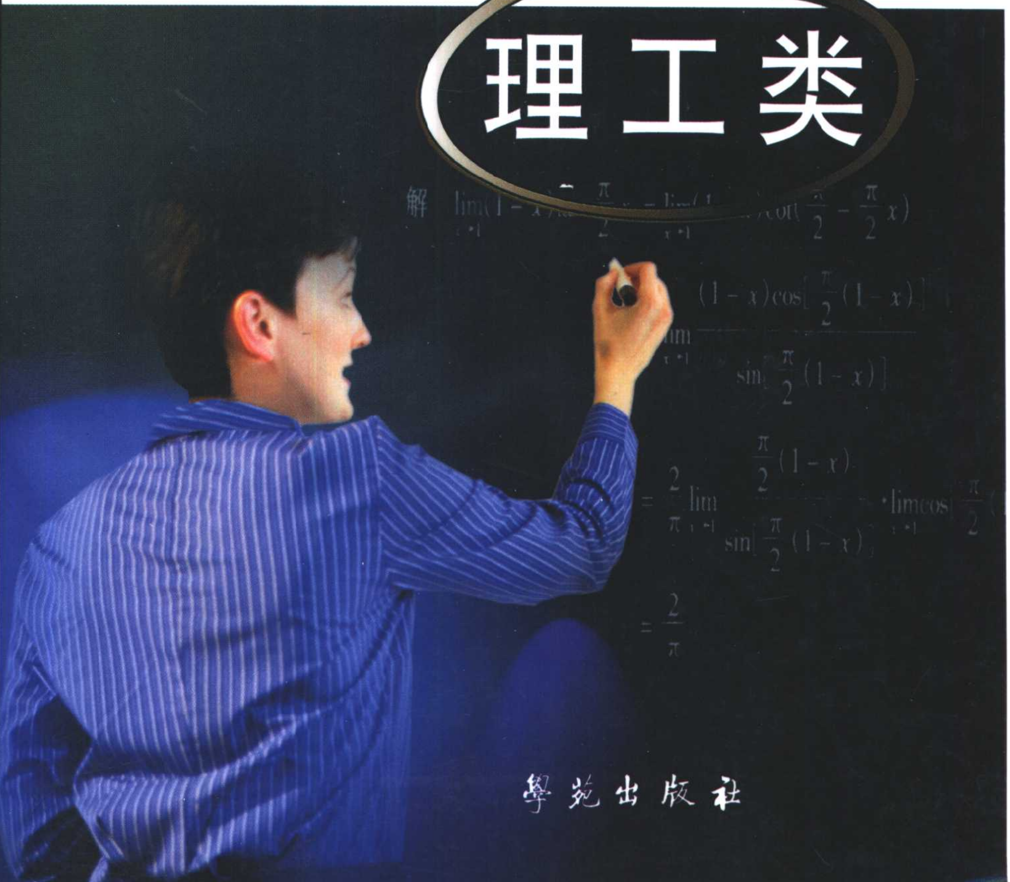
新世纪大学数学课金版辅导丛书

高等数学

金版辅导

JIN BAN FU DAO

理工类



學苑出版社

新世纪大学数学课金版辅导丛书

高等数学金版辅导

（理工类）

主编 陆璇（清华大学数学系教授）

本册编者 郭瑞平 石 践 张宝学

學苑出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学金版辅导（理工类）/陆璇主编．－北京：学苑出版社，2001.5

(新世纪大学数学课金版辅导丛书)

ISBN 7－5077－1845－X

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 陆…　Ⅲ. 高等数学－教学参考资料－2001　Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 11831 号

