中央广播电视大学教材

经济数学基础

上册

JING JI SHU
XUE JI CHU

主　编　周兆麟

中央广播电视大学出版社

经济数学基础

上　册

周兆麟　主编

中央广播电视大学出版社

(京)新登字 163 号

图书在版编目(CIP)数据

经济数学基础　上册/周兆麟主编.-北京:中央广播电视大学出版社,1994.3

电视大学教材

ISBN 7-304-01027-4

Ⅰ.经…　Ⅱ.周…Ⅲ.经济数学-电视大学-教材 Ⅳ.F 224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(94)第 03283 号

经济数学基础

上　册

周兆麟　主编

中央广播电视大学出版社出版

社址:北京西城区大木仓 39 号北门　邮编:100032

北京密云胶印厂印刷　新华书店北京发行所发行

开本 850×1168　1/32　印张 13.25　千字 317

1994 年 2 月第 1 版　1994 年 3 月第 1 次印刷

印数 1-150000

定价:8.65 元

ISBN 7-304-01027-4/O·71

前　　言

经济数学是高等院校经济、管理类各专业数学中重要基础课之一。为适应经济发展需要和广播电视教育的要求，中央广播电视大学于 1987 年曾自编一套《经济应用数学》教材，满足了当时电大系统教学的迫切需要。

随着社会主义经济事业高速发展和改革开放的逐步深入，实现经济管理现代化与提高经济效益的要求日益迫切，数量经济研究和定量分析越来越受到重视与加强，计算方法与计算手段突飞猛进地发展又创造了极有利的条件，在经济管理和经济研究中卓有成效地运用数学方法就成了紧迫的任务之一，这一切都对高等财经专业基础教学提出了更高的要求。为此，根据 1990 年在济南召开的全国电大数学课程教学大纲研讨审定会上审定的《经济数学基础》(经济管理类大专)教学大纲的要求，在自编教材多年试用，多年教学实践的基础上，特编写出版本教材。

本教材系统介绍了微积分、线性代数和线性经济模型等基本知识和基本理论。为便于使用，分上、下两册。上册为微积分部分。讲授一元函数微积分、多元函数微分学及常微分方程简介等；下册为线性代数部分。突出讲授矩阵和线性方程组，作为线性代数的应用，介绍了有关线性经济模型问题。

在贯彻“必需、够用”的指导思想下，本教材重视基本概念、重视基本运算技能的训练，重视培养学生运用数学分析方法解决实际问题的能力，而不拘泥于理论推导和较繁的运算；作为财经类使用的教材，在保证数学概念准确的基础上，在引例、解释和应用诸

方面力争多联系与经济有关的问题。针对成人教育的特点，本教材力求在叙述上深入浅出、通俗易懂、便于自学。根据电大教学的安排，本课有中央电大统一的录像讲授，又有部分内容由各地方电大自行安排，主教材还有配套的学习指导书。因此，在本书编写中力行有详有简，以期起到相互补充的作用。本书除作为电大系统经济管理类专业大专的教材外，也可供高等院校、函授大学、业余大学、自修大学等财经专业专修科教学选用，书中有些内容加了“*”号，选用本书时，可根据教学需要和学时安排等具体情况取舍，一般可略去不讲。对于广大经济管理干部和其他研究工作者来说，本书在充实数学基本知识和掌握方法上也大有裨益。

为便于教师和学员使用，教材每章末配有两类习题：(A)类是计算、应用、证明等传统题型；(B)类是填空、选择等客观性题型，书末附有习题答案。

本书由周兆麟教授任主编，参与编写的有冯泰（第一、二、七、八章）、杨元（第三、四章）、赵坚（第五、六章）、周兆麟（第九章）、顾静相（第八、十章）。刘应明教授任主审。刘应明、吴梅村、滕成业、崔国森等对全书作了系统审核，张旭辉、葛振三、彭文学、郑盛畿、胡益国、余梦涛、潘茂桂、董映震、黄开明等同志以及广西电大部分分校的同志为本书的完成提供了宝贵意见。在本书编写过程中得到重庆电大、南宁电大分校、广西电大的大力支持，借此一并致谢。

由于作者水平有限，书中难免有不妥之处，敬请读者批评指正。

编　者

1993 年 4 月

目　录

第一章 函 数

17 世纪笛卡尔*把变数引入了数学，使数学从研究常数进一步发展到研究变数，从而产生了微积分. 微积分是研究变数以及变数间依赖关系即函数关系的一门学科，用微积分研究经济问题离不开函数关系. 虽然我们在中学已经学习过函数概念，由于它的重要性，我们将对函数进行较系统地复习和提高，为以后各章的学习做准备.

