高等专科学校适用教材

高等数学

主编　姚文起

上册

机械工业出版社

高等专科学校适用教材

高 等 数 学

上 册

主 编 姚文起

副主编 刘德有 张亚明

主 审 李俊杰

机 械 工 业 出 版 社

（京）新登字054号

本书是根据国家教委工科数学课程指导委员会制定的《高等数学课程教学基本要求》编写的。本书分上、下两册。上册内容为：函数、极限、连续，导数与微分，中值定理和导数的应用，不定积分，定积分，定积分的应用．本书的特点是深入浅出，通俗易懂．加强了数学基本能力的训练，同时注意贯彻理论联系实际的原则。本书可作为三年制高等专科学校高等数学教材，也可供职工大学、函授大学等选作教材。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/姚文起主编．-北京：机械工业出版社，1994.8

高等专科学校适用教材

ISBN 7-111-04309-X

Ⅰ.高… Ⅱ.姚… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字（94）第05954号

出版人 马九荣（北京市百万庄南街1号 邮政编码100037）

责任编辑：张一萍 版式设计：杨丽华 责任校对：罗文莉

封面设计：郭景云 责任印制：侯新民

北京昌平建华印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

1994年8月第1版·1994年8月第1次印刷

787mm×1092mm 1/32 · 11$\frac{1}{2}$印张 · 254千字

0 001—4 000册

定价 9.80元

前　言

目前，随着我国高等工业专科教育的迅速发展，编写合适的高等数学教材已很迫切。本书是根据国家教委工科数学课程指导委员会制定的《高等数学课程教学基本要求》而编写的。

本书分上、下两册。上册内容为：函数、极限、连续；导数与微分；中值定理和导数的应用；不定积分；定积分；定积分的应用。下册内容为：空间解析几何与矢量代数；多元函数微分学；多元函数积分学；无穷级数；微分方程。书中给出了习题、复习题及部分习题、复习题答案。

本书的特点是：深入浅出、通俗易懂、层次清楚，重点突出；加强了数学基本能力的训练，同时注意贯彻理论联系实际的原则。

全书基本内容按160学时（包括习题课）而编写的。其中带*号的内容供不同专业需要选用。本书可供三年制高等工业专科学校高等数学教学使用；也可供大学工科本科、专科的相近专业、高等专科成人教育的职工大学、函授大学等选作教材或参考书；亦可作为工程技术人员或自学者选用。

本书的编写，曾得到赵树春教授等的支持和帮助，在此谨向他们表示衷心感谢。

由于编者水平有限，时间仓促，书中错误或不妥之处在所难免，请读者批评指正。

编　者

1994年1月

目　　录

第一章　函数、极限与连续

初等数学与高等数学的主要区别就在于初等数学是研究常量数学，而高等数学是主要研究变量数学。函数、极限是高等数学中最基本的概念，也是微积分的基础。由于在中学里，对函数、极限等概念及其性质已有较详细的论述，本章在复习的基础上，主要介绍函数极限的性质及连续性。

第一节　函　　数

一、函数的概念

在同一个自然现象或技术过程中，往往同时有几个变量在变化着。这几个变量并不是孤立的变化，而是互相联系并遵循着一定的变化规律。这种互相联系、互相依赖的变量之间的确定关系，在数学上就称为函数关系。

定义　设x和y是两个变量，D是非空实数集合。如果对于每个数$x\in D$，变量y按照一定的对应关系总有确定的实数值与之对应，则称y是x的函数，记为$y=f(x)$，$(x\in D)$。x叫做自变量，y叫做因变量，集合D叫做这个函数的定义域。

函数$y=f(x)$中表示对应关系的记号f也可改用其他字母，例如“φ”、“F”等等，这时函数就记为$y=\varphi(x)$、$y=F(x)$等等，有时也记为$y=y(x)$。

这里记号f表示的对应关系是用解析式表达的，它就表

示运算的框架。如$f(x)=3x^2+4x+5$，f则表示为：$3(\quad)^2+4(\quad)+5$。

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的。在数学中，有时不考虑函数的实际意义，而抽象地研究用解析式表达的函数，这时我们约定：函数的定义域就是自变量所能取的能使解析表达式有意义一切实数值。例如，函数$y=\sqrt{1-x^2}$的定义域是闭区间$[-1,1]$，函数$y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的定义域是开区间$(-1,1)$。

当自变量x取数值$x_0\in D$时，与x_0对应的y的数值称为函数$y=f(x)$在点x_0处的函数值，记为$f(x_0)$或$y/_{x=x_0}$，当x遍取D的各个值时，对应的函数值全体的集合称为函数的值域。记为$W=\{y/y=f(x),\ x\in D\}$。