学苑出版社出版发行

北京市万寿路西街 11 号　100036

河北省香河县新华印刷有限公司　印刷

880×1230　32 开本　54.5 印张　1374 千字

2001 年 4 月北京第 1 版　2002 年 9 月北京第 2 次印刷

总定价:61.00 元(共三册)　本册定价:28.00 元

前　言

为帮助理工类在校学生、自学者学好高等数学，给他们备考研究生提供一份实用的复习资料，我们编写了《高等数学金版辅导》一书。

本书按知识结构精心安排章节内容，具有如下特点：

1. 在每一节的开头，以图表的方式论述本节的知识要点。

2. 在能力培养与解题技巧中，将例题按知识要点分类，并且例题前有提示分析，后有知识要点，尽量做到一题多解以开阔思路，对每一类例题都有解题小结。

3. 在本节解题技巧中，总结了一节的知识要点及解题技巧。

每一章后面安排了以下三部分内容：(1) 1990～2001年考研试题归类精选解析：选取了1990～2001年数学一和数学二的考研试题进行分析和讲解，以期能对报考研究生的读者给予帮助。我们对所列举的每道试题都进行了统一编号，其编号规则如下：编号的前两位表示年代；第三位表示数学大类；第四、五位表示第几大题；第六、七位表示第几小题。例如：1991年数学二第四大题第3小题可表示为9120403；(2)同步测试及参考答案；(3)本章知识内容小结，给出了本章的知识结构网络图，总结了基础知识、基本题型和解题方法。

本书最后还提供了三套综合模拟试题，以方便读者。

本书可供全日制大专院校、电大、职大、函大、夜大等广大学生学习《高等数学》时阅读和参考；对于自学者和有志攻读硕士研究生的青年，本书更是良师益友；对于从事《高等数学》教学的教师也有一定的参考价值。

限于作者水平，时间又仓促，书中不当之处在所难免，希望广大读者不吝批评指正。

编　者

目录

第一章　函数与极限

§1.1　函数

知识要点

表 1-1-1　区间与邻域

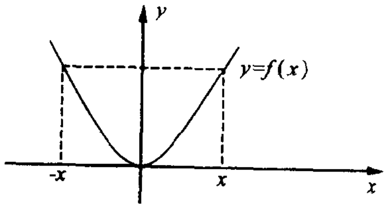
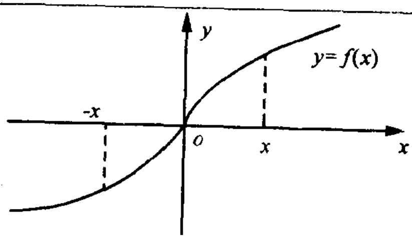
区间	设 a 和 b 都是实数,且 $a<b$,则 开区间 $(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$; 闭区间 $[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$; 半开区间 $[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$, $(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$; 无穷区间 $[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$, $(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$, $(-\infty,+\infty)=\{x\mid x\in R\}$
邻域	设 a 和 δ 都是实数,则 点 a 的 δ 邻域 $U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}$ $=\{x\mid \lvert x-a\rvert<\delta\}$; 点 a 的去心 δ 邻域 $\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<\lvert x-a\rvert<\delta\}$

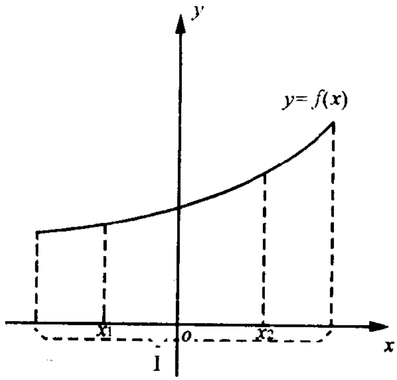
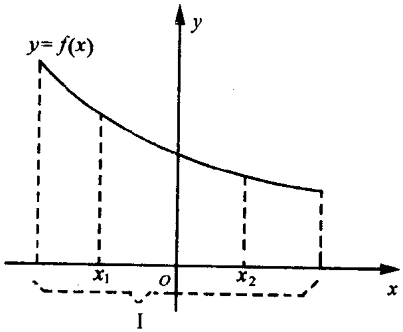
表 1-1-2　函数的概念

函数的定　义	设 x 和 y 是两个变量,D 是一个给定的数集,如果对于每一个给定的数 $x\in D$,变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应,则称 y 是 x 的函数,记作 $y=f(x)$

函数的图　形	xoy 平面上的点集 $\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 $f(x)$ 的图形
复合函数	由函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数 $y=f[\varphi(x)]$
反函数	设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D,值域为 W,那么对于任一 $y_0\in W$,必定有 $x_0\in D$ 使 $y_0=f(x_0)$,这样就确定了一个自变量为 y 的函数 $x=\varphi(x)$,称为函数 $y=f(x)$ 的反函数 反函数 $x=\varphi(y)$ 习惯上常记作 $y=\varphi(x)$,$x\in W$,因此函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=\varphi(x)$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的
初等函数	由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成的可用一个式子表示的函数