§1.1 函数概念

一、函数定义

函数常用符号 f、g、h 等表示. 简单地说，一个函数 f 是一种规则，按照这种规则可以把一个给定的数 x 和一个确定的数 y 联系起来，就说 y 是 x 的函数，记作 $f(x)$，即

$$y = f(x)$$

故函数表达了变量之间的对应关系. 举几个例.

例 1 $y=kx+b$.

在中学都学习过，把它叫做一次函数，其图形是一条直线. k 是直线的斜率，b 是它的截距. 当 k、b 取不同数值时，$y=kx+b$ 就代表了不同的一次函数或不同的直线. 对于一组确定的 k、b 的取值，如 $k=2$，$b=-1$，则有

---

* 笛卡尔(Rene Descartes)，1596－1650. 法国哲学家、数学家、物理学家.

$$y = 2x - 1 \tag{1.1}$$

就是一个完全确定的一次函数. 每给定一个 x 值,就有确定的一个 y 的值,使得数字对 (x,y) 满足(1.1)式. 对于 x 的一系列值,相应地也就会有一系列 y 的值,这些 y 的值都是通过(1.1)式确定下来的,如表 1.1.

表 1.1

x 的取值	…	−5	−1	0	1	2	3	…	100	…
相应的 y 值	…	−11	−3	−1	1	3	5	…	199	…

这里两个变量 x 与 $y(=f(x))$ 遵循这样一个规则:

$$f(\quad) = 2\cdot(\qquad) - 1.$$

或者说,规则 f 把变量 x 变成了变量 y.

$$y = f(x) = 2x - 1.$$

例 2 $y=2x^2-4x+5$.

大家熟悉,这是一个二次函数,它表示一条抛物线. 在这个表达式中,x 可以取一切实数. 每取定一个 x 值,就可以找到一个 y 的值,而且只有一个 y 的值满足

$$y = 2x^2 - 4x + 5.$$

当然,也可以说每一个 x 值,通过规则

$$f(\quad) = 2\times(\quad)^2 - 4\times(\quad) + 5, \tag{1.2}$$

把 x 变成确定的 y. 如 $x=4$,有

$$y = f(4) = 2\times 4^2 - 4\times 4 + 5 = 21,$$

而且只有一个 $y=21$,$(4,21)$ 使(1.2)式成立.

这里,变量 x 与变量 y 通过(1.2)式联系起来.

例 3 图 1-1 是气象站采用自动温度记录仪记录下来的某地一昼夜气温随时间变化的规律.

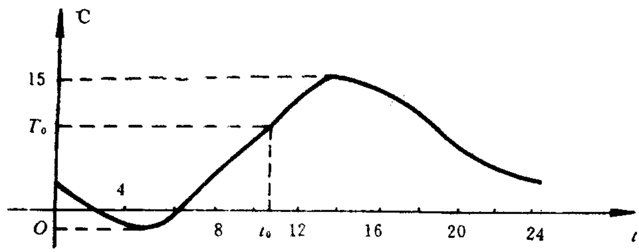

图 1-1

图中有两个变量：时间 t 和气温 T℃. 对从 O 到 24 小时内的任意一个确定的时刻 t. 都有一个确定的气温 T 与它对应. 它们之间的对应规则 f 就是图 1-1 的曲线. 如时间为 t_0 时，通过图中曲线（规则 f）找到 T_0，且 T_0 是唯一的值. 当 $t=12$ 时，气温 $T=12.7$℃.

所以变量 t 与变量 T 通过图形联系起来.

例 4 无线电厂电大班有 30 名学生，把他们的入学成绩列出为：

表 1.2

序　　号	1	2	3	4	……	29	30
姓　　名	张　立	王　红	李三海	丘　吉	……	岳明明	齐　思
入学成绩	374	269	398	284	……	271	300

用 x 表示同学名字的代号，它可以取 30 个值（如有同名，以编号区分）. 每取定一个 x 值，即取到一个名字，都有一个成绩 y 与之对应，可以记为

$$y=f(x).$$

这里的对应规则 f 就是这张成绩表，用表格把 x 变成 y.

总结以上四个例，有如下共同特点：

(1)　**它们都有两个变量. 其中之一，如 x，t，一旦它们取定值**

后，随之，另一个变量 y,T 也就唯一地确定下来. 前者可以自由变化，后者随之因变. 前者虽然可以自由取值，却又有一定限制，如例 3 中的 t 要取大于 0 小于 24 小时之间的任何数. 而例 4 中的 x 只可取 30 个人名字的代号. 随之因变的量当然也会有一定的范围. 在一个确定的问题中可能取不同值的量，我们叫它为**变量**. 能取的所有可能值的集合叫做变量的**变域**.