例1 求函数$f(x)=x^2-3x+5$在$x=2$，$x=x_0+1$ $x=x_0+\Delta x$，各点处的函数值。

解 $f(2)=2^2-3\times2+5=3$

$$f(x_0+1)=(x_0+1)^2-3(x_0+1)+5$$
$$=x_0^2-x_0+3$$

$$f(x_0+\Delta x)=(x_0+\Delta x)^2-3(x_0+\Delta x)+5$$
$$=x_0^2+(2\Delta x-3)x_0+[(\Delta x)^2-3\Delta x+5]$$

例2 求函数$y=\ln(1+x)$的定义域。

解 对数要求真数$1+x>0$，所以定义域应为$x>-1$，或写成$(-1,+\infty)$。

例3 求函数$y=\dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$的定义域。

解 这个函数要求分母不为零，即$x\neq-1$，$x\neq2$，所以定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,2)\cup(2,+\infty)$。

例4 求函数 $y=\sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}}$ 的定义域。

解 开平方要求被开方数大于等于零，即要求 $\dfrac{x-2}{x+1}\geqslant 0$，也就是要求 $x-2\geqslant 0$，同时要求 $x+1>0$；或者 $x-2\leqslant 0$，同时 $x+1<0$，即解下列不等式组：

$$\begin{cases}x-2\geqslant 0\\ x+1>0\end{cases} \text{或} \begin{cases}x-2\leqslant 0\\ x+1<0\end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases}x\geqslant 2\\ x>-1\end{cases} \text{或} \begin{cases}x\leqslant 2\\ x<-1\end{cases}$$

所以函数的定义域为 $x\geqslant 2$ 或 $x<-1$，也可写成定义域为 $(-\infty,-1)\cup[2,+\infty)$。

例5 求函数 $y=\sqrt{x^2-1}+\arcsin x$ 的定义域

解 $\sqrt{x^2-1}$ 要求 $|x|\geqslant 1$ 或写成 $(-\infty,-1]$ 和 $[1,+\infty)$，而 $\arcsin x$ 要求 $|x|\leqslant 1$ 或写成 $[-1,1]$，两个函数和的定义域应是各个函数定义域的公共部分，故函数的定义域为 $x=\pm 1$。

二、函数的增量

由例1知，$f(x)=x^2-3x+5$ 在 $x=x_0+\Delta x$ 的值为 $f(x_0+\Delta x)=x_0^2+(2\Delta x-3)x_0+[(\Delta x)^2-3\Delta x+5]$，而 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(2x_0-3)\Delta x+(\Delta x)^2$。称为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的增量。

对于函数 $y=f(x)$，当自变量 x 从 x_0 变到 x_1 时，相应地函数 y 从 y_0 变到 y_1，我们称 x_1-x_0 为自变量的增量，记为 Δx，而称 y_1-y_0 为函数的增量，记为 Δy；即 $\Delta x=x_1-x_0$，$\Delta y=y_1-y_0$；由于 $y_1=f(x_1)=f(x_0+\Delta x)$，$y_0=f(x_0)$，所以 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

就是函数$y=f(x)$的增量计算公式。

例6 求线性函数$y=f(x)=2x+1$在$x=\frac{1}{2}$处的增量。

解 当自变量在$x=\frac{1}{2}$处有增量Δx时，相应地函数增量是$\Delta y=f\left(\frac{1}{2}+\Delta x\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)$

$$=\left[2\times\left(\frac{1}{2}+\Delta x\right)+1\right]-\left[2\times\frac{1}{2}+1\right]=2\Delta x$$

三、基本初等函数

（一）幂函数

幂函数$y=x^{\mu}$的定义域由μ值来确定（μ是常数）。例如，当$\mu=3$时，$y=x^3$的定义域是$(-\infty,+\infty)$，当$\mu=-\frac{1}{2}$时，$y=x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$的定义域是$(0,+\infty)$，当$\mu=\frac{1}{2}$时，$y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$的定义域是$[0,+\infty)$，但不论$\mu$取何值，$y=x^{\mu}$在$(0,+\infty)$上总有定义．而当$\mu=1,2,3,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\cdots$时的$y=x^{\mu}$是常见的幂函数，它们的图形如图1-1所示。当$\mu=-1$时，为我们所熟知的双曲线$y=x^{-1}=\frac{1}{x}$

（二）三角函数

正弦函数　$y=\sin x$，是以2π为周期的周期函数。

余弦函数　$y=\cos x$，是以2π为周期的周期函数。

正弦函数、余弦函数的图形如图1-2所示。

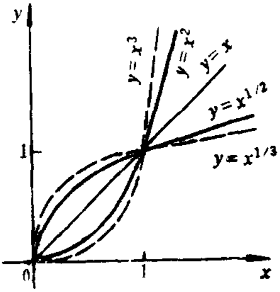

图 1-1

正切函数　$y=\mathrm{tg}x$。

余切函数　$y=\mathrm{ctg}x$。

正切函数、余切函数都是以π为周期的周期函数。它们的图形如图1-3所示。

正割函数　$y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$，其定义域为除去$x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$（$k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$）的全体实数。

