数	48
19. 綫性插值法	52
20. 艾特肯迭代法	53
21. 列維尔迭代法	55
22. 反插值法	56
23. 多項式插值法的誤差	60
24. 拉格朗日插值公式	64
25. 等距点的拉格朗日插值系数表	69

第四章 数值微分和积分	73
26. 数值微分.....	73
27. 对于等距点的微分公式.....	75
28. 数值积分.....	79
29. 未定系数.....	82
30. 误差的研究.....	85
31. 误差的计算.....	90
32. 梯形法则.....	92
33. 辛浦生法则.....	95
34. 牛頓-柯台斯求积公式, 閉型.....	97
35. 牛頓-柯台斯求积公式, 开型.....	99
36. 摘要.....	100
第五章 微分方程的数值解	103
37. 第一种方法.....	103
38. 第二种方法.....	106
39. 二阶方程.....	109
40. 解二阶方程的特殊公式.....	110
41. 联立方程.....	111
42. “五項”公式的应用.....	112
第六章 有限差分	114
43. 阶乘多項式.....	114
44. 二項式系数.....	118
45. 有限差分.....	121
46. 误差的偵察.....	124
47. 牛頓二項式插值公式, 前向差分.....	126
48. 牛頓二項式插值公式, 后向差分.....	127
49. 高斯插值公式.....	128
50. 中心差分. 司透林公式.....	134
51. 艾維里特中心差分公式.....	139
52. 貝塞尔公式.....	141
53. 多項式数值的造表.....	143
54. 表的加密.....	144
55. 用差分表示的导数.....	149

56. 牛頓插值公式的積分	150
57. 司透林公式的對稱積分	152
58. 艾維里特公式的積分	154
第七章 均差	157
59. 均差的定義	157
60. 用均差表示的插值多項式	161
61. 插值多項式的其它形式	167
第八章 倒數差分	170
62. 用有理分式表示的近似法	170
63. 行列式的縮減	172
64. 倒數差分	175
65. 倒數差分另外的性質	180
66. 特殊情況	183
第九章 用最小二乘方的多項式近似法	188
67. 最小二乘方	188
68. 對最小二乘方進一步的研究	194
69. 對於積分的最小二乘方	197
70. 正交多項式	199
71. 正交多項式的應用	203
72. 等距點正交多項式	205
73. 修均法, 數據的修勻	212
74. 修勻公式的別種處理	216
75. 數值積分的高斯方法	220
第十章 用最小二乘方的其他近似法	225
76. 最小二乘方近似法的一般性問題	225
77. 基本定理	226
78. 三角近似法	228
79. 調和分析	232
80. 系數的計算	234
81. 格蘭姆-卡爾里爾近似法	240
82. 離散點的情況	247

第十一章 简单差分方程	252
83. 差分方程的解	252
84. 差分法	255
85. 差分方程 $\Delta u_s = f(s)$	258
86. 正合方程	263
87. 高于一阶的綫性差分方程	265
88. 变系数綫性方程	269
附 录	271
A. 記法和符号	271
B. 参考書, 数表和文献目录	272
C. 对公式和方法的分类索引	277
附 表	280
I. 二項式系数 $\binom{n}{k}$	281
II. 牛頓二項式插值公式的插值系数 $\binom{s}{k}$	282
III. 艾維里特插值系数	286
IV. 五个等距点的拉格朗日系数	288
V. 勒讓达多項式(适用于区間 $0 \leq x \leq 1$)	290
VI. $n+1$ 个等距点的正交多項式	292
VII. 二項式系数的积分, $\int_0^s \binom{t}{k} dt$	300
VIII. Γ 函数和 Ψ 函数	301
索 引	302
英中对照索引	302
中英对照索引	311

第一章

联立綫性方程

在純粹数学中和在应用数学的几个分支中，好多种問題直接地或間接地包含联立的綫性方程。故适宜于用头一章专講解这种方程組的方法和估計解所能达到的准确度。

对于理論的研究和对于带文字系数的方程組的情形，我們普通都用行列式。对于数字系数的情形，我們应用一个适合于机器計算的有系統的消去法的方案。虽然两种方法沒有基本上的区别，不过它們在运算的詳細方面相差很多，所以还是分別地来处理它們为好。然而因为行列式的知識对于消去法的充分了解几乎是必要的，故使两种研究完全无关也是不切实际的。