(2) 两个变量之间有一个规则约束它们. 如在例 1 和例 2 中，它们必须满足关系式(1.1)和(1.2)；在例 3 中它们要满足图 1-1 的曲线；在例 4 中它们的规则是表 1.1 的对应规律.

这就是函数.

在以上四个例中除两个变量外，还有其它量. 如例 1 中的 k，b；例 2 中的 $2,-4,5$ 等. 在所研究的问题中，保持同一确定数值的量，这种量叫**常量**. 在例 1 中的 k,b，虽然也可以取不同数值，但是，它们与变量 x,y 不同. 而且讨论直线时，它们总是确定的值. 所以我们又把这一类的常量叫参数常量. 例 2 中的 $2,-4,5$ 叫绝对常量.

定义 1.1 设变量 x,y，变量 x 的变域是 D. 如果对于 D 内的每一个 x，按照某种规则 f，都有唯一的 y 值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记作

$$y = f(x), \tag{1.3}$$

其中 x 叫做自变量，y 叫因变量. x 的变域 D 叫函数的定义域. 相应的 y 值的集合叫函数 $f(x)$ 的值域，记作 Y，

$$Y = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

如例 2 中，函数

$$y = f(x) = 2x^2 - 4x + 5$$

的定义域

$$D = \{x \mid x \in R\} = (-\infty, +\infty).$$

其值域是

$$Y=\{y|y\geq 3\}.$$

对于函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 中的每一个 x_0，按对应规则 f，就得到一个 y_0 值. y_0 就是函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记作

$$y_0=f(x_0),\text{或}\quad y|_{x=x_0},\text{或 } f(x)|_{x_0}.$$

如例 2 中，$x=4$ 的函数值是 21，写作

$$\begin{aligned} y|_{x=4}&=f(4)=(2x^2-4x+5)|_{x=4}\\ &=2\times 4^2-4\times 4+5=21. \end{aligned}$$

例 5 求函数

$$y=\frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$$

的定义域.

解 要使表达式

$$\frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$$

有意义，必须

$$x-1\neq 0,$$

即 $x\neq 1$；同时又必须满足

$$x+2\geq 0,$$

即 $x\geq -2$. 使上两式成立的 x 为：

$$x\geq -2 \text{ 且 } x\neq 1.$$

于是，所求函数的定义域为：

$$D=\{x|x\geq -2 \text{ 且 } x\neq 1\}$$

$$[-2,1)\cup(1,+\infty).$$

例 6 求函数

$$g(t) = \log_a(t^2 - 3t - 10)$$

的定义域.

解 对数的真数必须为正数,所以应有

$$t^2 - 3t - 10 > 0,$$

即

$$(t-5)(t+2) > 0.$$

等价于:

$$\begin{cases} t - 5 > 0 \\ t + 2 > 0 \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} t - 5 < 0 \\ t + 2 < 0. \end{cases}$$

解前一个不等式组得到:

$$t > 5 \text{ 且 } t > -2.$$

取公共部分:$t>5$;解后一个不等式组得到:

$$t < -2.$$

于是,所求函数的定义域为:

$$D = \{t \mid t > 5 \text{ 或 } t < -2\}$$

$$(-\infty, -2) \cup (5, +\infty).$$

二、几点说明

为了更好地理解函数概念,作以下几点说明.

1. 函数的两要素

由定义 1.1 可知,定义域决定了自变量取值的范围,对应规则确定 y 的值. 所以,两个变量构成函数关系的决定因素是定义域和对应规则. 我们称它们为函数的两要素. 两个函数只要定义域与对应规则完全相同,则它们是相同的函数. 与用什么符号表示自变量

和因变量无关. 如

$$y = x^2 - 3 \quad (-\infty < x < +\infty)$$

与

$$u = t^2 - 3 \quad (-\infty < t < +\infty)$$

是相同的函数.

2. 多值函数

定义 1.1 所定义的函数是单值函数，每一个 x 值只能有唯一的 y 值与之对应.

如图 1-2 中的曲线，在 $x=x_0$ 处有 3 个 y 的值与之对应，这是多值函数. 在本书中不去讨论它.