表 1-1-3　函数的特性

特性		定　义	示意图
奇偶性	偶函数	设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,如果对于任一 $x\in D$, $f(-x)=f(x)$ 恒成立,则称 $f(x)$ 为偶函数	 关于 y 轴对称
	奇函数	设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,如果对于任一 $x\in D$, $f(-x)=-f(x)$ 恒成立,则称 $f(x)$ 为奇函数	 关于原点对称

单调性	单调增加	设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I \subset D$。如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1 < x_2$ 时,恒有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的	
	单调减少	设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I \subset D$。如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1 < x_2$ 时,恒有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的	
有界性		设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,数集 $x \subset D$,如果存在正数 M,使得 $\lvert f(x) \rvert \leqslant M$ 对任一 $x \in X$ 都成立,则称函数 $f(x)$ 在 X 上无界	

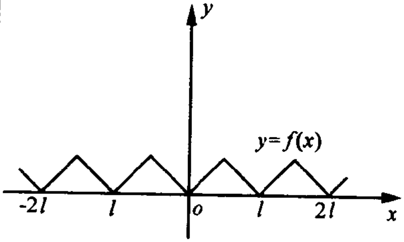
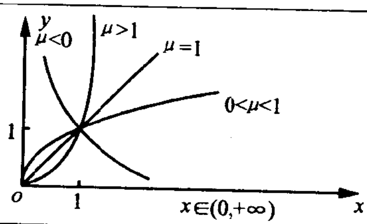
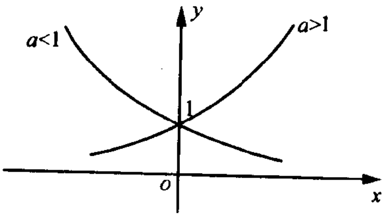
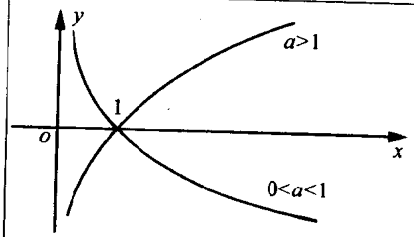
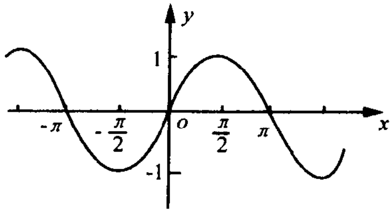
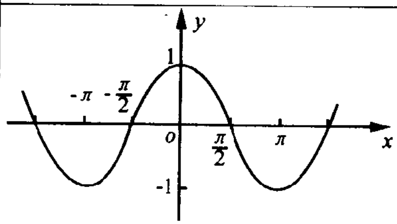
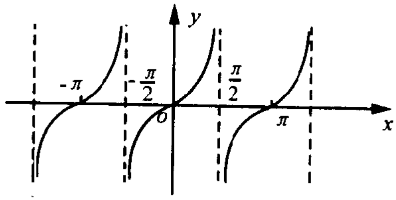
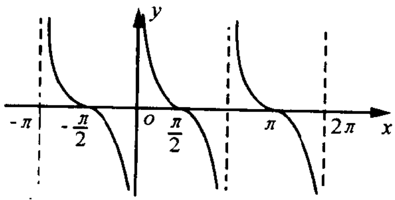
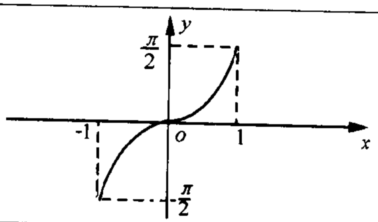
周期性		设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,如果存在一个不为零的数 l,使得对于任一 $x\in D$,有 $(x+l)\in D$,且 $f(x+l)=f(x)$ 恒成立,则称 $f(x)$ 为周期函数,l 为 $f(x)$ 的周期,通常我们所说的周期函数的周期是指最小正周期	

表 1-1-4　基本初等函数及特性

名称	定义	特　性	图　形
幂函数	$y=x^{\mu}$ (μ 是常数)	在 $(0,+\infty)$ 区间上, 当 $\mu>0$ 时,函数单调增加。 当 $\mu<0$ 时,函数单调减少	
指数函数	$y=a^{x}$ (a 是常数且 $a>0,a\neq1$), $x\in(-\infty,+\infty)$	当 $a>1$ 时,函数单调增加。 当 $0<a<1$ 时,函数单调减少	
对数函数	$y=\log_a x$ (a 是常数且 $a>0,a\neq1$), $x\in(0,+\infty)$	当 $a>1$ 时,函数单调增加。 当 $0<a<1$ 时,函数单调减少。	