1. 行列式

这里我們不帶証明地对行列式的基本性質作一些簡短的描述。

(a) 一个二阶行列式的值由下面的公式給出，

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

(b) 一个三阶行列式的值由下面的公式給出，

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2.$$

(c) 从一个 n 阶行列式划去第 i 行和第 j 列后所余的 $n-1$ 阶行列式叫做第 i 行和第 j 列元素的子行列式。例如在行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \quad (1)$$

里, c_3 的子行列式是

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix}.$$

同样, 划去二行和二列我們得到比原行列式减少二阶的子行列式, 划去三行和三列我們得到减少三阶的子行列式, 余类推。

(d) 第 i 行和第 j 列元素的代数余因子是指这个元素的子行列式乘以 $(-1)^{i+j}$ 。为便利起见用小写字母代表元素和用相同的大写字母代表对应的代数余因子。例如由(1)我們有

$$C_2 = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix}, \quad B_4 = + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}, \quad \text{余类推。}$$

(e) 任意一行(或列)的每个元素和它自己的代数余因子的乘积的和等于这个行列式。例如, 由(1)

$$D = a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2 + d_2D_2.$$

(f) 某一行(或列)的每个元素和另一行(或列)的对应元素的代数余因子的乘积的和等于零。例如

$$a_2A_3 + b_2B_3 + c_2C_3 + d_2D_3 = 0.$$

(g) 假若一个行列式的两个行(或两个列)相交换, 这个行列式的值改变符号。

(h) 假若一个行列式的两行(或两列)的对应元素相等, 这个行列式的值为零。

(i) 假若一个行列式的两行(或两列)的对应元素成比例, 这个行列式的值为零。

(j) 一个行列式的值不变, 假若

(1) 把各行依次和同次序的各列相交换。

(2) 把某一行(或列)所有元素的公因子移出而结果的行列式乘以这个因子。

(3) 把某一行(或列)的所有元素分别加上一个常数乘另

一行(或列)对应元素的乘积之后。例如,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a_1+kc_1) & b_1 & c_1 \\ (a_2+kc_2) & b_2 & c_2 \\ (a_3+kc_3) & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

(k) 行列式的行(或列)的数目叫做行列式的阶。

(l) 行列式的秩, 假若一个 n 阶的行列式的值不为零, 则称这个行列式的秩为 n 。假若这个行列式为零, 则最高阶不为零的子行列式的阶数就叫做该行列式的秩。

练习

用(b)求以下三个行列式的值:

$$1. \begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ -4 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 5 \end{vmatrix} \quad 2. \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{vmatrix} \quad 3. \begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

4. 按(e)用第一行的代数余因子求练习 1, 2, 3 的值。

5. 按(e)用第二列的代数余因子求练习 1, 2, 3 的值。

6. 在练习 1, 2, 3 里, 取第一行的元素和第二行的代数余因子的乘积来验证(f)。

7. 用(e)求

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

的值。

8. 用(j, 3)的方法求练习 7 的值。

9. 求证

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x).$$

1. 行列式

10. 求証

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = 0$$

是一个 x 的三次代数方程，它的根是 a, b, c 。

11. 求練習 1, 2, 3, 7 中行列式的秩。

2. 綫性方程組用行列式的解法

讓我們考虑一个具有 n 个未知量的綫性方程組。

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \dots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned} \tag{1}$$

設各 x 的系数所成的行列式的值用 D 来表示，并設这个行列式中元素 a_{ij} 的代数余因子是 A_{ij} 。現在讓我們用 A_{11} 乘上面第一个方程，用 A_{21} 去乘第二个方程，余类推，然后把这些方程相加。由于代数余因子的性質，相加的結果是

$$Dx_1 = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1}. \tag{2}$$

很容易看出上式的右端是按照行列式

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的第一列元素的展开式。即它是行列式 D 第一列各元素用各个 b 来代替的結果。設我們用 D_1 代表这个行列式，而且一般地設 D_i 代表 D 的第 i 列用各 b 組成的列代替后所得的行列式。那末我們得到方程組

$$Dx_1 = D_1, \quad Dx_2 = D_2, \quad \dots, \quad Dx_n = D_n.$$

現在分为下列三种情况来講:

I. $D \neq 0$, 在此情形方程組有一个且仅有一个解, 它就是

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{D_n}{D}. \quad (3)$$

至于这确实是方程組(1)的一个解, 可将它們直接代回到原方程組来証明。

II. $D = 0$, 但不是所有的 $D_i = 0$. 那末我們会得到不可能的方程, $0 = D_i$, 因而方程組(1)无解。

III. $D = 0$, 所有的 $D_i = 0$. 設 r 是 D 的秩和 r_i 是 D_i 的秩。

那末

(a) 假若有任一 r_i 大于 r , 則方程組无解。

(b) 假若沒有 r_i 大于 r , 那末未知量中的 r 个可由其余 $n-r$ 个未知量表出, 方法如下: 重新排列(如果必要)方程的次序和各未知量的次序使 D (重新排列后的)左上角的 r 行的子行列式不等于零。在前 r 个方程里把前 r 个未知量以外的所有未知量移到等式右端, 并和情况 I 一样由前 r 个方程解出前 r 个未知量, 这样求得的解也将滿足其余的方程并包含 $n-r$ 个未定的变数。

矩陣. 一个排成 m 行和 n 列的长方陣列、含有 $m \cdot n$ 个数量的系統叫做矩陣。和行列式相比較, 行列式是一个量, 由它的矩陣按某些規則来决定。矩陣根本不是一个量, 仅是数量的陣列。例如两个具有不同元素的行列式可能具有相同的值, 但两个具有不同元素的矩陣一定是不相同的矩陣。

我們將不涉及矩陣的一般性質, 但为便利起見需要定义和应用矩陣的秩这个名詞。从任意給定的矩陣, 可以划去(如果必要)矩陣的某些行和列来造成行列式。这样能作成的最高阶的行列式的阶数, 假若 m 和 n 不相等, 将等于 m 和 n 中的小者。假若 m 和 n 相等, 将等于 m 。最高阶的行列式的最高秩叫做矩陣的秩。

由方程組(1)右端系数的陣列組成的正方矩陣叫做系数的矩陣。 n 行和 $n+1$ 列的矩陣

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}.$$

叫做增广矩阵。

应用这个术语我们可以把上面 I, II, III 的结果用下面的方法表示。

I. 假若系数的矩阵的秩为 n , 则方程组有一个唯一的解。

II. 假若增广矩阵的秩大于系数矩阵的秩, 则方程组无解。

III. 假若增广矩阵和系数矩阵的秩都等于 $n-k$, 那末有无限多个解能用 k 个任意参数来表示。

练 习

决定下面的方程组是否有解, 能解的便求出它的解。应用行列式。

$$\begin{aligned} 1. \quad & 2x - y + 3z = 2, \\ & x + y - z = 3, \\ & x - y + z = 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad & a - 2b + 4c - 8d + 16e = 1, \\ & a - b + c - d + e = 2, \\ & a = 3, \\ & a + b + c + d + e = 3, \\ & a + 2b + 4c + 8d + 16e = 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & x + y + z = 1, \\ & x + 2y + 3z = 0, \\ & x + 4y + 9z = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \quad & x + y + z = 1, \\ & 2x + 2y + z = 0, \\ & 3x - y + 2z = 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad & x + y + z = 1, \\ & x + 2y + 4z = 0, \\ & x + 3y + 9z = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. \quad & x + y + z = 3, \\ & 2x - 2y + z = 1, \\ & 3x - y + 2z = 4. \end{aligned}$$

7. 解方程组

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = 1,$$

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{5}x_4 = 0,$$

$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{6}x_4 = 0,$$

$$\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{7}x_4 = 0.$$

8. 解方程組

$$2x_1 - x_2 = 1,$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = \frac{1}{2},$$

$$-x_2 + 2x_3 - x_4 = \frac{1}{3},$$

$$-x_3 + 2x_4 = \frac{1}{4}.$$

9. 解方程組

$$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1,$$

$$x_0 + x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0,$$

$$x_0 + x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 12x_4 = 0,$$

$$x_0 + x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 24x_4 = 0,$$

$$x_0 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0.$$

10. 証明三角形方程組

$$x_1 = c_1,$$

$$a_{12}x_1 + x_2 = c_2,$$

$$a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + x_3 = c_3,$$

$$a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 + x_4 = c_4,$$

.....