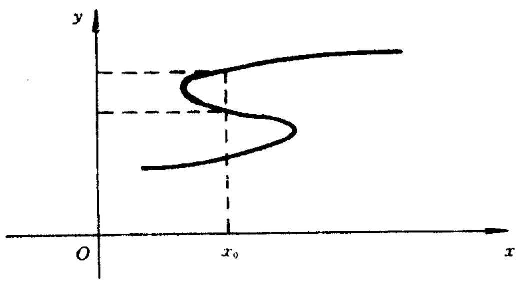

图 1-2

3. 函数图形

设函数 $y=f(x) \quad (x\in D)$. 每一个 $x\in D$，都确定一个值 y $(=f(x))$. 于是，数字对 (x,y) 就确定了平面直角坐标系中的一个点 $P(x,y)$. D 中所有的 x，按照规则 f 就确定了一系列 y 值，所有对应的数字对 $(x,y)=(x,f(x))$ 在平面直角坐标系中构成的平面点集通常叫做 $y=f(x)$ 的图形. 一般地，函数 $y=f(x)$ 的图形是一条曲线. 这条曲线叫做定义在 D 上的函数 $f(x)$ 的图形（如图 1-3).

4. 函数的表示方法

函数的表示方法有三种.

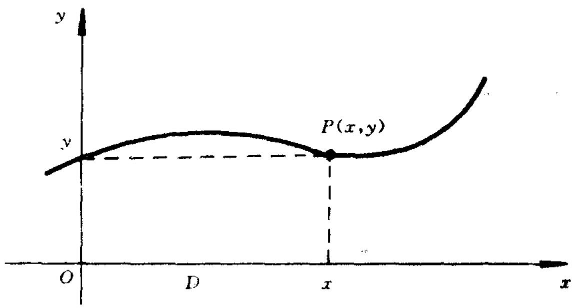

图 1-3

(1)解析法(公式法)　用解析表达式表示两个变量间的关系. 如例 1,例 2,例 5,例 6 均是用解析法表示函数关系的例子. 再举二例.

例 7　复利计算公式　设初始本金(现值)为 P(元),年利率为 R. 第 1 年末得利息 PR. 本利和用 S_1 表示,为

$$S_1 = P + PR = P(1 + R).$$

将本利和 S_1 再存入银行,第 2 年末的本利和为

$$S_2 = S_1 + S_1R = P(1 + R)^2.$$

再把本利和存入银行,如此反复,第 n 年末得本利和 S_n 为

$$S_n = P(1 + R)^n. \tag{1.4}$$

这就是以年为期的复利基本计算公式. 用解析法表示变量 n(年)和本利和 S_n 的函数关系.

以上用解析法表达的函数关系都是自变量与因变量各占等号的一边,明显地表示出自变量通过怎样的运算和关系到达因变量. 这样表达的函数,称之为显函数.

还注意到，以上的例都是仅用统一的表达式表示函数关系的显函数. 其实，还有.

例 8 由北京去上海出差携带行李，按铁路部门的现行规定，成年人每人携带的行李在 20 公斤以内免费；若超重被查出，超过免费重量在 5 公斤之内时，收包裹费 12 元；若超过免费重量在 5 公斤至 50 公斤时，收包裹费 120.3 元. 用 R(单位：元)表示所收包裹运费，q(单位：公斤)表示成年人一人携带的包裹重量，那么有：

$$R(q)=\begin{cases}0. & 0\leqslant q\leqslant 20,\\ 12, & 20<q\leqslant 25,\\ 120.3 & 25<q\leqslant 70.\end{cases}$$

上式反映了变量 R 与 q 之函数关系，而且是显函数. 但是，该函数在自变量变域内不同区间上，用不同的表达式表述自变量与因变量的关系. 这类分段表示的函数，称为分段函数，它仍然是一个函数.

用解析法表示函数还有一种是因变量 y 与自变量 x 的数量关系由方程来确定. 如 $x^2+y^2=a^2$，$6x+3y=8$ 等等. 在这种表达式中，x 与 y 的函数关系隐含在方程之中. 如

方程 $6x+3y=8$ 隐含着 $y=-2x+\dfrac{8}{3}$；

方程 $x^2+y^2=a^2$ 隐含着 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 及 $y=-\sqrt{a^2-x^2}$. 通常把未解出因变量的方程 $F(x,y)=0$ 所确定的 x 与 y 之间的函数关系叫做隐函数.

可见，一个隐函数可能解出几个表达式. 在隐函数中，对于自变量的一个值，因变量也可能有两个或多个值与之对应，这就是多值函数.

(2)图示法(图象法) 用一个函数的图形表达函数，如例 3. 作出函数的图象对讨论函数很有帮助. 因此，本章 §1.3 节给出一