三角函数	$y=\sin x$, $x\in(-\infty,+\infty)$	奇函数 周期函数,$l=2\pi$ 有界,$\lvert\sin x\rvert\leqslant 1$	
	$y=\cos x$, $x\in(-\infty,+\infty)$	偶函数 周期函数,$l=2\pi$ 有界,$\lvert\cos x\rvert\leqslant 1$	
	$y=\tan x$, $x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$, $n\in Z$	奇函数 周期函数,$l=\pi$	
	$y=\cot x$, $x\neq n\pi$, $n\in Z$	奇函数 周期函数,$l=\pi$	
反三角函数	$y=\arcsin x$, $x\in[-1,1]$	奇函数 单调增加 有界,$\lvert\arcsin x\rvert\leqslant\frac{\pi}{2}$	

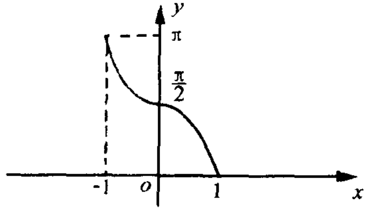
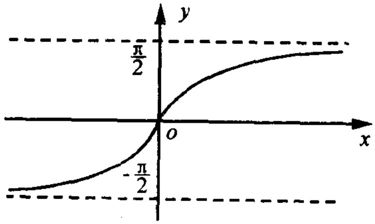
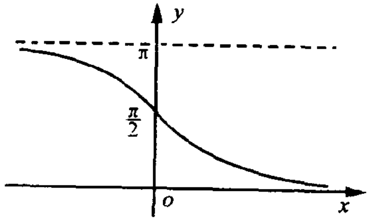
<table>
<tr><td rowspan="3">反
三
角
函
数</td><td>$y=\arccos x$,
$x\in[-1,1]$</td><td>单调减少
有界,$|\arccos x|\leqslant\pi$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$y=\arctan x$,
$x\in[-\infty,\infty]$</td><td>奇函数
单调增加
有界,$|\arctan x|\leqslant\frac{\pi}{2}$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$y=\operatorname{arccot} x$,
$x\in[-\infty,\infty]$</td><td>单调增加
有界,$|\operatorname{arccot} x|<\pi$</td><td>
</td></tr>
</table>

表 1-1-5 双曲线函数与反双曲线

双曲函数	双曲正弦 $\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, 双曲余弦 $\operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, 双曲正切 $\operatorname{th}x=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$
反双曲函数	反双曲正弦 $y=\operatorname{arch}x$, 反双曲余弦 $y=\operatorname{arsh}x$, 反双曲正切 $y=\operatorname{arth}x$

能力培养与解题技巧

一、求定义域、值域

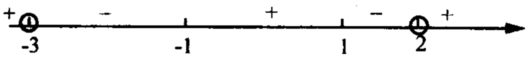
例1 求函数 $f(x)=\sqrt{\dfrac{(x^2+2)(1-x^2)}{6-x-x^2}}$ 的定义域。

提示分析:根据根号内非负,即可求其定义域。

解 由 $\dfrac{(x^2+2)(1-x^2)}{6-x-x^2}\geqslant 0$,

即 $\dfrac{(1-x)(1+x)}{(3+x)(2-x)}\geqslant 0$,

易知四个因式 $1-x,1+x,3+x,2-x$ 的正负决定了上式的符号,因此在数轴上 $x=1,x=-1,x=-3,x=2$ 的左邻区上式交替改变正负号,且当 x 为适当的正数($x>2$),不等式成立。所以在数轴上上式的符号如例1－1图所示,那么 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-3)\cup[-1,1]\cup(2,+\infty)$。



例1－1图

【知识要点】 对于有理分式的符号判别,应先进行一次因式分解,并在数轴上标出各个因式的根,根据有理分式的正负在各段交替出现的特点进行判别,并注意根据分母不为零的特点决定定义域区间端点的开闭性。