一定有一个唯一解，它可用简单代入法求得。

11. 証明練習 10 中的方程組的解可以写成

$$x_1 = c_1,$$

$$x_2 = c_2 - a_{12}c_1,$$

2. 綫性方程組用行列式的解法

$$\begin{aligned}
 x_3 &= c_3 - a_{33}c_2 + \begin{vmatrix} a_{13} & 1 \\ a_{18} & a_{28} \end{vmatrix} c_1, \\
 x_4 &= c_4 - a_{44}c_3 + \begin{vmatrix} a_{28} & 1 \\ a_{24} & a_{34} \end{vmatrix} c_2 - \begin{vmatrix} a_{13} & 1 & 0 \\ a_{18} & a_{28} & 1 \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{vmatrix} c_1, \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

3. 齐次方程组

一组具有 n 个未知量的 n 个联立线性方程

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0, \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0, \\
 &\dots \dots \dots \\
 a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= 0,
 \end{aligned}$$

其中所有常数项为零，至少总有一个解，即 $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ 。

假若行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

不为零，则方程组没有其它的解。假若 D 的秩为 r ，而 $r < n$ ，就可能用其余 $n-r$ 个变数来解出这 r 个变数。

例 1 研究方程组

$$\begin{aligned}
 2x + y - z &= 0, \\
 x + 2y + z &= 0, \\
 -x + y + 2z &= 0.
 \end{aligned}$$

这里我们求得行列式 D 的秩数为 2。故我们可以把一个变数，例如 z ，移到右端，并解出 x 和 y ，得

$$x = z, \quad y = -z.$$

假如 D 的秩是 $n-1$ ，则 D 的代数余因子就不都是零。在这个情形下，表示齐次方程组的非零解的一个更对称的方法是使每个 x_j 与 D 的某行的第 j 个元素的代数余因子（假若这行的代数余因子不全为零）成比例。例如

$$x_1 = kA_{i1}, x_2 = kA_{i2}, \dots, x_n = kA_{in},$$

其中 k 是一个任意常数。至于这些值确实是一组解可从第 1 节的 (e) 和 (f) 立即推出，因为在这种情形 $D=0$ 。

应用这个手续于例 1 的方程组，我们得

$$x = 3k, y = -3k, z = 3k,$$

如设 $3k = k'$ ，则

$$x = k', y = -k', z = k'.$$

这个结果可以看出是和前面所得的一个等价的。

在很多种的应用中时常发生的一类问题可用下列说明：

例 2 对于参数 λ 的哪些数值，方程组

$$4x + 2y + z = \lambda x,$$

$$2x + 4y + 2z = \lambda y,$$

$$x + 2y + 4z = \lambda z$$

有非零解。

集合 $x, y,$ 和 z 的系数，我们得到以上齐次方程组的行列式

$$D = \begin{vmatrix} (4-\lambda) & 2 & 1 \\ 2 & (4-\lambda) & 2 \\ 1 & 2 & (4-\lambda) \end{vmatrix}.$$

要使这个齐次方程组有非零解，行列式 D 必须为零。展开行列式，我们获得参数 λ 必须满足的下列三次方程

$$(4-\lambda)^3 - 9(4-\lambda) + 8 = 0.$$

从这个方程解出 λ ，我们求得三个值

$$\lambda_1 = 1.62772, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 7.37228.$$

对于 λ 的每个值给定的方程组都有一组非零解。

练 习

1. 解

$$3x + 2y - z = 0,$$

$$2x - y + 2z = 0,$$

$$x - 4y + 5z = 0.$$

3. 齐次方程组