余割函数　$y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$，其定义域为除去$x=k\pi$（$k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$）的全体实数。

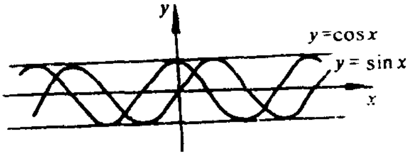

图 1-2

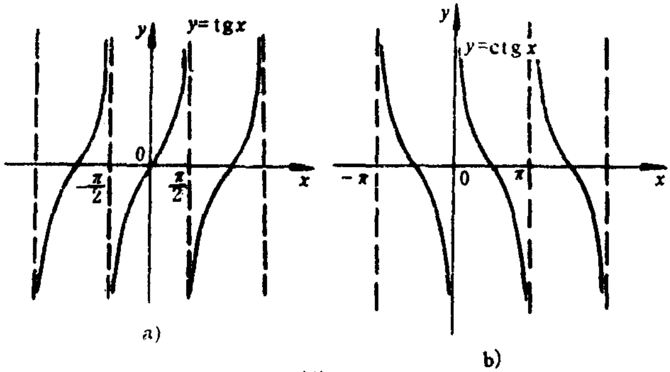

图 1-3

正割函数、余割函数也都是以2π为周期的周期函数。

（三）反三角函数

如果把三角函数中的自变量看作因变量，而把因变量看作自变量所得到的函数叫做反三角函数。

反正弦函数 $y=\arcsin x$，它的定义域为$[-1, 1]$，值域为$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，并在定义域内是严格单调增加的。

反余弦函数 $y=\arccos x$，它的定义域为$[-1, 1]$，值域是$[0, \pi]$，并在定义域上严格单调减少。

反正切函数 $y=\mathrm{arctg}x$，它的定义域为$[-\infty, +\infty]$，值域为$\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$，并在定义域内严格单调增加。

反余切函数 $y=\mathrm{arc\ ctg}x$，它的定义域为$(-\infty, +\infty)$，值域为$(0, \pi)$，并在定义域内是严格单调减少。以上四种函数的图形如图1-4所示。

(四)指数函数

底数是常数a，指数是自变量x的幂所表示的函数

$$y=a^x,\quad (a>0,\ a\neq 1)$$

称为指数函数。它的定义域为$(-\infty, +\infty)$。指数函数的图形在x轴的上方，且通过点$(0, 1)$；若$a>1$时，函数$y=a^x$在定义域上是单调增加的，若$0<a<1$时，函数$y=a^x$在定义域上是单调减少的。在工程技术中常用的是以常数$e\approx 2.7182818\cdots$为底的指数函数 $y=e^x$。

由于$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{-x}$，所以$y=2^x$的图形与$y=2^{-x}$的图形是以$y$轴对称的，如图1-5所示。