例2 求函数 $f(x)=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$ 的定义域和值域。

提示分析 首先根据根号内非负以及对数函数的特性确定其定义域,再由定义域和对应法则求其值域。

解 由 $\lg\dfrac{5x-x^2}{4}\geqslant 0$,可得

$$\frac{5x-x^2}{4}\geqslant 1,$$

即

$$x^2-5x+4\leqslant 0,$$

$$1\leqslant x\leqslant 4,$$

因此 $f(x)$ 的定义域为 $[1,4]$。

由 $\lg\dfrac{5x-x^2}{4}=\lg\dfrac{\frac{25}{4}-(x-\frac{5}{2})^2}{4}$,可知

当 $1\leqslant x\leqslant 4$ 时，

$$0\leqslant \lg\frac{5x-x^2}{4}\leqslant \lg\frac{25}{16},$$

即 $0\leqslant\sqrt{\lg\frac{5x-x^2}{4}}\leqslant\sqrt{\lg\frac{25}{16}}$，

所以 $f(x)$ 的值域是 $[0,\sqrt{\lg\frac{25}{16}}]$。

【知识要点】 1. 基本初等函数的定义域、单调性。

2. 配方法是判别二次多项式的一个基本方法。

3. 根据定义域和对应法则(函数关系式)，利用不等式求解值域。

例 3 求函数 $f(x)=\frac{2}{x^2-1}-\lg(3-x)+\arcsin\frac{3x-1}{2}$ 的定义域。

提示分析 根据分母不为零、对数函数的定义域为 $(0,+\infty)$，反正弦函数的定义域为 $[-1,1]$，即可求其定义域。

解 由 $\begin{cases} x^2-1\neq 0, \\ 3-x>0, \\ -1\leqslant\frac{3x-1}{2}\leqslant 1, \end{cases}$

即 $\begin{cases} x^2\neq \pm 1, \\ x<3, \\ -\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1, \end{cases}$

可得 $f(x)$ 的定义域是 $[-\frac{1}{3},1)$。

本类习题解题小结

1. 首先我们要熟悉基本初等函数的定义域和单调性等特性，如表 1.1.3 所示。

2. 求复杂函数的定义域，只需求解由基本初等函数的定义域所构成的不等式即可。

3. 根据定义域和函数关系式，利用基本初等函数的单调性求解函数的值域。

二、求反函数

例 4 求函数 $f(x)=\frac{1}{2+10^x}$ 的反函数。

解 令 $y=\frac{1}{2+10^x}$，则

$$2+10^x=\frac{1}{y},$$

即 $x=\lg(\frac{1}{y}-2)$，

所以 $f(x)$ 的反函数为

$$y=\lg(\frac{1}{x}-2)。$$

【知识要点】 求函数 $y=f(x)$ 的反函数，只需从方程 $y=f(x)$ 中解出 $x=\varphi(y)$，并把这个结果表达式中的 x 与 y 互换，即可得到函数 $y=f(x)$ 的反函数 $y=\varphi(x)$。

三、复合函数

例5 设 $f(x)=\frac{x}{1+x}$，求 $f[f(x)]$ 和 $f\{f[f(x)]\}$。

提示分析　根据函数符号的意义，用代入法求之。

解　$f[f(x)]=f[\frac{x}{1+x}]$

$$=\frac{\frac{x}{1+x}}{1+\frac{x}{1+x}}$$

$$=\frac{x}{1+2x},$$

$$f\{f[f(x)]\}=f\{\frac{x}{1+2x}\}$$

$$=\frac{\frac{x}{1+2x}}{1+\frac{x}{1+2x}}$$

$$=\frac{x}{1+3x}。$$

【知识要点】 考查函数符号的意义及应用。

例6 设函数 $f(x)=\begin{cases}x+1 & x<0\\ x^2 & x\geqslant 0\end{cases}$，求 $f(x-1)$ 和 $f(x^2-1)$。

解　把 $x-1$ 代入函数 $f(x)$ 的表达式，可得

$$f(x-1)=\begin{cases}(x-1)+1, x-1<0,\\ (x-1)^2, x-1\geqslant 0,\end{cases}$$

即　$f(x-1)=\begin{cases}x, x<1,\\ x^2-2x+1, x\geqslant 1,\end{cases}$

把 x^2-1 代入函数 $f(x)$ 的表达式，可得

$$f(x^2-1)=\begin{cases}(x^2-1)+1, x^2-1<0,\\ (x^2-1)^2, x^2-1\geqslant 0,\end{cases}$$

即