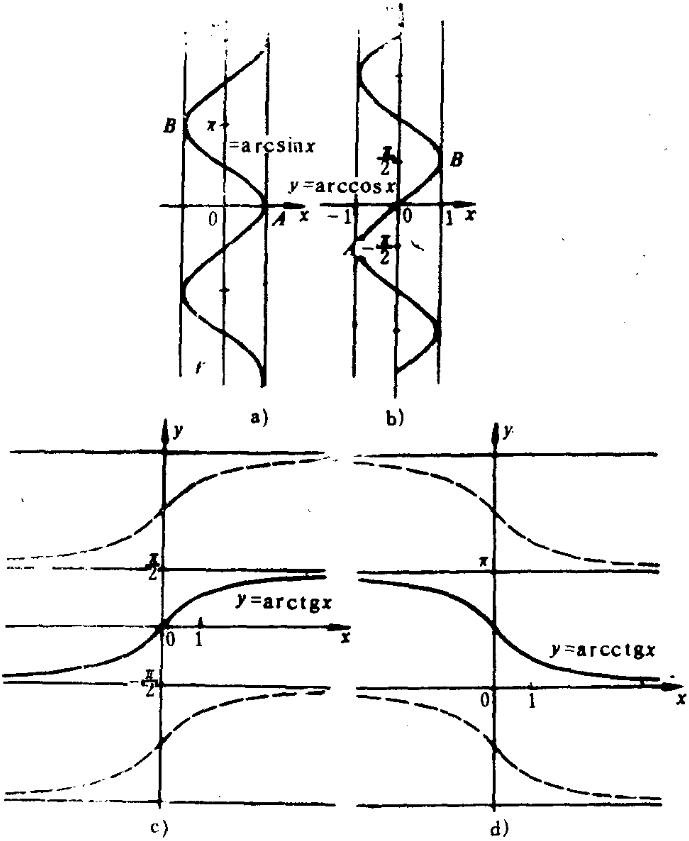

图 1-4

(五)双曲函数

在工程技术中，我们还会遇到双曲函数，它们是由指数函数$y=e^x$和$y=e^{-x}$构成的，主要有

双曲正弦　$\operatorname{sh}x=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$

双曲余弦　$\operatorname{ch}x=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$

这两个函数具有如下重要性质　$\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1$

而双曲正弦与双曲余弦的图形可由$y=\dfrac{1}{2}e^x$与$y=\dfrac{1}{2}e^{-x}$的

图形经过叠加得到，如图1-6所示。

（六）对数函数

指数函数 $y=a^x$的反函数为对数函数，记作

$$y=\log_a x \qquad (a>0,\text{且}a\neq 1)$$

它的定义域为$(0,+\infty)$，$y=\log_a x$的图形总在y轴的右方，且通过点(1，0)，如图1-7所示。若$a>1$，对数函数在定义域内是单调增加的在开区间(0,1)内函数值为负，而在开区间$(1,+\infty)$函数值为正。

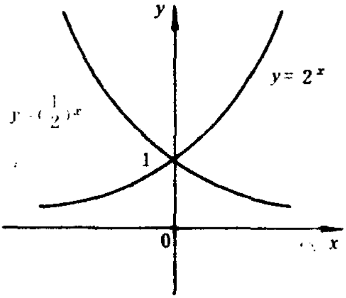

图 1-5

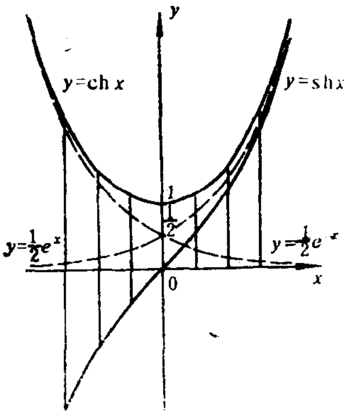

图 1-6

若$a<1$，对数函数$y=\log_a x$在定义域内是单调减少的。在开区间(0，1)内函数值为正；在开区间$(1,+\infty)$内函数值为负。

工程技术问题中，常常碰到以常数e为底的对数函数$y=\log_e x$，称为自然对数函数，记为$y=\ln x$。

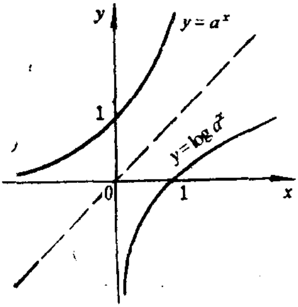

图 1-7

以上讨论的五种函数：幂函数、三角函数、反三角函数，指数函数和对数函数是最基本的函数，统称为基本初等函数，许多常见的函数都可以由它们来构成。

四、复合函数

先看一个例子，设 $y=\sqrt{u}$，而$u=4-x^2$，以$4-x^2$代替第一式中的 u，得 $y=\sqrt{4-x^2}$，我们则说，这个函数$y=\sqrt{4-x^2}$是由$y=\sqrt{u}$及$u=1-x^2$复合而成的复合函数。

若y是u的函数：$y=f(u)$，而u又是x的函数：$u=\varphi(x)$，则y通过u的联系也是x的函数，我们就称后一个函数是由函数$y=f(u)$及$u=\varphi(x)$复合而成的复合函数，记为$y=f[\varphi(x)]$，其中$u=\varphi(x)$叫做中间变量。

例如，函数 $y=e^{-x^2}$可以看成是由$y=e^u$及$u=-x^2$复合而成的。

复合函数也可以由两个以上的函数经过复合而成。又如，设$y=\sqrt{u}$，$u=\mathrm{ctg}v$，$v=\frac{x}{2}$，而y通过u和v的联系也是x的函数$y=\sqrt{\mathrm{ctg}\frac{x}{2}}$，这里$u$和$v$都是中间变量。

注意，并不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的，如$y=\arcsin u$及$u=2+x^2$就不能复合成一个复合函数。这是因为u的值域并不是$y=\arcsin u$的定义域。

五、初等函数

由常数和五种基本初等数经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构成的并可用一个式子表达的函数，称为初等函数。

如 $y=\mathrm{sh}x+e^{\mathrm{arctg}\sqrt{x^2-1}}$ 是初等函数，它是双曲正弦函数与指数函数的和，而其中 $e^{\mathrm{arctg}\sqrt{x^2-1}}$ 又是一个复合函数，复合层次的分析过程由外到里：$y=e^u$，$u=\mathrm{arc\,tg}v$，$v=\sqrt{W}$，$W=x^2-1$。而 $y=\begin{cases}2-x, & x<2\\ x-2, & x\geqslant 2\end{cases}$，